Zásobníkové automaty

Zásobníkový automat

Příklad: Vezměme si jazyk nad abecedou $\Sigma = \{\mathtt{(}, \mathtt{)}, \mathtt{[}, \mathtt{]}, \mathtt{<}, \mathtt{>}\}$ tvořený „správně uzávorkovanými“ sekvencemi, tj. sekvencemi, kde každá levá závorka má odpovídající pravou a naopak každá pravá má odpovídající levou, přičemž se závorky „nekříží“ (jako třeba ve slově $\mathtt{<[>]}$).

Tento jazyk je možné popsat bezkontextovou gramatikou

$$A \rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{(}A\mathtt{)} \mid \mathtt{[}A\mathtt{]} \mid \mathtt{<}A\mathtt{>} \mid AA$$

Typický příklad slova, které patří do tohoto jazyka:

$$\mathtt{<[](()[<>])>[]}$$

Není těžké ukázat, že tento jazyk není regulární.

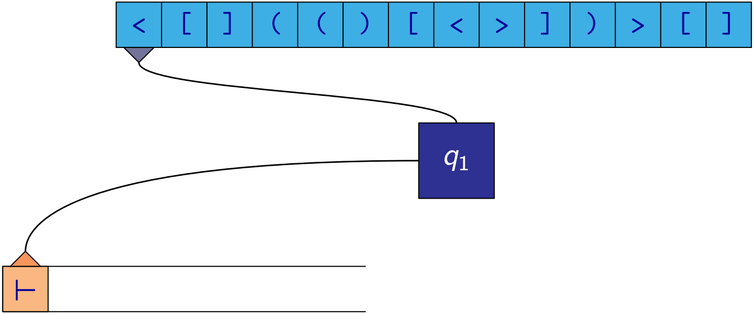
Zásobníkový automat

Chtěli bychom navrhnout zařízení podobné konečnému automatu, které by bylo schopno rozpoznávat slova z tohoto jazyka.

Jako vhodná možnost se nabízí využít při tomto rozpoznávání (neomezeně velký) **zásobník**.

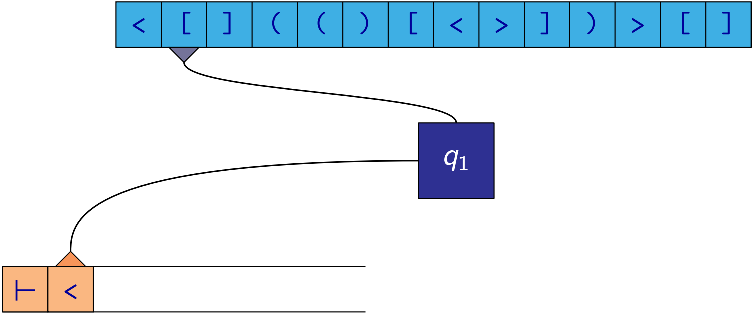
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>])>[]` patří do jazyka.



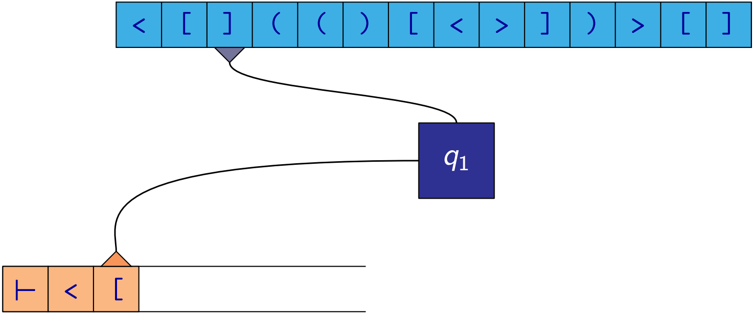
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>])>[]` patří do jazyka.



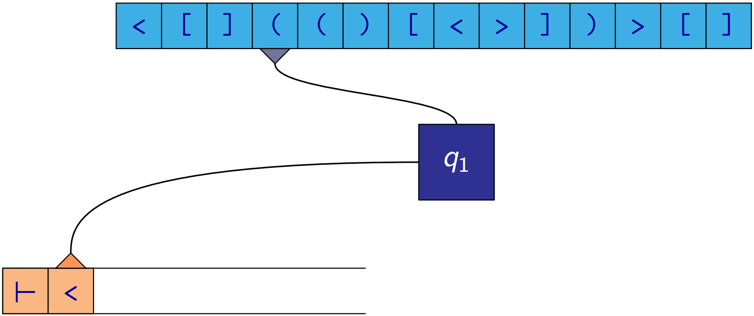
Zásobníkový automat

- Slovo `<[]((()[<>])>[]` patří do jazyka.



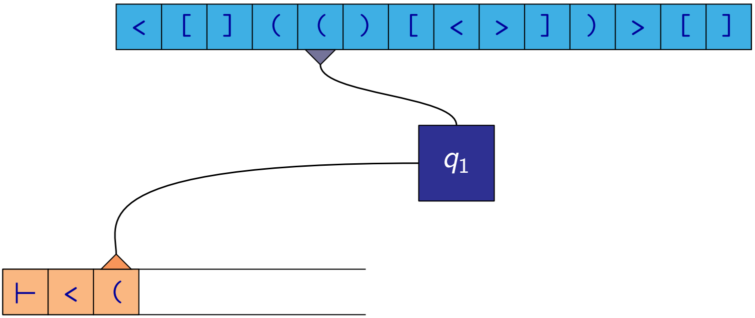
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>])>[]` patří do jazyka.



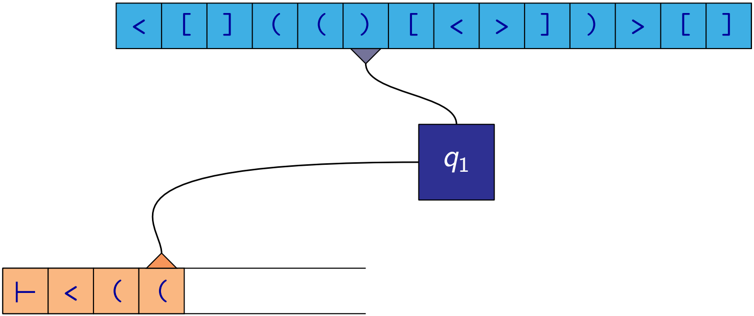
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>])>[]` patří do jazyka.



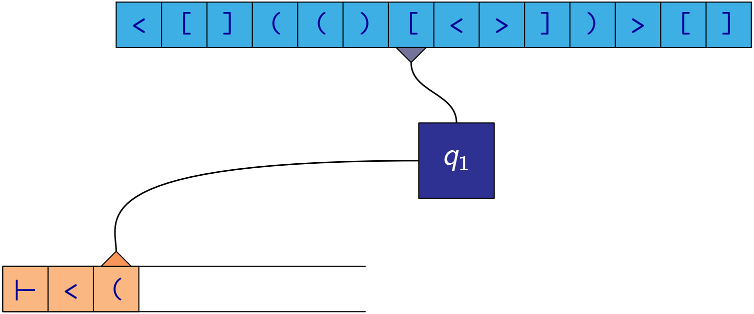
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>])>[]` patří do jazyka.



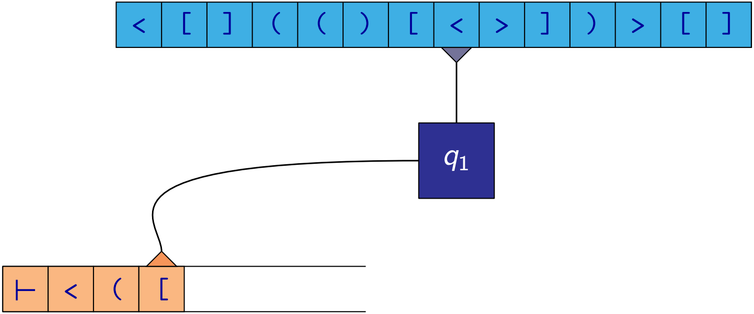
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>])>[]` patří do jazyka.



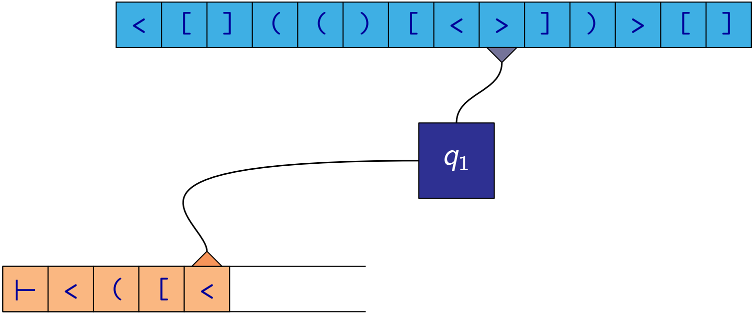
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>])>[]` patří do jazyka.



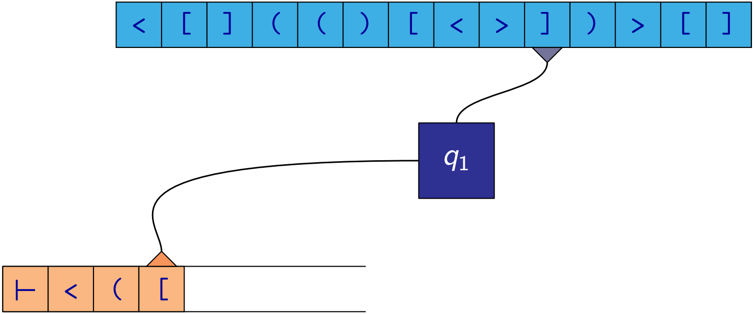
Zásobníkový automat

- Slovo <[](()[<>])>[] patří do jazyka.



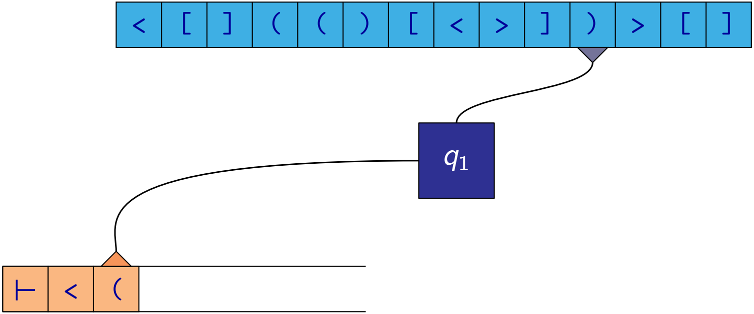
Zásobníkový automat

- Slovo <[](()[<>])>[] patří do jazyka.



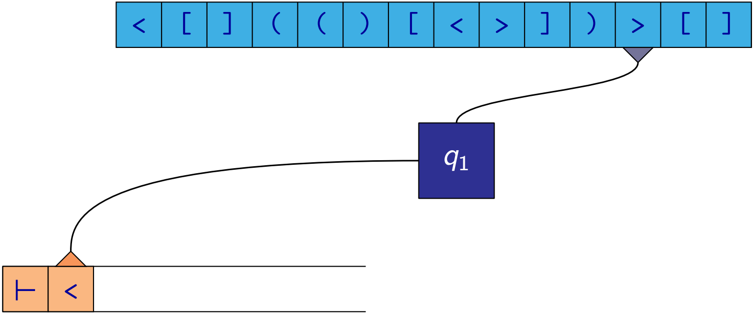
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>])>[]` patří do jazyka.



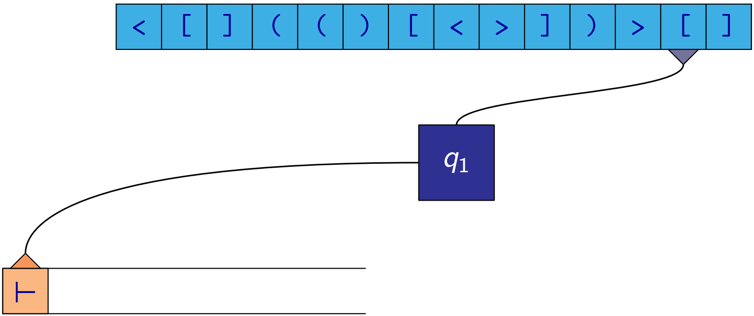
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>])>[]` patří do jazyka.



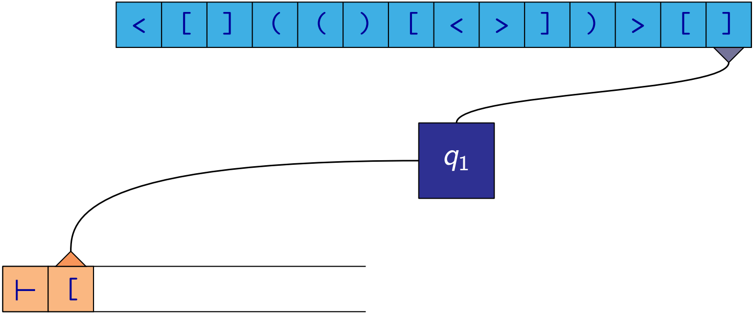
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>])>[]` patří do jazyka.



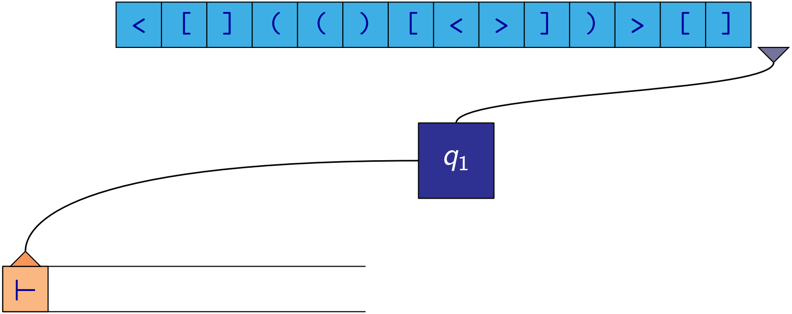
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>])>[]` patří do jazyka.



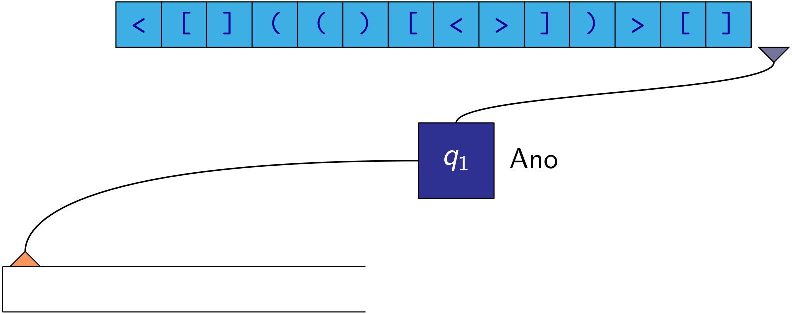
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>])>[]` patří do jazyka.



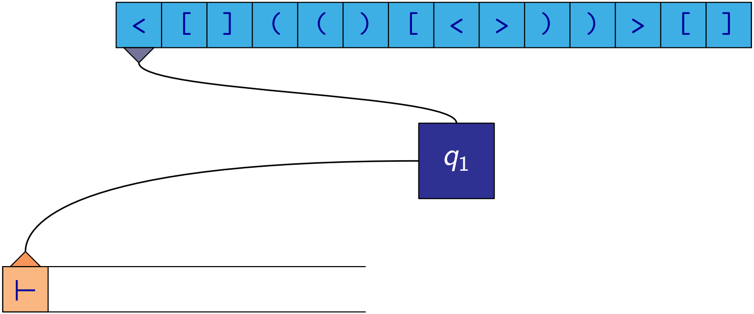
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>])>[]` patří do jazyka.
- Automat přečetl celé slovo a skončil s prázdným zásobníkem, takže slovo přijal.



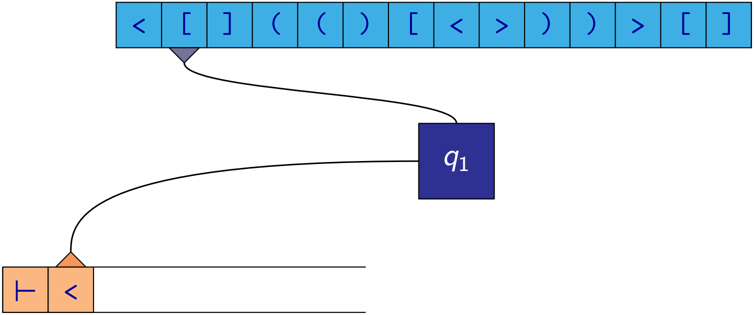
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>))>[]` nepatří do jazyka.



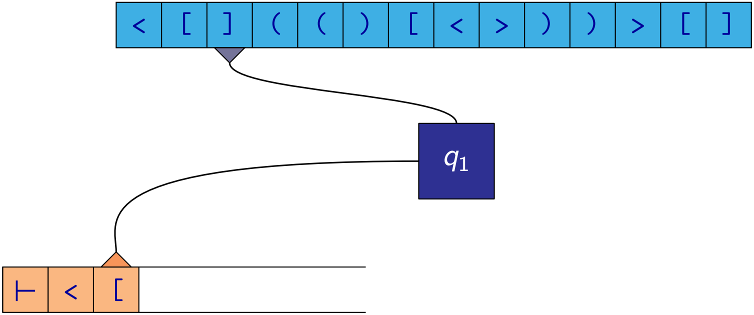
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>))>[]` nepatří do jazyka.



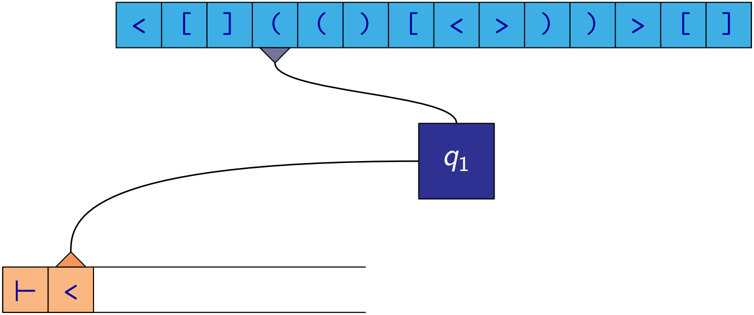
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>))>[]` nepatří do jazyka.



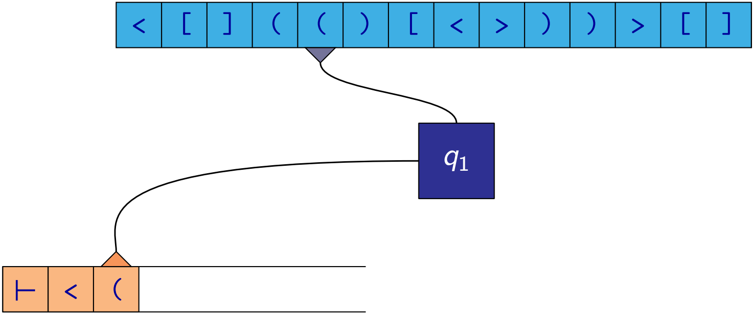
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>))>[]` nepatří do jazyka.



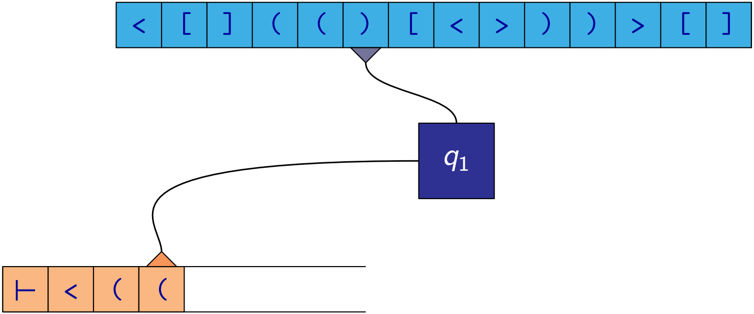
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>))>[]` nepatří do jazyka.



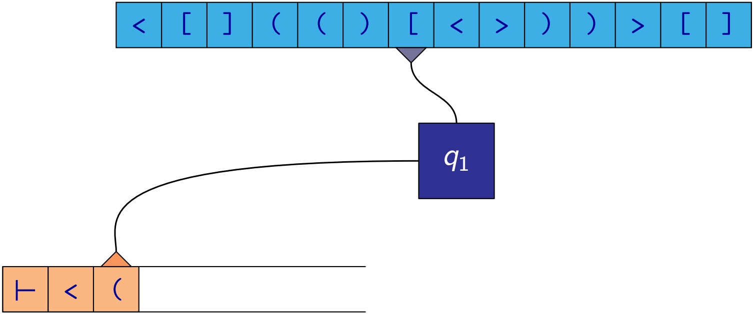
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>))>[]` nepatří do jazyka.



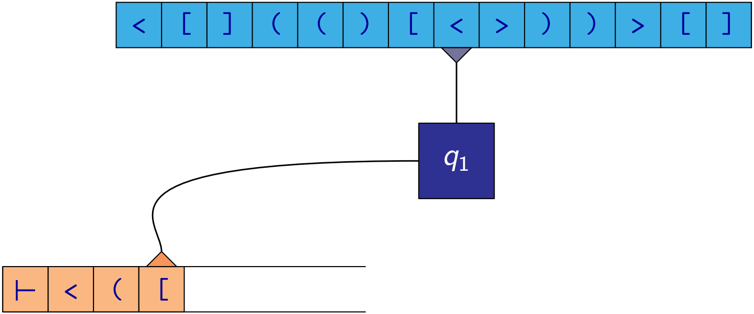
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>))>[]` nepatří do jazyka.



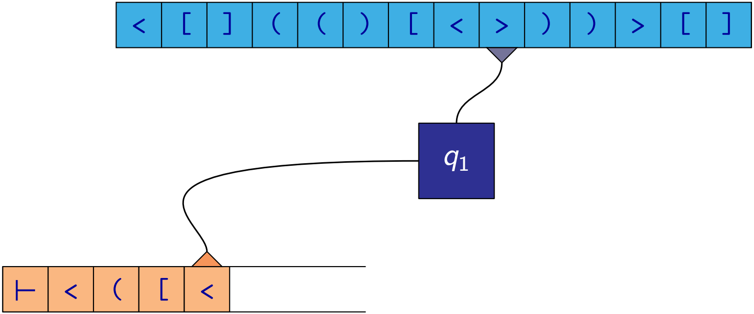
Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>))>[]` nepatří do jazyka.



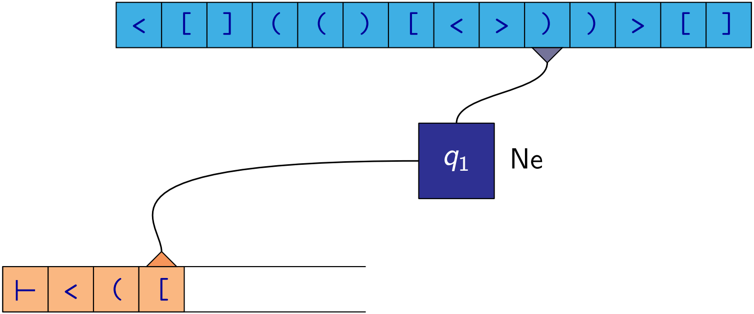
Zásobníkový automat

- Slovo `<[]((()[<>))>[]` nepatří do jazyka.



Zásobníkový automat

- Slovo `<[](()[<>))>[]` nepatří do jazyka.
- Automat narazil na neodpovídající závorku, takže slovo nepřijal.



Příklad:

- Chtěli bychom rozpoznávat jazyk $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Opět se jedná o typický příklad neregulárního jazyka.

Zásobníkový automat

Příklad:

- Chtěli bychom rozpoznávat jazyk $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

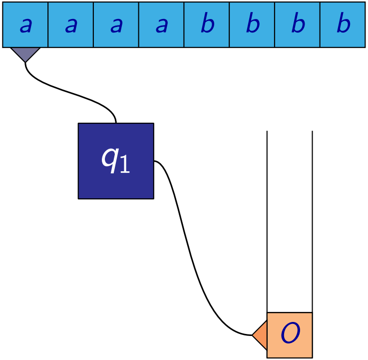
Opět se jedná o typický příklad neregulárního jazyka.

Zásobník můžeme používat jako čítač:

- Budeme do něj ukládat symboly jednoho druhu (nazvěme ho např. I).
- Počet těchto symbolů I na zásobníku bude reprezentovat hodnotu čítače.

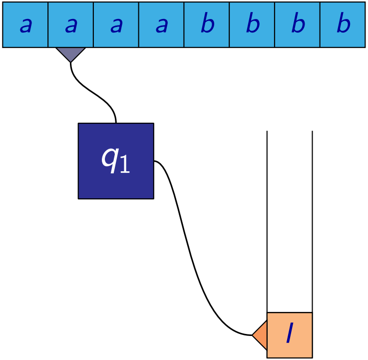
Zásobníkový automat

- Slovo $aaaabbbb$ patří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



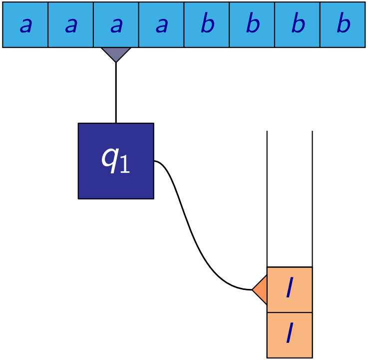
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbbb* patří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



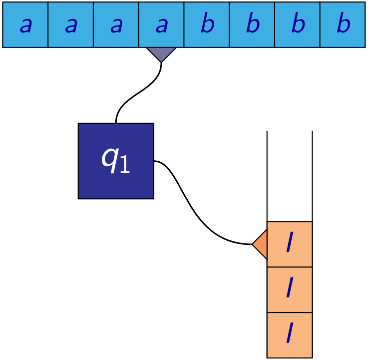
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbbb* patří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



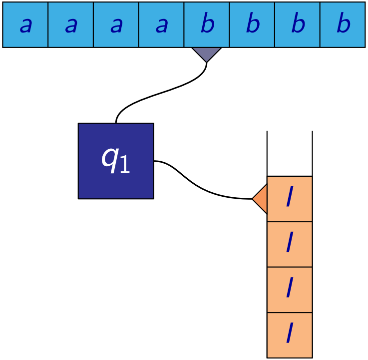
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbbb* patří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



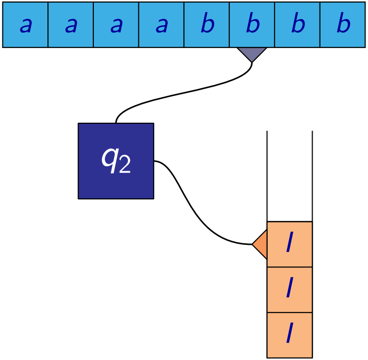
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbbb* patří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



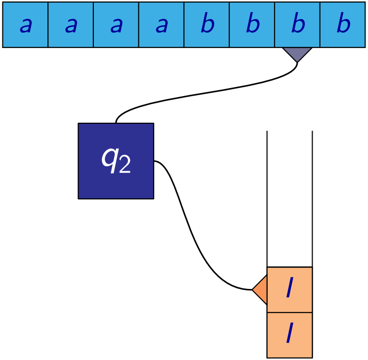
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbbb* patří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



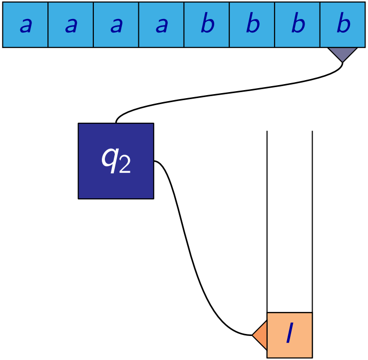
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbbb* patří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



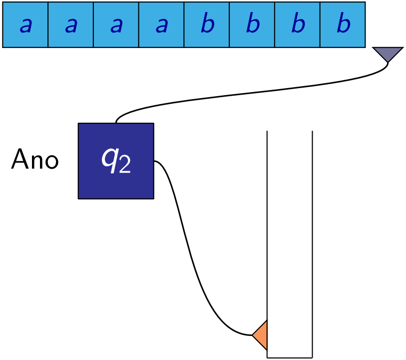
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbbb* patří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



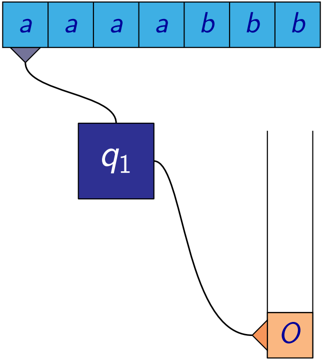
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbbb* patří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$
- Automat přečetl celé slovo a skončil s prázdným zásobníkem, takže slovo přijal.



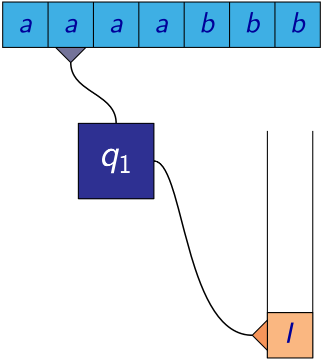
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbb* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



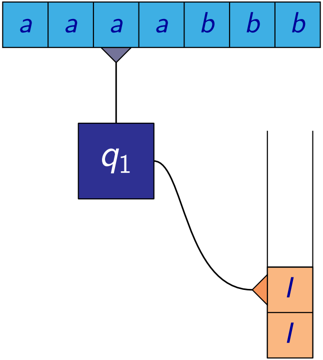
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbb* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



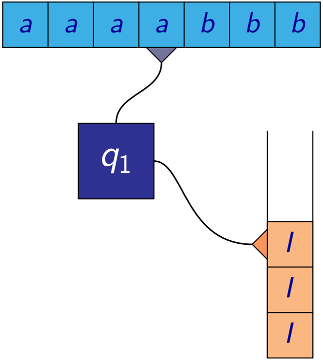
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbb* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



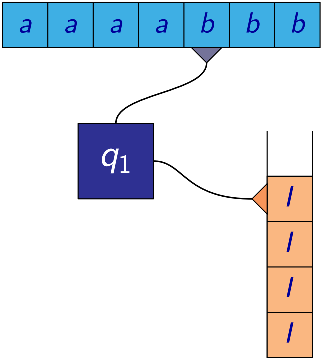
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbb* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



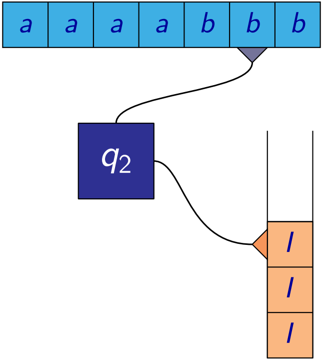
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbb* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



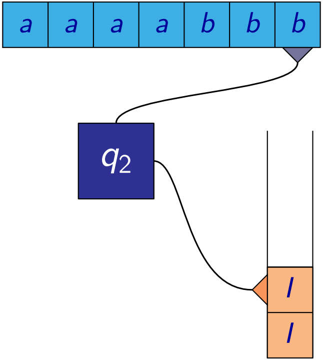
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbb* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



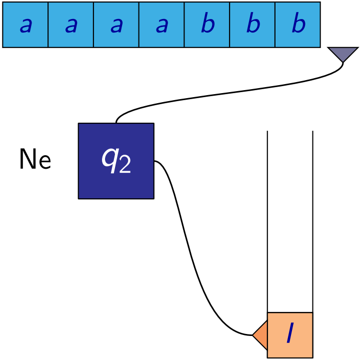
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbb* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



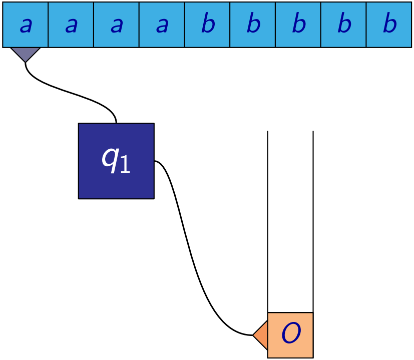
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbb* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$
- Automat přečetl celé slovo, ale nevyprázdnil zásobník, takže slovo nepřijal



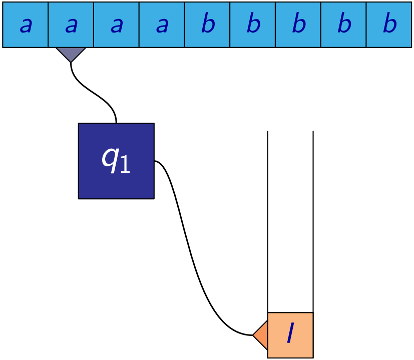
Zásobníkový automat

- Slovo $aaaabbbbb$ nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



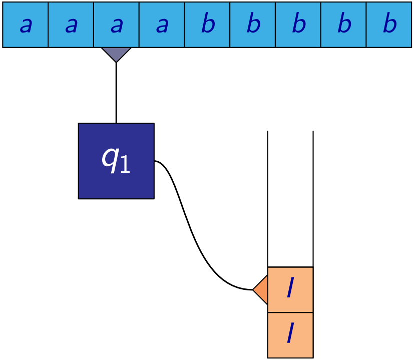
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbbbb* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



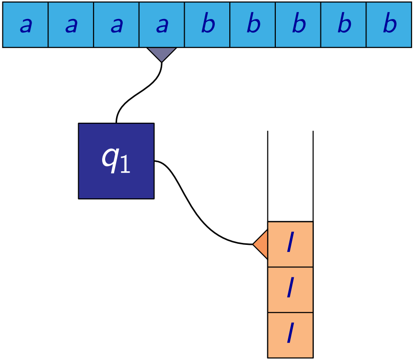
Zásobníkový automat

- Slovo $aaaabbbbb$ nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



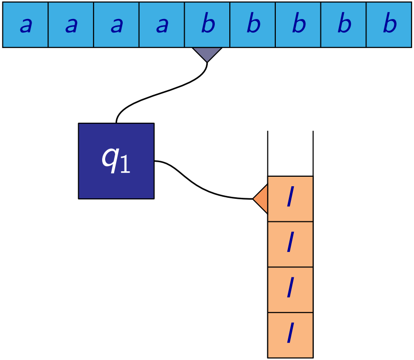
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbbbb* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



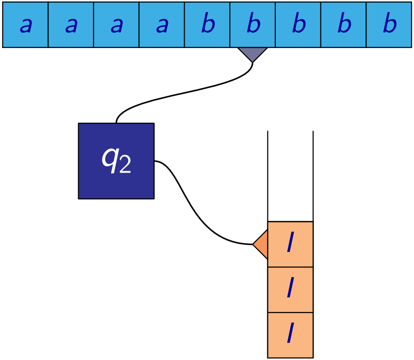
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbbbb* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



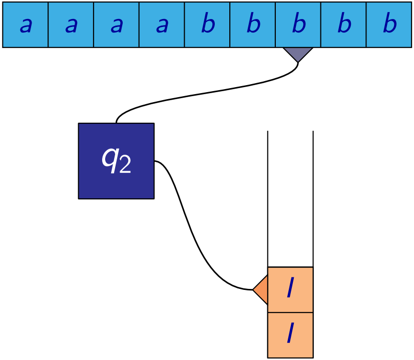
Zásobníkový automat

- Slovo $aaaabbbbb$ nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



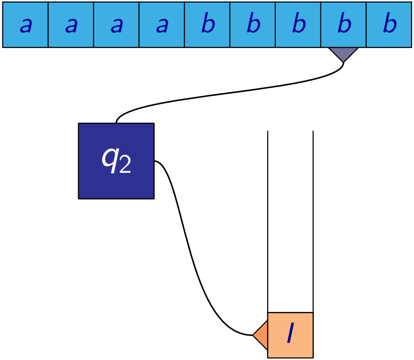
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbbbb* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



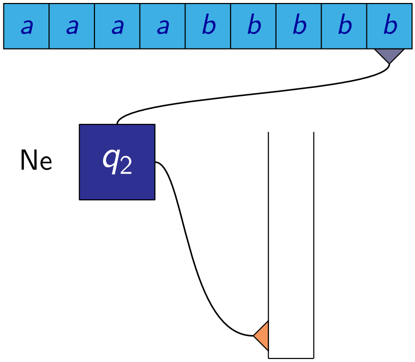
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbbbb* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



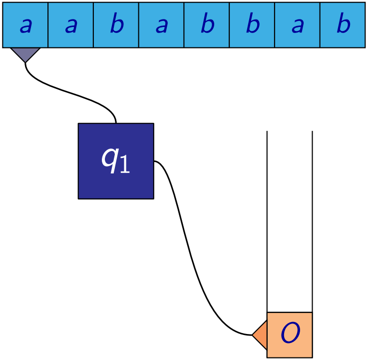
Zásobníkový automat

- Slovo *aaaabbbbb* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$
- Automat čte b, má smazat symbol na zásobníku a tam žádný není, takže slovo nepřijal.



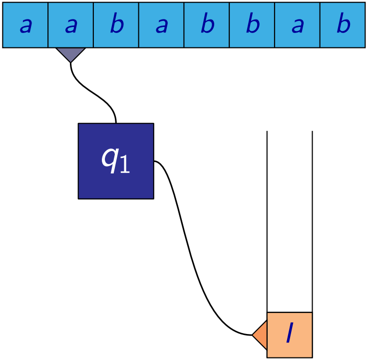
Zásobníkový automat

- Slovo *aababbbab* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



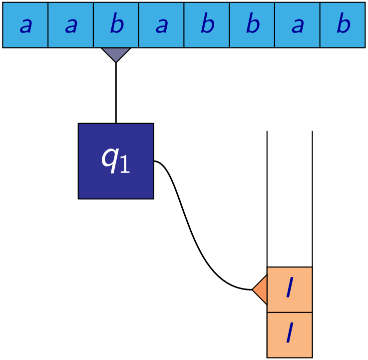
Zásobníkový automat

- Slovo *aababbab* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



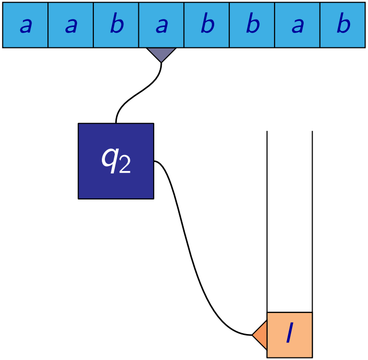
Zásobníkový automat

- Slovo *aababbab* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



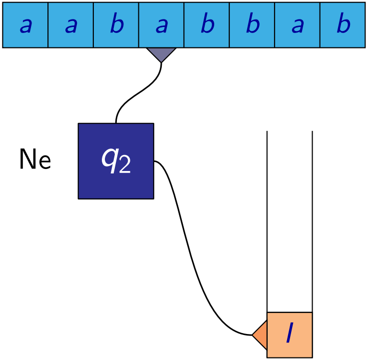
Zásobníkový automat

- Slovo *aababbab* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$



Zásobníkový automat

- Slovo *aababbbab* nepatří do jazyka $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$
- Automat přečetl a, ale již byl ve stavu, kdy maže, takže slovo nepřijal.



Zásobníkový automat

- Zásobníkový automat může být nedeterministický a může mít ε-přechody.

Zásobníkový automat

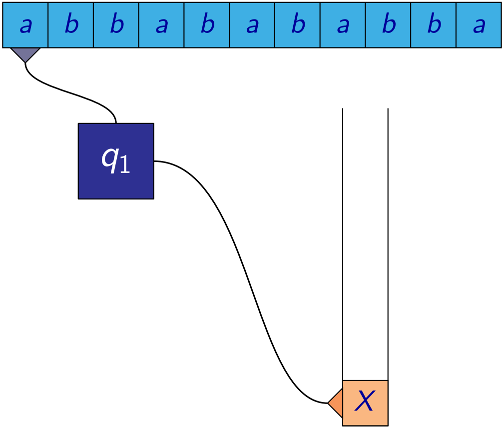
- Zásobníkový automat může být nedeterministický a může mít ε-přechody.

Příklad:

- Uvažujme jazyk $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$.
- První polovinu slova můžeme uložit na zásobník.
- Při čtení druhé poloviny mažeme symboly ze zásobníku, pokud jsou stejné jako na vstupu.
- Pokud bude zásobník prázdný po přečtení celého slova, byla druhá polovina stejná jako první.
- Místo, kde se nachází „hranice“ mezi první a druhou polovinou slova může automat nedeterministicky uhodnout. Výpočty, při kterých bude hádat chybně, nepovedou k přijetí slova.

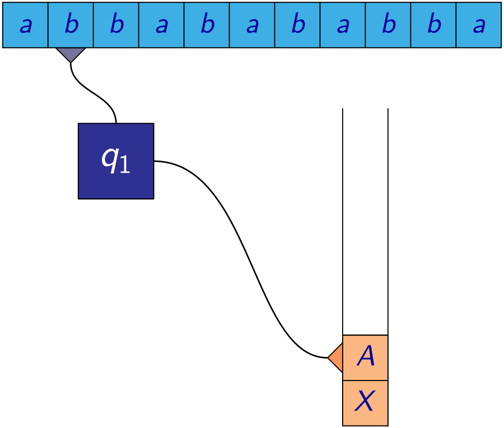
Zásobníkový automat

- Slovo *abbababababba* patří do jazyka $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$



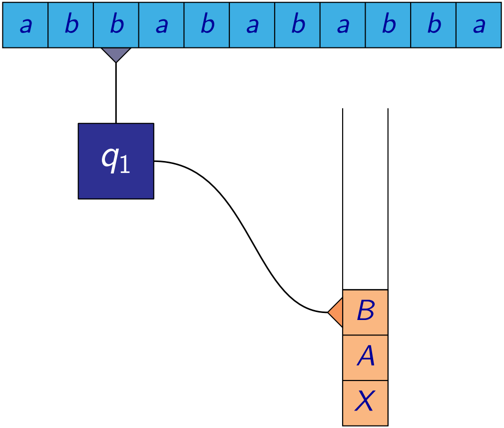
Zásobníkový automat

- Slovo *abbababababba* patří do jazyka $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$



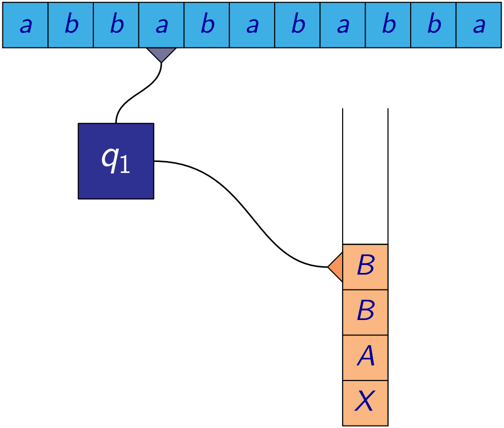
Zásobníkový automat

- Slovo *abbababa bba* patří do jazyka $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$



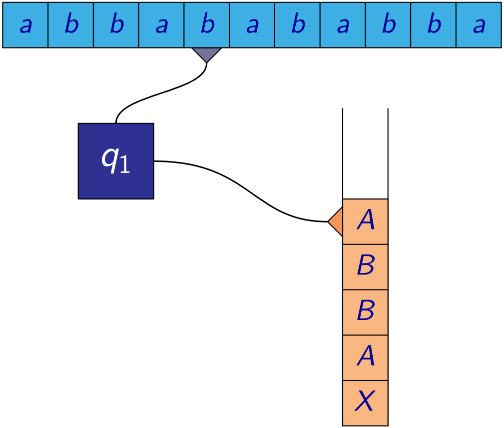
Zásobníkový automat

- Slovo *abbababababba* patří do jazyka $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$



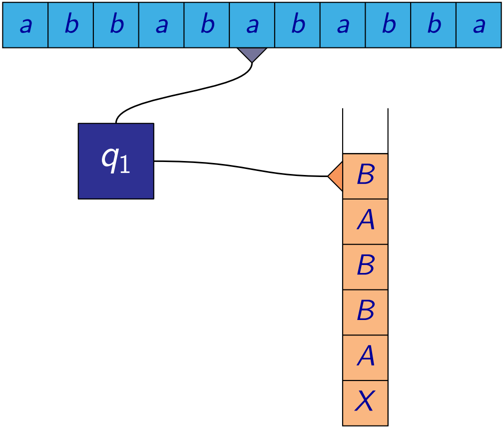
Zásobníkový automat

- Slovo *abbababbabba* patří do jazyka $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$



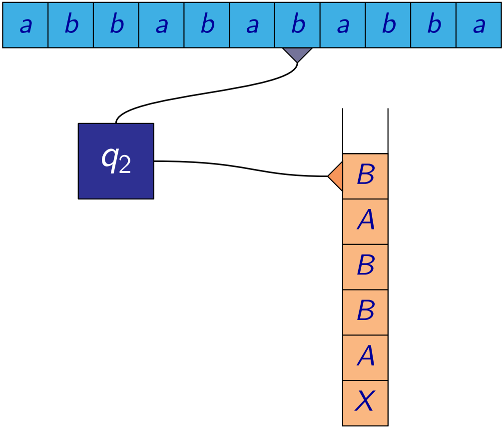
Zásobníkový automat

- Slovo *abbababbba* patří do jazyka $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$



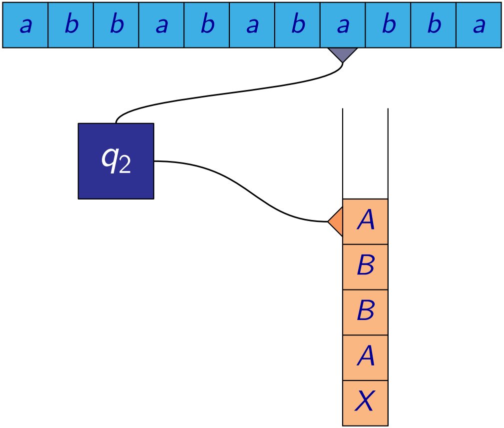
Zásobníkový automat

- Slovo *abbababa bba* patří do jazyka $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$



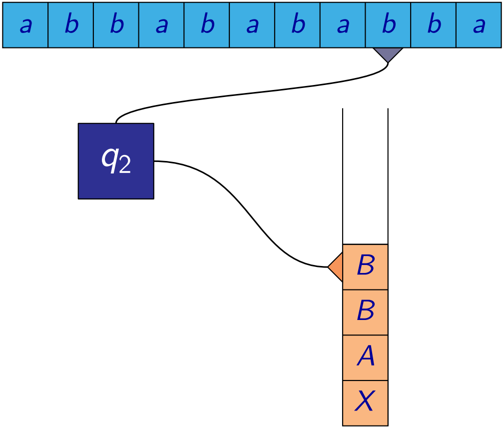
Zásobníkový automat

- Slovo *abbabababba* patří do jazyka $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$



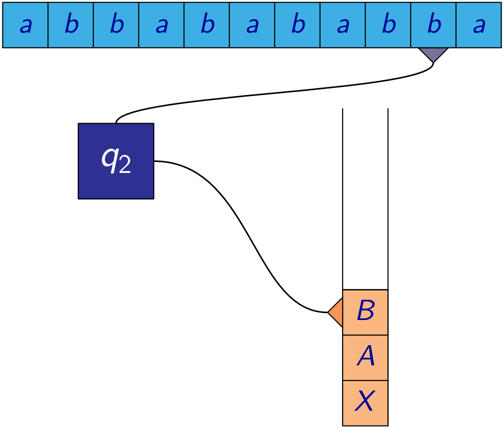
Zásobníkový automat

- Slovo *abbababbba* patří do jazyka $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$



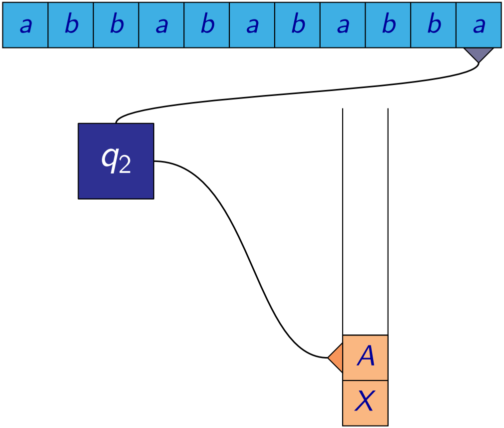
Zásobníkový automat

- Slovo *abbabababba* patří do jazyka $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$



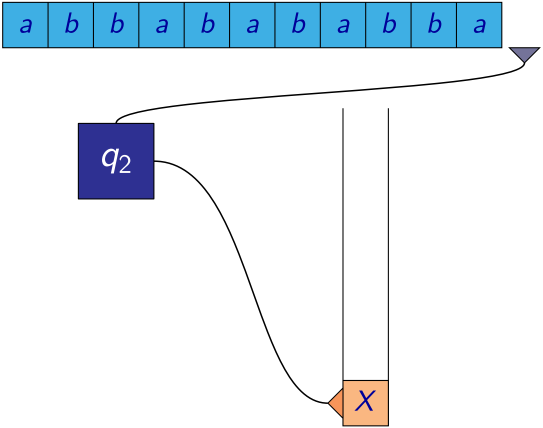
Zásobníkový automat

- Slovo *abbababbba* patří do jazyka $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$



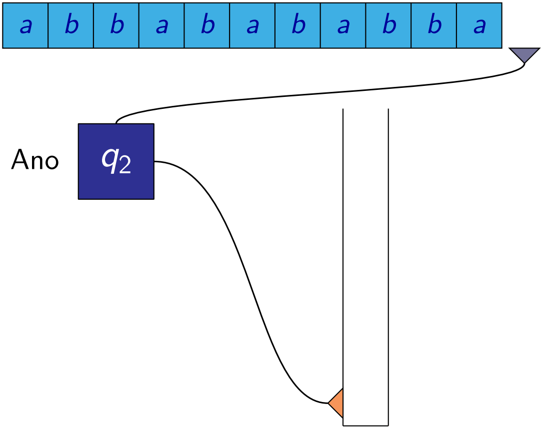
Zásobníkový automat

- Slovo *abbababababba* patří do jazyka $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$



Zásobníkový automat

- Slovo *abbabababba* patří do jazyka $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$



Zásobníkový automat

Definice

Zásobníkový automat (**ZA**) je uspořádaná šestice
$\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, X_0)$, kde

- Q je konečná neprázdná množina stavů
- Σ je konečná neprázdná množina zvaná vstupní abeceda
- Γ je konečná neprázdná množina zvaná zásobníková abeceda
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ je (nedeterministická) přechodová funkce
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav
- $X_0 \in \Gamma$ je počáteční zásobníkový symbol

Zásobníkový automat

Příklad: $L = \{\, a^n b^n \mid n \geq 1 \,\}$

$\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, O)$, kde

- $Q = \{q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{O, I\}$
- $$\begin{array}{ll} \delta(q_1, a, O) = \{(q_1, I)\} & \delta(q_1, b, O) = \emptyset \\ \delta(q_1, a, I) = \{(q_1, II)\} & \delta(q_1, b, I) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \delta(q_2, a, I) = \emptyset & \delta(q_2, b, I) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \delta(q_2, a, O) = \emptyset & \delta(q_2, b, O) = \emptyset \end{array}$$

Poznámka: Často se uvádí jen ty hodnoty přechodové funkce, které přiřazují dané trojici něco jiného než prázdnou množinu.

Zásobníkový automat

Pro zápis přechodové funkce budeme též používat způsob zápisu, kdy se na přechodovou funkci díváme jako na sadu **pravidel**:

- Každému $q, q' \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X \in \Gamma$ a $\alpha \in \Gamma^*$, kde
$$(q', \alpha) \in \delta(q, a, X)$$
odpovídá jedno pravidlo
$$qX \xrightarrow{a} q'\alpha \,.$$

Příklad: Pokud

$$\delta(q_5, b, C) = \{(q_3, ACC), (q_5, BB), (q_{13}, \varepsilon)\}$$

můžeme to reprezentovat jako tři pravidla:

$$q_5 C \xrightarrow{b} q_3 ACC \qquad q_5 C \xrightarrow{b} q_5 BB \qquad q_5 C \xrightarrow{b} q_{13}$$

Zásobníkový automat

Příklad: Dříve popsaný zásobníkový automat rozpoznávající jazyk $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$:

$\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, O)$, kde

- $Q = \{q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{O, I\}$
- $$\begin{aligned} q_1 O &\xrightarrow{a} q_1 I \\ q_1 I &\xrightarrow{a} q_1 II \\ q_1 I &\xrightarrow{b} q_2 \\ q_2 I &\xrightarrow{b} q_2 \end{aligned}$$

Zásobníkový automat

Příklad: $L = \{\, w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R \,\}$

$\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde

- $Q = \{q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{X, A, B\}$
- $$\begin{array}{ll}
\delta(q_1, a, X) = \{(q_1, AX), (q_2, X)\} & \delta(q_1, b, X) = \{(q_1, BX), (q_2, X)\} \\
\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA), (q_2, A)\} & \delta(q_1, b, A) = \{(q_1, BA), (q_2, A)\} \\
\delta(q_1, a, B) = \{(q_1, AB), (q_2, B)\} & \delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB), (q_2, B)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, X) = \{(q_2, X)\} & \delta(q_2, \varepsilon, X) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, A) = \{(q_2, A)\} & \delta(q_2, \varepsilon, A) = \emptyset \\
\delta(q_1, \varepsilon, B) = \{(q_2, B)\} & \delta(q_2, \varepsilon, B) = \emptyset \\
\delta(q_2, a, A) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, b, A) = \emptyset \\
\delta(q_2, a, B) = \emptyset & \delta(q_2, b, B) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, a, X) = \emptyset & \delta(q_2, b, X) = \emptyset
\end{array}$$

Příklad: $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R \}$

$\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde

- $Q = \{q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{X, A, B\}$
- $$\begin{array}{lll}
q_1 X \xrightarrow{a} q_1 AX & q_1 X \xrightarrow{b} q_1 BX & q_2 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_1 AA & q_1 A \xrightarrow{b} q_1 BA & q_2 A \xrightarrow{a} q_2 \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_1 AB & q_1 B \xrightarrow{b} q_1 BB & q_2 B \xrightarrow{b} q_2 \\
q_1 X \xrightarrow{a} q_2 X & q_1 X \xrightarrow{b} q_2 X & q_1 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 X \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_2 A & q_1 A \xrightarrow{b} q_2 A & q_1 A \xrightarrow{\varepsilon} q_2 A \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_2 B & q_1 B \xrightarrow{b} q_2 B & q_1 B \xrightarrow{\varepsilon} q_2 B
\end{array}$$

Výpočet zásobníkového automatu

Vezměme si zásobníkový automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, X_0)$.

Konfigurace automatu $\mathcal{M}$:

- **Konfigurace ZA** je trojice

  $$(q, w, \alpha)$$

  kde $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ a $\alpha \in \Gamma^*$.

- **Počáteční kofigurací** je kofigurace (q_0, w, X_0), kde $w \in \Sigma^*$.

Výpočet zásobníkového automatu

Kroky vykonané automatem $\mathcal{M}$:

- Binární relace $\longrightarrow$ na konfiguracích $\mathcal{M}$ reprezentuje možné kroky výpočtu, které může ZA $\mathcal{M}$ provést.

  To, že $\mathcal{M}$ může přejít jedním krokem z konfigurace (q, w, α) do konfigurace (q', w', α'), zapisujeme

$$(q, w, \alpha) \longrightarrow (q', w', \alpha') .$$

- Tato relace $\longrightarrow$ je definována následovně:

$$(q, aw, X\beta) \longrightarrow (q', w, \alpha\beta) \iff (q', \alpha) \in \delta(q, a, X)$$

  kde $q, q' \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$, $w \in \Sigma^*$, $X \in \Gamma$, $\alpha, \beta \in \Gamma^*$.

Výpočet zásobníkového automatu

Výpočty $\mathcal{M}$:

- Na konfiguracích $\mathcal{M}$ definujeme binární relaci $\longrightarrow^*$ jako reflexivní a tranzitivní uzávěr relace $\longrightarrow$, tj.,

$$(q, w, \alpha) \longrightarrow^* (q', w', \alpha')$$

jestliže existuje posloupnost konfigurací

$$(q_0, w_0, \alpha_0), (q_1, w_1, \alpha_1), \ldots, (q_n, w_n, \alpha_n)$$

taková, že

  - $(q, w, \alpha) = (q_0, w_0, \alpha_0)$,
  - $(q', w', \alpha') = (q_n, w_n, \alpha_n)$,
  - $(q_i, w_i, \alpha_i) \longrightarrow (q_{i+1}, w_{i+1}, \alpha_{i+1})$ pro každé $i = 0, 1, \ldots, n-1$, tj.

$$(q_0, w_0, \alpha_0) \longrightarrow (q_1, w_1, \alpha_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (q_n, w_n, \alpha_n)$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{array}{ll}
q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\
q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\
q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\
q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\
q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\
q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\
q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$(q_1,\ abbababababba,\ X)$

$$
\begin{array}{ll}
q_1 X \xrightarrow{a} q_1 AX & q_1 X \xrightarrow{b} q_1 BX \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_1 AA & q_1 A \xrightarrow{b} q_1 BA \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_1 AB & q_1 B \xrightarrow{b} q_1 BB \\
q_1 X \xrightarrow{a} q_2 X & q_1 X \xrightarrow{b} q_2 X \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_2 A & q_1 A \xrightarrow{b} q_2 A \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_2 B & q_1 B \xrightarrow{b} q_2 B \\
q_1 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 X & \\
q_1 A \xrightarrow{\varepsilon} q_2 A & \\
q_1 B \xrightarrow{\varepsilon} q_2 B & \\
q_2 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2 A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2 B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$(q_1,\ abbababababba,\ X)$
$\longrightarrow\ (q_1,\ bbababababba,\ AX)$

$$
\begin{array}{ll}
q_1 X \xrightarrow{a} q_1 AX & q_1 X \xrightarrow{b} q_1 BX \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_1 AA & q_1 A \xrightarrow{b} q_1 BA \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_1 AB & q_1 B \xrightarrow{b} q_1 BB \\
q_1 X \xrightarrow{a} q_2 X & q_1 X \xrightarrow{b} q_2 X \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_2 A & q_1 A \xrightarrow{b} q_2 A \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_2 B & q_1 B \xrightarrow{b} q_2 B \\
q_1 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 X & \\
q_1 A \xrightarrow{\varepsilon} q_2 A & \\
q_1 B \xrightarrow{\varepsilon} q_2 B & \\
q_2 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2 A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2 B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{aligned}
&(q_1,\ abbababababba,\ X) \\
&\longrightarrow\ (q_1,\ bbababababba,\ AX) \\
&\longrightarrow\ (q_1,\ bababababba,\ BAX)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\
q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\
q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\
q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\
q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\
q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\
q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{aligned}
& (q_1,\ abbababababba,\ X) \\
\longrightarrow\ & (q_1,\ bbababababba,\ AX) \\
\longrightarrow\ & (q_1,\ babababba,\ BAX) \\
\longrightarrow\ & (q_1,\ abababba,\ BBAX)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\
q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\
q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\
q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\
q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\
q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\
q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{array}{l}
(q_1,\ abbababababba,\ X) \\
\longrightarrow\ (q_1,\ bbababababba,\ AX) \\
\longrightarrow\ (q_1,\ babababba,\ BAX) \\
\longrightarrow\ (q_1,\ abababba,\ BBAX) \\
\longrightarrow\ (q_1,\ bababba,\ ABBAX)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\
q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\
q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\
q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\
q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\
q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\
q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{aligned}
&(q_1,\ abbabababba,\ X)\\
&\longrightarrow\ (q_1,\ bbabababba,\ AX)\\
&\longrightarrow\ (q_1,\ babababba,\ BAX)\\
&\longrightarrow\ (q_1,\ abababba,\ BBAX)\\
&\longrightarrow\ (q_1,\ bababba,\ ABBAX)\\
&\longrightarrow\ (q_1,\ ababba,\ BABBAX)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\
q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\
q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\
q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\
q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\
q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\
q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{array}{l}
(q_1,\ abbabababba,\ X) \\
\longrightarrow\ (q_1,\ bbabababba,\ AX) \\
\longrightarrow\ (q_1,\ babababba,\ BAX) \\
\longrightarrow\ (q_1,\ ababbabba,\ BBAX) \\
\longrightarrow\ (q_1,\ bababba,\ ABBAX) \\
\longrightarrow\ (q_1,\ ababba,\ BABBAX) \\
\longrightarrow\ (q_2,\ babba,\ BABBAX)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\
q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\
q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\
q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\
q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\
q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\
q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{array}{ll}
 & (q_1,\ abbabababba,\ X) \\
\longrightarrow & (q_1,\ bbabababba,\ AX) \\
\longrightarrow & (q_1,\ babababba,\ BAX) \\
\longrightarrow & (q_1,\ abababba,\ BBAX) \\
\longrightarrow & (q_1,\ bababba,\ ABBAX) \\
\longrightarrow & (q_1,\ ababba,\ BABBAX) \\
\longrightarrow & (q_2,\ babba,\ BABBAX) \\
\longrightarrow & (q_2,\ abba,\ ABBAX)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\
q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\
q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\
q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\
q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\
q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\
q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{aligned}
& (q_1,\ abbabababba,\ X) \\
\longrightarrow\ & (q_1,\ bbabababba,\ AX) \\
\longrightarrow\ & (q_1,\ babababba,\ BAX) \\
\longrightarrow\ & (q_1,\ abababba,\ BBAX) \\
\longrightarrow\ & (q_1,\ bababba,\ ABBAX) \\
\longrightarrow\ & (q_1,\ ababba,\ BABBAX) \\
\longrightarrow\ & (q_2,\ babba,\ BABBAX) \\
\longrightarrow\ & (q_2,\ abba,\ ABBAX) \\
\longrightarrow\ & (q_2,\ bba,\ BBAX)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\
q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\
q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\
q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\
q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\
q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\
q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{aligned}
& (q_1,\ abbababababba,\ X) \\
\longrightarrow\ & (q_1,\ bbababababba,\ AX) \\
\longrightarrow\ & (q_1,\ babababba,\ BAX) \\
\longrightarrow\ & (q_1,\ abababba,\ BBAX) \\
\longrightarrow\ & (q_1,\ bababba,\ ABBAX) \\
\longrightarrow\ & (q_1,\ ababba,\ BABBAX) \\
\longrightarrow\ & (q_2,\ babba,\ BABBAX) \\
\longrightarrow\ & (q_2,\ abba,\ ABBAX) \\
\longrightarrow\ & (q_2,\ bba,\ BBAX) \\
\longrightarrow\ & (q_2,\ ba,\ BAX)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\
q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\
q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\
q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\
q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\
q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\
q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{array}{l}
(q_1,\ abbabababba,\ X) \\
\longrightarrow\ (q_1,\ bbabababba,\ AX) \\
\longrightarrow\ (q_1,\ babababba,\ BAX) \\
\longrightarrow\ (q_1,\ ababbabba,\ BBAX) \\
\longrightarrow\ (q_1,\ bababba,\ ABBAX) \\
\longrightarrow\ (q_1,\ ababba,\ BABBAX) \\
\longrightarrow\ (q_2,\ babba,\ BABBAX) \\
\longrightarrow\ (q_2,\ abba,\ ABBAX) \\
\longrightarrow\ (q_2,\ bba,\ BBAX) \\
\longrightarrow\ (q_2,\ ba,\ BAX) \\
\longrightarrow\ (q_2,\ a,\ AX)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1 X \xrightarrow{a} q_1 AX & q_1 X \xrightarrow{b} q_1 BX \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_1 AA & q_1 A \xrightarrow{b} q_1 BA \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_1 AB & q_1 B \xrightarrow{b} q_1 BB \\
q_1 X \xrightarrow{a} q_2 X & q_1 X \xrightarrow{b} q_2 X \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_2 A & q_1 A \xrightarrow{b} q_2 A \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_2 B & q_1 B \xrightarrow{b} q_2 B \\
q_1 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 X & \\
q_1 A \xrightarrow{\varepsilon} q_2 A & \\
q_1 B \xrightarrow{\varepsilon} q_2 B & \\
q_2 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2 A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2 B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{array}{ll}
& (q_1,\ abbababababba,\ X) \\
\longrightarrow & (q_1,\ bbababababba,\ AX) \\
\longrightarrow & (q_1,\ bababababba,\ BAX) \\
\longrightarrow & (q_1,\ ababababba,\ BBAX) \\
\longrightarrow & (q_1,\ bababba,\ ABBAX) \\
\longrightarrow & (q_1,\ ababba,\ BABBAX) \\
\longrightarrow & (q_2,\ babba,\ BABBAX) \\
\longrightarrow & (q_2,\ abba,\ ABBAX) \\
\longrightarrow & (q_2,\ bba,\ BBAX) \\
\longrightarrow & (q_2,\ ba,\ BAX) \\
\longrightarrow & (q_2,\ a,\ AX) \\
\longrightarrow & (q_2,\ \varepsilon,\ X)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\
q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\
q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\
q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\
q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\
q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\
q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{array}{ll}
& (q_1,\ abbababababba,\ X) \\
\longrightarrow & (q_1,\ bbababababba,\ AX) \\
\longrightarrow & (q_1,\ babababba,\ BAX) \\
\longrightarrow & (q_1,\ abababba,\ BBAX) \\
\longrightarrow & (q_1,\ bababba,\ ABBAX) \\
\longrightarrow & (q_1,\ ababba,\ BABBAX) \\
\longrightarrow & (q_2,\ babba,\ BABBAX) \\
\longrightarrow & (q_2,\ abba,\ ABBAX) \\
\longrightarrow & (q_2,\ bba,\ BBAX) \\
\longrightarrow & (q_2,\ ba,\ BAX) \\
\longrightarrow & (q_2,\ a,\ AX) \\
\longrightarrow & (q_2,\ \varepsilon,\ X) \\
\longrightarrow & (q_2,\ \varepsilon,\ \varepsilon)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\
q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\
q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\
q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\
q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\
q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\
q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

V předchozí definici byla množina konfigurací definována jako

$$Conf = Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

a relace $\longrightarrow$ byla podmnožinou množiny $Conf \times Conf$.

Výpočet zásobníkového automatu

Alternativně bychom mohli definovat konfigurace tak, že by nezahrnovaly vstupní slovo:

$$Conf \; = \; Q \times \Gamma^*$$

Relaci $\longrightarrow$ bychom pak definovali jako podmnožinu množiny $Conf \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Conf$, přičemž zápis

$$q\alpha \xrightarrow{a} q'\alpha'$$

by označoval, že přečtením symbolu a (nebo nepřečtením ničeho, pokud $a = \varepsilon$) může přejít daný zásobníkový automat z konfigurace (q, α) do konfigurace (q', α'), tj.

$$qX\beta \xrightarrow{a} q'\gamma\beta \quad \Longleftrightarrow \quad (q', \gamma) \in \delta(q, a, X)$$

kde $q, q' \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X \in \Gamma$ a $\beta, \gamma \in \Gamma^*$.

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{array}{ll}
q_1 X \xrightarrow{a} q_1 AX & q_1 X \xrightarrow{b} q_1 BX \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_1 AA & q_1 A \xrightarrow{b} q_1 BA \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_1 AB & q_1 B \xrightarrow{b} q_1 BB \\
q_1 X \xrightarrow{a} q_2 X & q_1 X \xrightarrow{b} q_2 X \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_2 A & q_1 A \xrightarrow{b} q_2 A \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_2 B & q_1 B \xrightarrow{b} q_2 B \\
q_1 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 X & \\
q_1 A \xrightarrow{\varepsilon} q_2 A & \\
q_1 B \xrightarrow{\varepsilon} q_2 B & \\
q_2 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2 A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2 B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$q_1 X$

$$
\begin{array}{ll}
q_1 X \xrightarrow{a} q_1 AX & q_1 X \xrightarrow{b} q_1 BX \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_1 AA & q_1 A \xrightarrow{b} q_1 BA \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_1 AB & q_1 B \xrightarrow{b} q_1 BB \\
q_1 X \xrightarrow{a} q_2 X & q_1 X \xrightarrow{b} q_2 X \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_2 A & q_1 A \xrightarrow{b} q_2 A \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_2 B & q_1 B \xrightarrow{b} q_2 B \\
q_1 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 X & \\
q_1 A \xrightarrow{\varepsilon} q_2 A & \\
q_1 B \xrightarrow{\varepsilon} q_2 B & \\
q_2 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2 A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2 B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$q_1 X \xrightarrow{a} q_1 AX$$

$$\begin{array}{ll}
q_1 X \xrightarrow{a} q_1 AX & q_1 X \xrightarrow{b} q_1 BX \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_1 AA & q_1 A \xrightarrow{b} q_1 BA \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_1 AB & q_1 B \xrightarrow{b} q_1 BB \\
q_1 X \xrightarrow{a} q_2 X & q_1 X \xrightarrow{b} q_2 X \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_2 A & q_1 A \xrightarrow{b} q_2 A \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_2 B & q_1 B \xrightarrow{b} q_2 B \\
q_1 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 X & \\
q_1 A \xrightarrow{\varepsilon} q_2 A & \\
q_1 B \xrightarrow{\varepsilon} q_2 B & \\
q_2 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2 A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2 B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$q_1 X \xrightarrow{a} q_1 AX$$
$$\xrightarrow{b} q_1 BAX$$

$$\begin{array}{ll}
q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\
q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\
q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\
q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\
q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\
q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\
q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{aligned}
q_1X &\xrightarrow{a} q_1AX \\
&\xrightarrow{b} q_1BAX \\
&\xrightarrow{b} q_1BBAX
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\
q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\
q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\
q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\
q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\
q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\
q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$\begin{aligned} q_1 X &\xrightarrow{a} q_1 AX \\ &\xrightarrow{b} q_1 BAX \\ &\xrightarrow{b} q_1 BBAX \\ &\xrightarrow{a} q_1 ABBAX \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
q_1 X \xrightarrow{a} q_1 AX & q_1 X \xrightarrow{b} q_1 BX \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_1 AA & q_1 A \xrightarrow{b} q_1 BA \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_1 AB & q_1 B \xrightarrow{b} q_1 BB \\
q_1 X \xrightarrow{a} q_2 X & q_1 X \xrightarrow{b} q_2 X \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_2 A & q_1 A \xrightarrow{b} q_2 A \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_2 B & q_1 B \xrightarrow{b} q_2 B \\
q_1 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 X & \\
q_1 A \xrightarrow{\varepsilon} q_2 A & \\
q_1 B \xrightarrow{\varepsilon} q_2 B & \\
q_2 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2 A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2 B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{aligned}
q_1X &\xrightarrow{a} q_1AX \\
&\xrightarrow{b} q_1BAX \\
&\xrightarrow{b} q_1BBAX \\
&\xrightarrow{a} q_1ABBAX \\
&\xrightarrow{b} q_1BABBAX
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\
q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\
q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\
q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\
q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\
q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\
q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{aligned}
q_1 X &\xrightarrow{a} q_1 AX \\
&\xrightarrow{b} q_1 BAX \\
&\xrightarrow{b} q_1 BBAX \\
&\xrightarrow{a} q_1 ABBAX \\
&\xrightarrow{b} q_1 BABBAX \\
&\xrightarrow{a} q_2 BABBAX
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1 X \xrightarrow{a} q_1 AX & q_1 X \xrightarrow{b} q_1 BX \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_1 AA & q_1 A \xrightarrow{b} q_1 BA \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_1 AB & q_1 B \xrightarrow{b} q_1 BB \\
q_1 X \xrightarrow{a} q_2 X & q_1 X \xrightarrow{b} q_2 X \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_2 A & q_1 A \xrightarrow{b} q_2 A \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_2 B & q_1 B \xrightarrow{b} q_2 B \\
q_1 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 X & \\
q_1 A \xrightarrow{\varepsilon} q_2 A & \\
q_1 B \xrightarrow{\varepsilon} q_2 B & \\
q_2 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2 A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2 B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{aligned}
q_1 X &\xrightarrow{a} q_1 AX \\
&\xrightarrow{b} q_1 BAX \\
&\xrightarrow{b} q_1 BBAX \\
&\xrightarrow{a} q_1 ABBAX \\
&\xrightarrow{b} q_1 BABBAX \\
&\xrightarrow{a} q_2 BABBAX \\
&\xrightarrow{b} q_2 ABBAX
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1 X \xrightarrow{a} q_1 AX & q_1 X \xrightarrow{b} q_1 BX \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_1 AA & q_1 A \xrightarrow{b} q_1 BA \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_1 AB & q_1 B \xrightarrow{b} q_1 BB \\
q_1 X \xrightarrow{a} q_2 X & q_1 X \xrightarrow{b} q_2 X \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_2 A & q_1 A \xrightarrow{b} q_2 A \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_2 B & q_1 B \xrightarrow{b} q_2 B \\
q_1 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 X & \\
q_1 A \xrightarrow{\varepsilon} q_2 A & \\
q_1 B \xrightarrow{\varepsilon} q_2 B & \\
q_2 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2 A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2 B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{aligned}
q_1 X &\xrightarrow{a} q_1 AX \\
&\xrightarrow{b} q_1 BAX \\
&\xrightarrow{b} q_1 BBAX \\
&\xrightarrow{a} q_1 ABBAX \\
&\xrightarrow{b} q_1 BABBAX \\
&\xrightarrow{a} q_2 BABBAX \\
&\xrightarrow{b} q_2 ABBAX \\
&\xrightarrow{a} q_2 BBAX
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1 X \xrightarrow{a} q_1 AX & q_1 X \xrightarrow{b} q_1 BX \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_1 AA & q_1 A \xrightarrow{b} q_1 BA \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_1 AB & q_1 B \xrightarrow{b} q_1 BB \\
q_1 X \xrightarrow{a} q_2 X & q_1 X \xrightarrow{b} q_2 X \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_2 A & q_1 A \xrightarrow{b} q_2 A \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_2 B & q_1 B \xrightarrow{b} q_2 B \\
q_1 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 X & \\
q_1 A \xrightarrow{\varepsilon} q_2 A & \\
q_1 B \xrightarrow{\varepsilon} q_2 B & \\
q_2 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2 A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2 B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{aligned}
q_1 X &\xrightarrow{a} q_1 AX \\
&\xrightarrow{b} q_1 BAX \\
&\xrightarrow{b} q_1 BBAX \\
&\xrightarrow{a} q_1 ABBAX \\
&\xrightarrow{b} q_1 BABBAX \\
&\xrightarrow{a} q_2 BABBAX \\
&\xrightarrow{b} q_2 ABBAX \\
&\xrightarrow{a} q_2 BBAX \\
&\xrightarrow{b} q_2 BAX
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1 X \xrightarrow{a} q_1 AX & q_1 X \xrightarrow{b} q_1 BX \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_1 AA & q_1 A \xrightarrow{b} q_1 BA \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_1 AB & q_1 B \xrightarrow{b} q_1 BB \\
q_1 X \xrightarrow{a} q_2 X & q_1 X \xrightarrow{b} q_2 X \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_2 A & q_1 A \xrightarrow{b} q_2 A \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_2 B & q_1 B \xrightarrow{b} q_2 B \\
q_1 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 X & \\
q_1 A \xrightarrow{\varepsilon} q_2 A & \\
q_1 B \xrightarrow{\varepsilon} q_2 B & \\
q_2 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2 A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2 B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$\begin{aligned} q_1X &\xrightarrow{a} q_1AX \\ &\xrightarrow{b} q_1BAX \\ &\xrightarrow{b} q_1BBAX \\ &\xrightarrow{a} q_1ABBAX \\ &\xrightarrow{b} q_1BABBAX \\ &\xrightarrow{a} q_2BABBAX \\ &\xrightarrow{b} q_2ABBAX \\ &\xrightarrow{a} q_2BBAX \\ &\xrightarrow{b} q_2BAX \\ &\xrightarrow{b} q_2AX \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\ q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\ q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\ q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\ q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\ q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\ q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\ q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\ q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\ q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\ q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\ q_2B \xrightarrow{b} q_2 & \end{array}$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{aligned}
q_1 X &\xrightarrow{a} q_1 AX \\
&\xrightarrow{b} q_1 BAX \\
&\xrightarrow{b} q_1 BBAX \\
&\xrightarrow{a} q_1 ABBAX \\
&\xrightarrow{b} q_1 BABBAX \\
&\xrightarrow{a} q_2 BABBAX \\
&\xrightarrow{b} q_2 ABBAX \\
&\xrightarrow{a} q_2 BBAX \\
&\xrightarrow{b} q_2 BAX \\
&\xrightarrow{b} q_2 AX \\
&\xrightarrow{a} q_2 X
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1 X \xrightarrow{a} q_1 AX & q_1 X \xrightarrow{b} q_1 BX \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_1 AA & q_1 A \xrightarrow{b} q_1 BA \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_1 AB & q_1 B \xrightarrow{b} q_1 BB \\
q_1 X \xrightarrow{a} q_2 X & q_1 X \xrightarrow{b} q_2 X \\
q_1 A \xrightarrow{a} q_2 A & q_1 A \xrightarrow{b} q_2 A \\
q_1 B \xrightarrow{a} q_2 B & q_1 B \xrightarrow{b} q_2 B \\
q_1 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 X & \\
q_1 A \xrightarrow{\varepsilon} q_2 A & \\
q_1 B \xrightarrow{\varepsilon} q_2 B & \\
q_2 X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2 A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2 B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Výpočet zásobníkového automatu

Příklad: $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, X)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$

$$
\begin{aligned}
q_1X &\xrightarrow{a} q_1AX \\
&\xrightarrow{b} q_1BAX \\
&\xrightarrow{b} q_1BBAX \\
&\xrightarrow{a} q_1ABBAX \\
&\xrightarrow{b} q_1BABBAX \\
&\xrightarrow{a} q_2BABBAX \\
&\xrightarrow{b} q_2ABBAX \\
&\xrightarrow{a} q_2BBAX \\
&\xrightarrow{b} q_2BAX \\
&\xrightarrow{b} q_2AX \\
&\xrightarrow{a} q_2X \\
&\xrightarrow{\varepsilon} q_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q_1X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1X \xrightarrow{b} q_1BX \\
q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA \\
q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_2A \\
q_1B \xrightarrow{a} q_2B & q_1B \xrightarrow{b} q_2B \\
q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_2A & \\
q_1B \xrightarrow{\varepsilon} q_2B & \\
q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2 & \\
q_2B \xrightarrow{b} q_2 &
\end{array}
$$

Zásobníkový automat — přijímání slov

Používají se dvě různé definice toho, kdy automat přijímá dané slovo:

- Jestliže zásobníkový automat $\mathcal{M}$ přijímá **prázdným zásobníkem**, příjme slovo w tehdy, jestliže existuje výpočet automatu $\mathcal{M}$ nad slovem w takový, že automat přečte celé slovo w a po jeho přečtení má prázdný zásobník.

- Jestliže zásobníkový automat $\mathcal{M}$ přijímá pomocí **přijímajících stavů**, příjme slovo w tehdy, jestliže existuje výpočet automatu $\mathcal{M}$ nad slovem w takový, že automat přečte celé slovo w a po jeho přečtení je řídící jednotka automatu $\mathcal{M}$ v některém z přijímajících stavů z množiny F.

Zásobníkový automat — přijímání slov

- Slovo $w \in \Sigma^*$ je **přijímáno** ZA $\mathcal{M}$ **prázdným zásobníkem** právě tehdy, když
$$(q_0, w, X_0) \longrightarrow^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$
pro nějaké $q \in Q$.

Definice

Jazyk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ přijímaný ZA $\mathcal{M}$ **prázdným zásobníkem** je definován jako množina všech slov přijímaných ZA $\mathcal{M}$ prázdným zásobníkem, tj.

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \{\, w \in \Sigma^* \mid (\exists q \in Q)((q_0, w, X_0) \longrightarrow^* (q, \varepsilon, \varepsilon)) \,\}\,.$$

Zásobníkový automat — přijímání slov

Rozšiřme definici ZA $\mathcal{M}$ o množinu **přijímajících stavů** F (kde $F \subseteq Q$).

- Slovo $w \in \Sigma^*$ je **přijímáno** ZA $\mathcal{M}$ **přijímajícím stavem** právě tehdy, když
$$(q_0, w, X_0) \longrightarrow^* (q, \varepsilon, \alpha)$$
pro nějaké $q \in F$ a $\alpha \in \Gamma^*$.

Definice

Jazyk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ **přijímaný** ZA $\mathcal{M}$ **přijímajícím stavem** je definován jako

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \{\, w \in \Sigma^* \mid (\exists q \in F)(\exists \alpha \in \Gamma^*)((q_0, w, X_0) \longrightarrow^* (q, \varepsilon, \alpha)) \,\} \,.$$

Druhy zásobníkových automatů

V případě **nedeterministických** zásobníkových automatů není z hlediska jazyků, jaké jsou schopny tyto automaty rozpoznávat, rozdíl mezi rozpoznáváním prázdným zásobníkem a rozpoznáváním přijímajícím stavem.

Snadno sestrojíme:

- K danému (nedeterministickému) zásobníkovému automatu rozpoznávajícímu nějaký jazyk L prázdným zásobníkem ekvivalentní (nedeterministický) zásobníkový automat rozpoznávající jazyk L pomocí přijímajících stavů.

- K danému (nedeterministickému) zásobníkovému automatu rozpoznávajícímu nějaký jazyk L pomocí přijímajících stavů ekvivalentní (nedeterministický) zásobníkový automat rozpoznávající jazyk L prázdným zásobníkem.

Deterministické zásobníkové automaty

Zásobníkový automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, X_0)$ je **deterministický**, jestliže:

- Pro každé $q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$ a $X \in \Gamma$ platí:
$$|\delta(q, a, X)| \leq 1$$
- Pro každé $q \in Q$ a $X \in \Gamma$ platí nejvýše jedna z následujících dvou možností:
  - Existuje pravidlo $qX \xrightarrow{\varepsilon} q'\alpha$ pro nějaké $q' \in Q$ a $\alpha \in \Gamma^*$.
  - Existuje pravidlo $qX \xrightarrow{a} q'\alpha$ pro nějaké $a \in \Sigma$, $q' \in Q$ a $\alpha \in \Gamma^*$.

Deterministické zásobníkové automaty

Všimněme si, že **deterministické** zásobníkové automaty přijímající prázdným zásobníkem jsou schopny rozpoznávat jen **bezprefixové** jazyky, tj. jazyky L, kde:

- pokud $w \in L$, pak neexistuje žádné slovo $w' \in L$ takové, že w je vlastním prefixem slova w'.

Poznámka: Místo jazyka $L \subseteq \Sigma^*$, který může a nemusí být bezprefixový, můžeme vzít bezprefixový jazyk

$$L' = L \cdot \{\dashv\}$$

nad abecedou $\Sigma \cup \{\dashv\}$, kde $\dashv \notin \Sigma$ je speciální „zarážka“ označující konec slova.
Tj. místo zjišťování, zda $w \in L$, kde $w \in \Sigma^*$, můžeme zjišťovat, zda $(w \dashv) \in L'$.

Deterministické zásobníkové automaty

- Ke každému deterministickému zásobníkovému automatu přijímajícímu prázdným zásobníkem je možné snadno sestrojit ekvivalentní deterministický zásobníkový automat přijímající pomocí přijímajících stavů.

- Ke každému deterministickému zásobníkovému automatu přijímajícímu jazyk L (kde $L \subseteq \Sigma^*$) pomocí přijímajících stavů je možné snadno sestrojit deterministický zásobníkový automat přimající prázdným zásobníkem jazyk $L \cdot \{\dashv\}$, kde $\dashv \notin \Sigma$.

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

Věta

Ke každé bezkontextové gramatice $\mathcal{G}$ lze sestrojit nedeterministický zásobníkový automat $\mathcal{M}$ přijímající prázdným zásobníkem takový, že $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Důkaz: Pro BG $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, S, P)$ vytvoříme $\mathcal{M} = (\{q_0\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, S)$, kde

- $\Gamma = \Pi \cup \Sigma$
- Pro každé pravidlo $(X \to \alpha) \in P$ z bezkontextové gramatiky $\mathcal{G}$ (kde $X \in \Pi$ a $\alpha \in (\Pi \cup \Sigma)^*$) přidáme do přechodové funkce δ zásobníkového automatu $\mathcal{M}$ odpovídající pravidlo
$$q_0 X \xrightarrow{\varepsilon} q_0 \alpha \,.$$
- Pro každý symbol $a \in \Sigma$ přidáme do přechodové funkce δ zásobníkového automatu $\mathcal{M}$ pravidlo
$$q_0 a \xrightarrow{a} q_0 \,.$$

Příklad: Uvažujme bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, S, P)$, kde

- $\Pi = \{S, E, T, F\}$
- $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{+}, \mathtt{*}, \mathtt{(}, \mathtt{)}, \dashv\}$
- Množina P obsahuje následující pravidla:

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow E \dashv \\
E &\rightarrow T \mid E\mathtt{+}T \\
T &\rightarrow F \mid T\mathtt{*}F \\
F &\rightarrow \mathtt{a} \mid \mathtt{(}E\mathtt{)}
\end{aligned}
$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

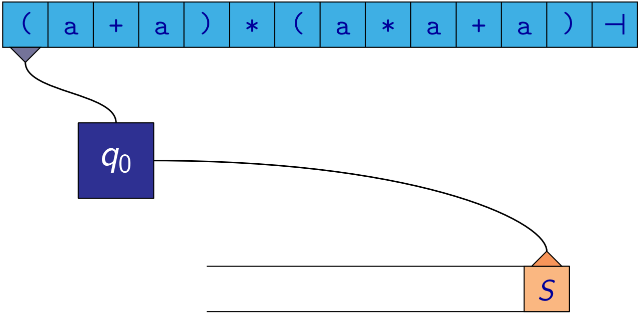
K dané gramatice $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, S, P)$ s pravidly

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow E \dashv \\
E &\rightarrow T \mid E\mathtt{+}T \\
T &\rightarrow F \mid T\mathtt{*}F \\
F &\rightarrow \mathtt{a} \mid \mathtt{(}E\mathtt{)}
\end{aligned}
$$

sestrojíme zásobníkový automat $\mathcal{M} = (\{q_0\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, S)$, kde

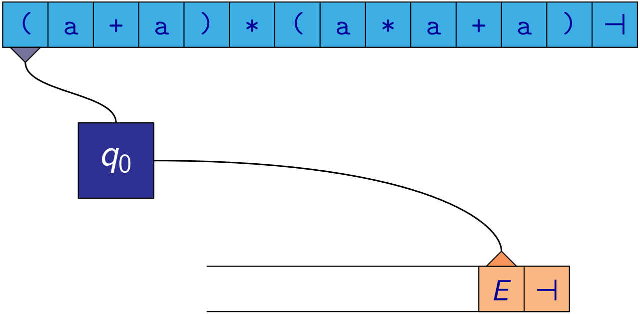
- $\Sigma = \{\, \mathtt{a}, \mathtt{+}, \mathtt{*}, \mathtt{(}, \mathtt{)}, \dashv \,\}$
- $\Gamma = \{\, S, E, T, F, \mathtt{a}, \mathtt{+}, \mathtt{*}, \mathtt{(}, \mathtt{)}, \dashv \,\}$
- Přechodová funkce δ obsahuje následující pravidla:

$$
\begin{array}{llll}
q_0 S \xrightarrow{\varepsilon} q_0 E \dashv & q_0 F \xrightarrow{\varepsilon} q_0 \mathtt{a} & q_0 \mathtt{a} \xrightarrow{\mathtt{a}} q_0 & q_0 \mathtt{(} \xrightarrow{\mathtt{(}} q_0 \\
q_0 E \xrightarrow{\varepsilon} q_0 T & q_0 F \xrightarrow{\varepsilon} q_0 \mathtt{(}E\mathtt{)} & q_0 \mathtt{+} \xrightarrow{\mathtt{+}} q_0 & q_0 \mathtt{)} \xrightarrow{\mathtt{)}} q_0 \\
q_0 E \xrightarrow{\varepsilon} q_0 E\mathtt{+}T & & q_0 \mathtt{*} \xrightarrow{\mathtt{*}} q_0 & q_0 \dashv \xrightarrow{\dashv} q_0 \\
q_0 T \xrightarrow{\varepsilon} q_0 F & & & \\
q_0 T \xrightarrow{\varepsilon} q_0 T\mathtt{*}F & & &
\end{array}
$$

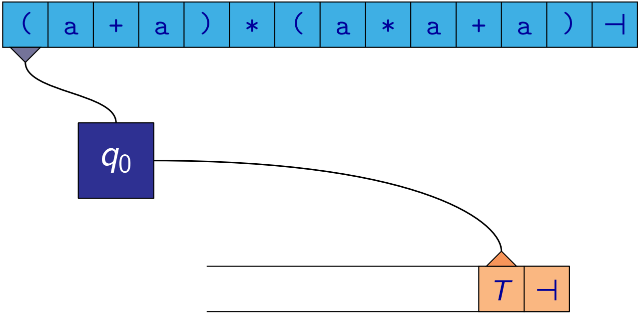


$\underline{S}$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

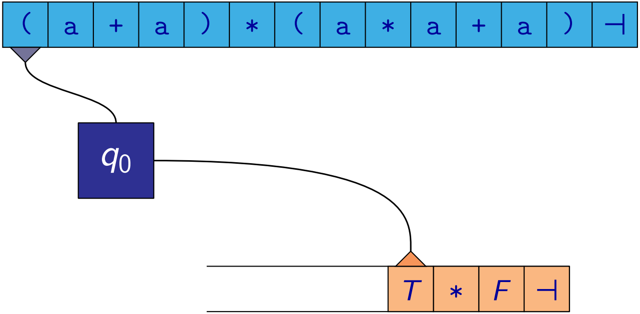


$\underline{S} \Rightarrow \underline{E}\dashv$



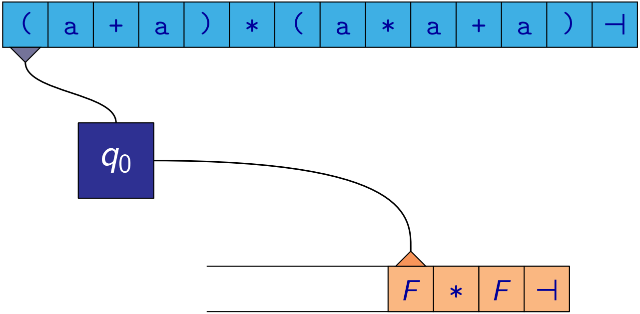
$$\underline{S} \Rightarrow \underline{E}\dashv \Rightarrow \underline{T}\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



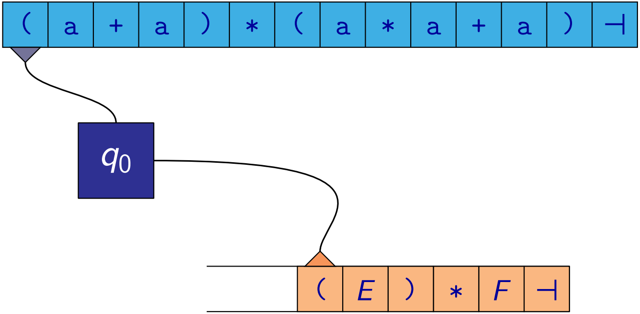
$\underline{S} \Rightarrow \underline{E}\dashv \Rightarrow \underline{T}\dashv \Rightarrow \underline{T}*F\dashv$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



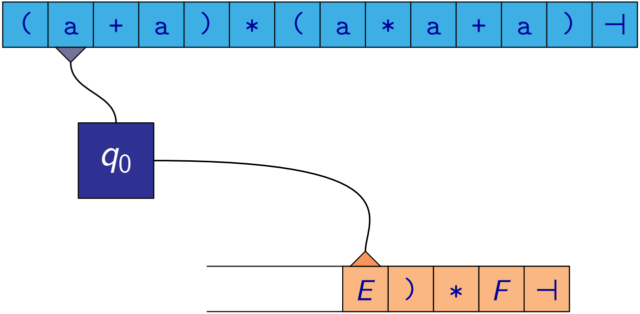
$\underline{S} \Rightarrow \underline{E}\dashv \Rightarrow \underline{T}\dashv \Rightarrow \underline{T}*F\dashv \Rightarrow \underline{F}*F\dashv$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



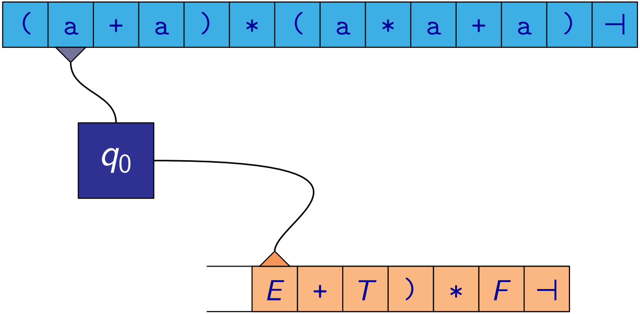
$$\underline{S} \Rightarrow \underline{E}\dashv \Rightarrow \underline{T}\dashv \Rightarrow \underline{T}*F\dashv \Rightarrow \underline{F}*F\dashv \Rightarrow (\underline{E})*F\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



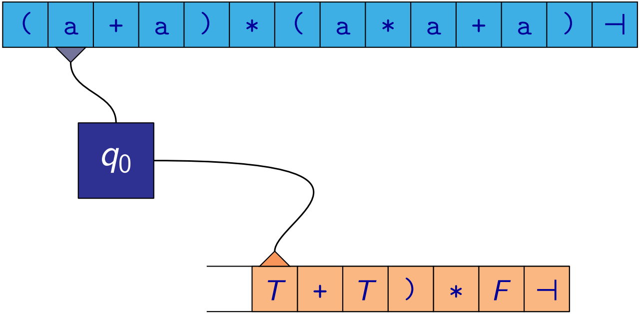
$$\underline{S} \Rightarrow \underline{E}\dashv \Rightarrow \underline{T}\dashv \Rightarrow \underline{T}*F\dashv \Rightarrow \underline{F}*F\dashv \Rightarrow (\underline{E})*F\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



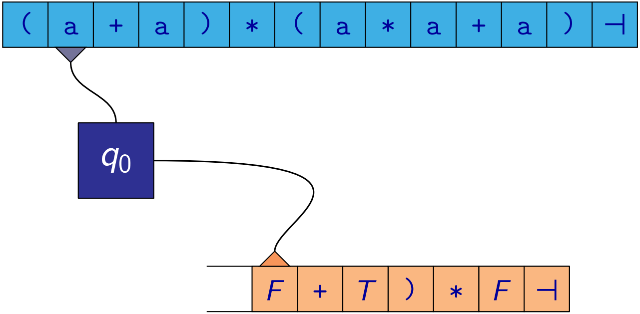
$$\cdots \Rightarrow \underline{T}\dashv \Rightarrow \underline{T}*F\dashv \Rightarrow \underline{F}*F\dashv \Rightarrow (\underline{E})*F\dashv \Rightarrow (\underline{E}+T)*F\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



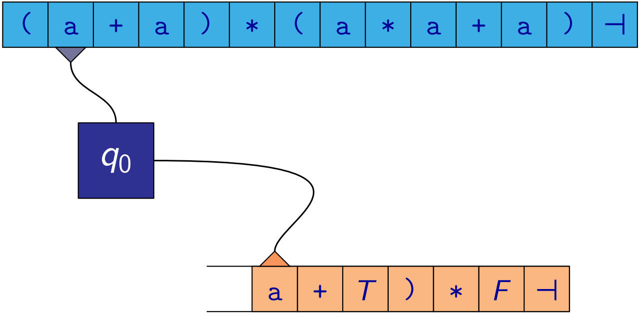
$$\cdots \Rightarrow \underline{F}*F\dashv \Rightarrow (\underline{E})*F\dashv \Rightarrow (\underline{E}+T)*F\dashv \Rightarrow (\underline{T}+T)*F\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



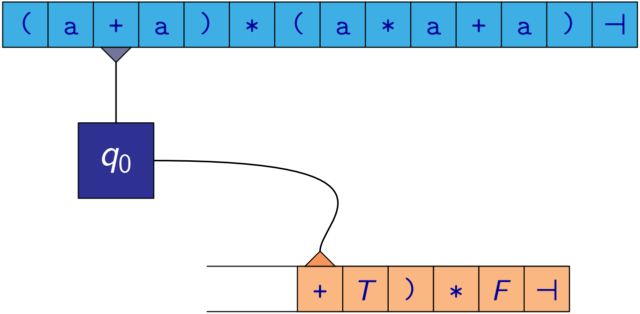
$$\cdots \Rightarrow (\underline{E}){*}F\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{E}{+}T){*}F\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{T}{+}T){*}F\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{F}{+}T){*}F\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



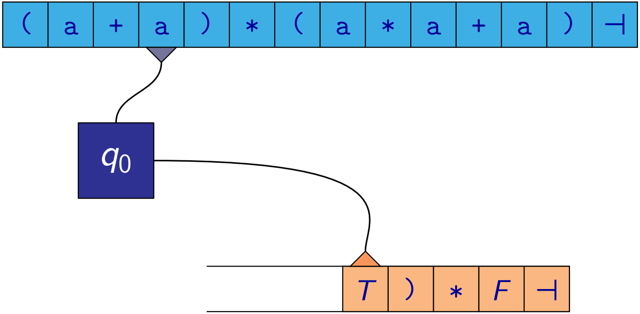
$$\cdots \Rightarrow (\underline{E}+T)*F\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{T}+T)*F\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{F}+T)*F\dashv \;\Rightarrow\; (\mathrm{a}+\underline{T})*F\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



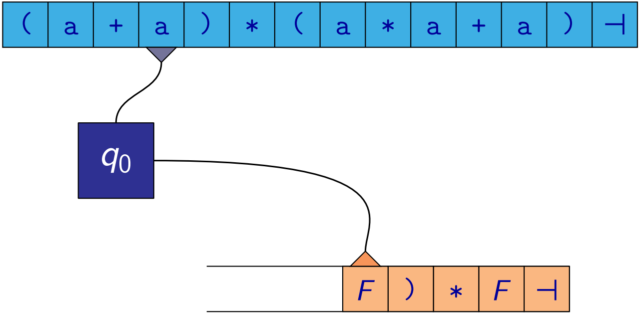
$$\cdots \Rightarrow (\underline{E}+T)*F\dashv \Rightarrow (\underline{T}+T)*F\dashv \Rightarrow (\underline{F}+T)*F\dashv \Rightarrow (\mathtt{a}+\underline{T})*F\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



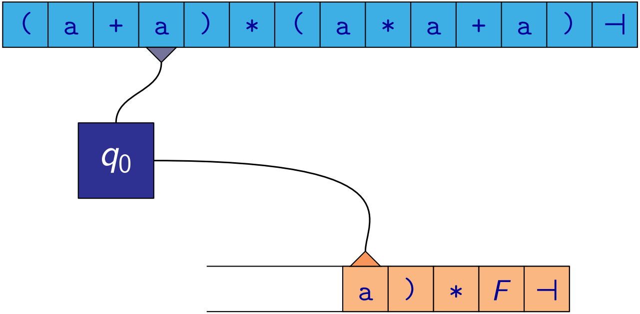
$$\cdots \Rightarrow (\underline{E}+T)*F\dashv \Rightarrow (\underline{T}+T)*F\dashv \Rightarrow (\underline{F}+T)*F\dashv \Rightarrow (\mathtt{a}+\underline{T})*F\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



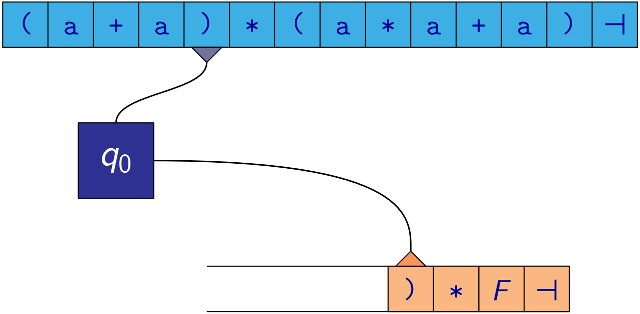
$$\cdots \Rightarrow (\underline{T}+T)*F\dashv \Rightarrow (\underline{F}+T)*F\dashv \Rightarrow (\mathtt{a}+\underline{T})*F\dashv \Rightarrow (\mathtt{a}+\underline{F})*F\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

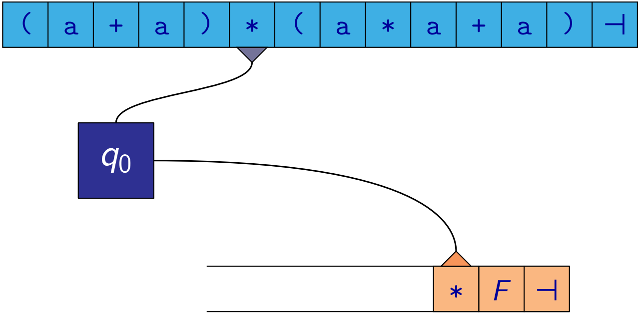


$$\cdots \Rightarrow (\underline{F}+T)*F\dashv \;\Rightarrow\; (\mathrm{a}+\underline{T})*F\dashv \;\Rightarrow\; (\mathrm{a}+\underline{F})*F\dashv \;\Rightarrow\; (\mathrm{a}+\mathrm{a})*\underline{F}\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

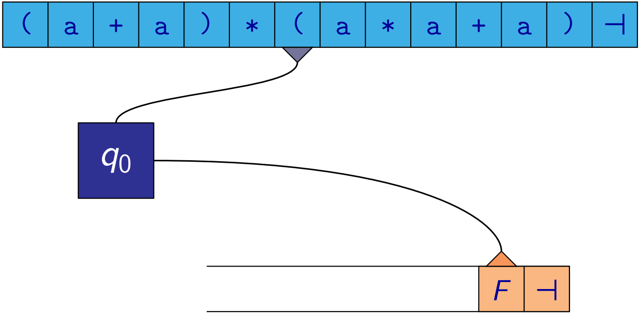


$$\cdots \Rightarrow (\underline{F}+T)*F\dashv \Rightarrow (\mathrm{a}+\underline{T})*F\dashv \Rightarrow (\mathrm{a}+\underline{F})*F\dashv \Rightarrow (\mathrm{a}+\mathrm{a})*\underline{F}\dashv$$



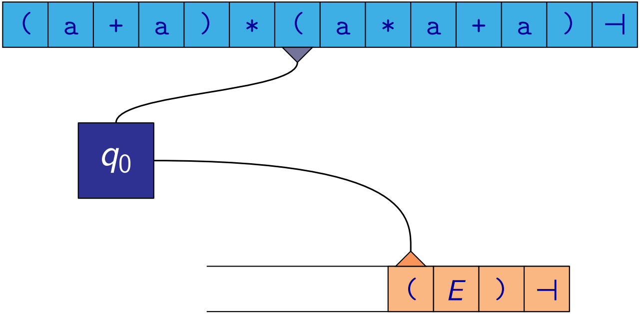
$$\cdots \Rightarrow (\underline{F}+T)*F\dashv \Rightarrow (\mathrm{a}+\underline{T})*F\dashv \Rightarrow (\mathrm{a}+\underline{F})*F\dashv \Rightarrow (\mathrm{a}+\mathrm{a})*\underline{F}\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



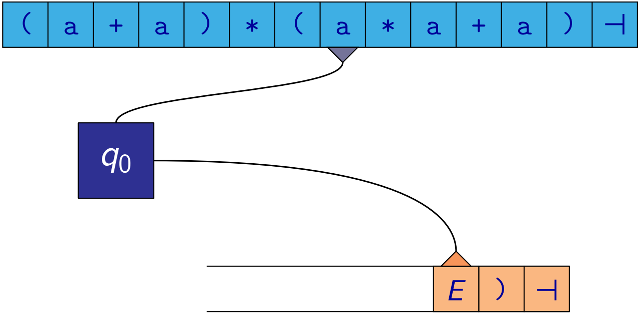
$$\cdots \Rightarrow (\underline{F}+T)*F\dashv \Rightarrow (a+\underline{T})*F\dashv \Rightarrow (a+\underline{F})*F\dashv \Rightarrow (a+a)*\underline{F}\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

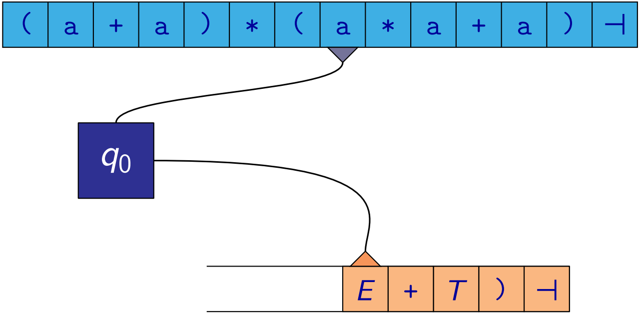


$$\cdots \;\Rightarrow\; (\mathtt{a}+\underline{T})*F\dashv \;\Rightarrow\; (\mathtt{a}+\underline{F})*F\dashv \;\Rightarrow\; (\mathtt{a}+\mathtt{a})*\underline{F}\dashv \;\Rightarrow\; (\mathtt{a}+\mathtt{a})*(\underline{E})\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

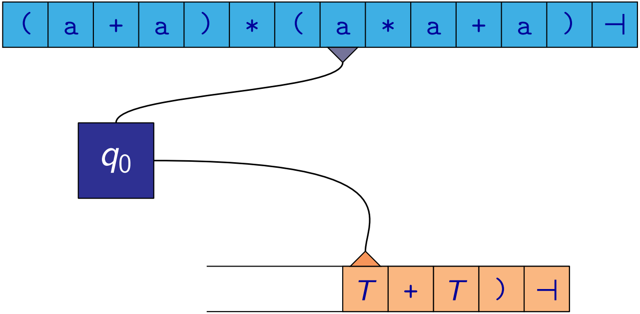


$$\cdots \Rightarrow (\mathtt{a}+\underline{T})*F\dashv \;\Rightarrow\; (\mathtt{a}+\underline{F})*F\dashv \;\Rightarrow\; (\mathtt{a}+\mathtt{a})*\underline{F}\dashv \;\Rightarrow\; (\mathtt{a}+\mathtt{a})*(\underline{E})\dashv$$



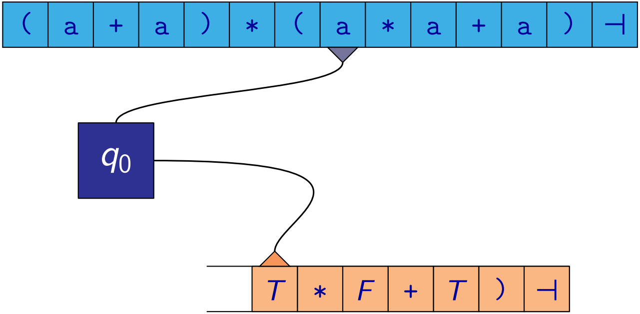
$$\cdots \Rightarrow (\mathtt{a}+\mathtt{a})*\underline{F}\dashv \;\Rightarrow\; (\mathtt{a}+\mathtt{a})*(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; (\mathtt{a}+\mathtt{a})*(\underline{E}+T)\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



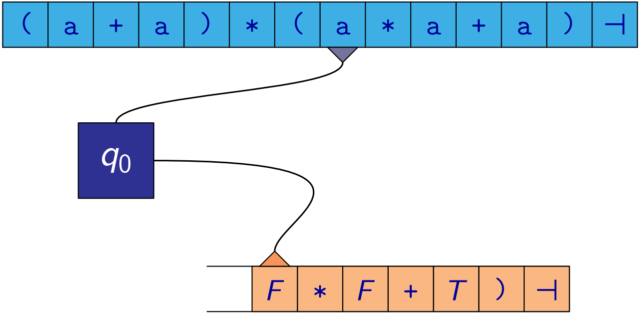
$$\cdots \Rightarrow (a{+}a){*}(\underline{E})\dashv \Rightarrow (a{+}a){*}(\underline{E}{+}T)\dashv \Rightarrow (a{+}a){*}(\underline{T}{+}T)\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



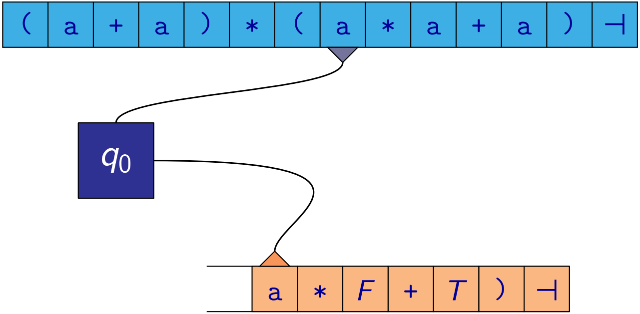
$$\cdots \Rightarrow (\mathtt{a}+\mathtt{a})*(\underline{E}+T)\dashv \;\Rightarrow\; (\mathtt{a}+\mathtt{a})*(\underline{T}+T)\dashv \;\Rightarrow\; (\mathtt{a}+\mathtt{a})*(\underline{T}*F+T)\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



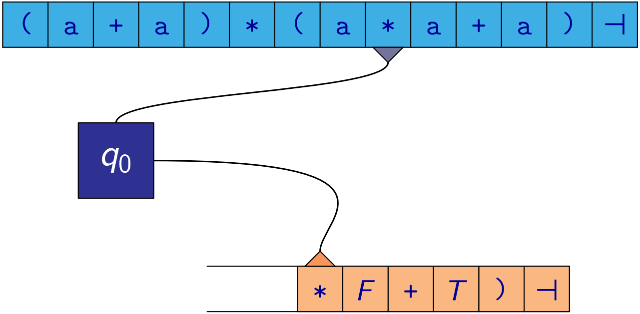
$$\cdots \Rightarrow \mathtt{(a+a)*(}\underline{T}\mathtt{*}F\mathtt{+}T\mathtt{)}\dashv \Rightarrow \mathtt{(a+a)*(}\underline{F}\mathtt{*}F\mathtt{+}T\mathtt{)}\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



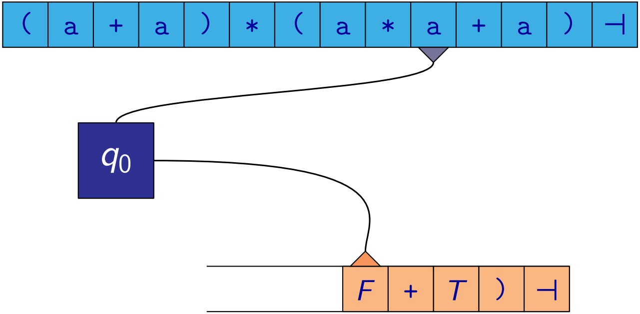
$$\cdots \Rightarrow (a{+}a){*}(\underline{F}{*}F{+}T)\dashv \;\Rightarrow\; (a{+}a){*}(a{*}\underline{F}{+}T)\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



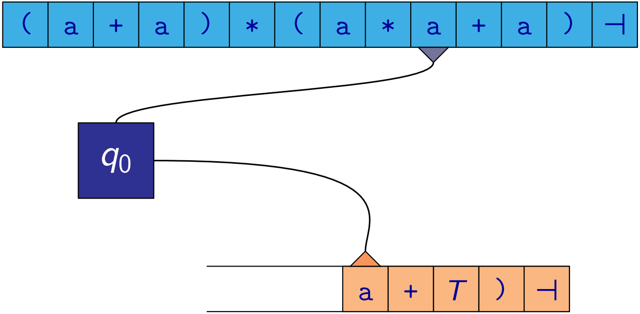
$$\cdots \Rightarrow (\mathtt{a}+\mathtt{a})*(\underline{F}*F+T)\dashv \Rightarrow (\mathtt{a}+\mathtt{a})*(\mathtt{a}*\underline{F}+T)\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



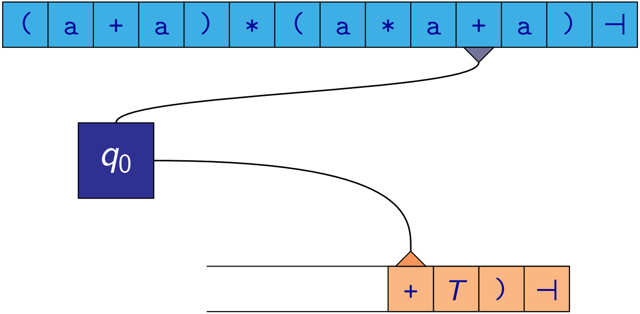
$$\cdots \Rightarrow \mathtt{(a+a)*(}\underline{F}\mathtt{*}F\mathtt{+}T\mathtt{)} \dashv \Rightarrow \mathtt{(a+a)*(a*}\underline{F}\mathtt{+}T\mathtt{)} \dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



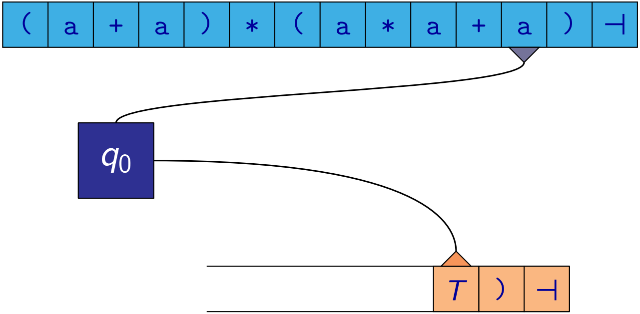
$$\cdots \Rightarrow \mathtt{(a+a)*(a*}\underline{F}\mathtt{+}T\mathtt{)}\dashv \Rightarrow \mathtt{(a+a)*(a*a+}\underline{T}\mathtt{)}\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



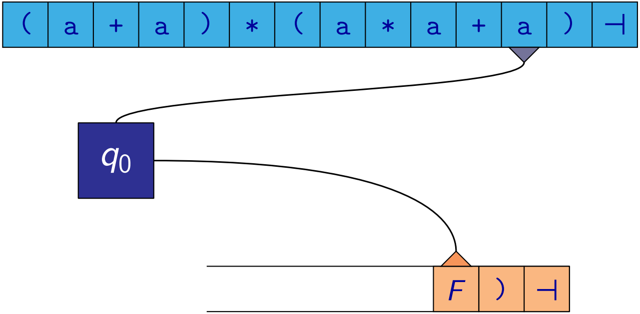
$$\cdots \Rightarrow (a{+}a){*}(a{*}\underline{F}{+}T)\dashv \;\Rightarrow\; (a{+}a){*}(a{*}a{+}\underline{T})\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



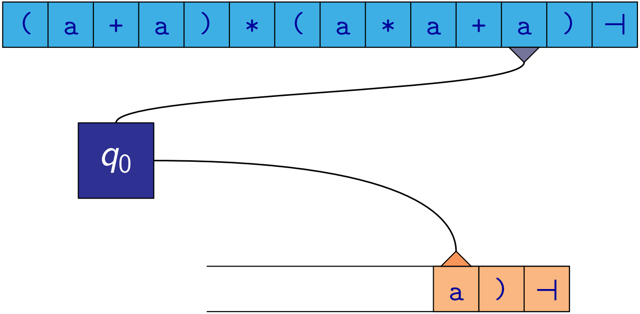
$$\cdots \Rightarrow (\mathtt{a+a})*(\mathtt{a}*\underline{F}+T)\dashv \;\Rightarrow\; (\mathtt{a+a})*(\mathtt{a*a}+\underline{T})\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



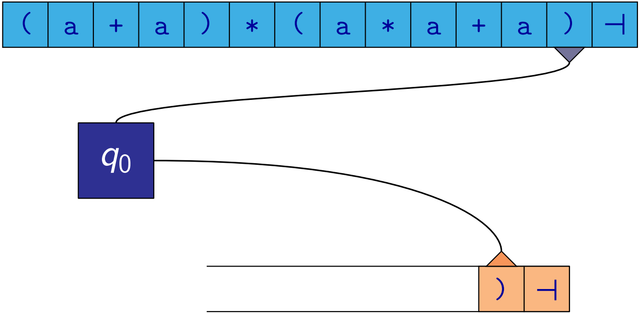
$\cdots \Rightarrow$ (a+a)*(a*a+$\underline{T}$)$\dashv$ $\Rightarrow$ (a+a)*(a*a+$\underline{F}$)$\dashv$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



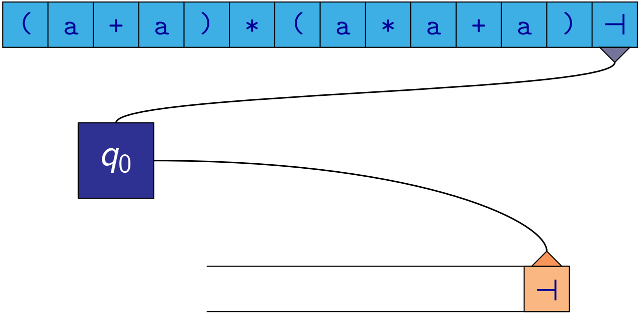
$$\cdots \Rightarrow \texttt{(a+a)*(a*a+}\underline{F}\texttt{)}\dashv \;\Rightarrow\; \texttt{(a+a)*(a*a+a)}\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



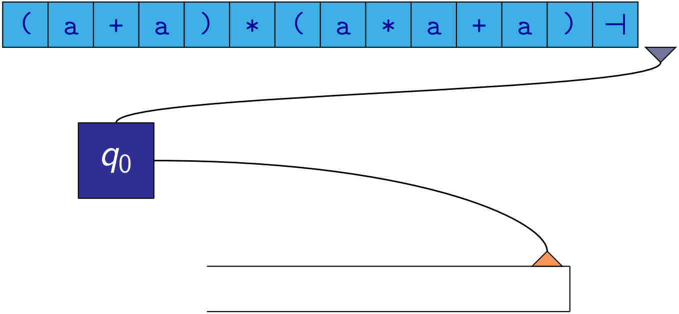
$$\cdots \Rightarrow \texttt{(a+a)*(a*a+}\underline{F}\texttt{)}\dashv \Rightarrow \texttt{(a+a)*(a*a+a)}\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



$$\cdots \Rightarrow \texttt{(a+a)*(a*a+}\underline{F}\texttt{)}\dashv \Rightarrow \texttt{(a+a)*(a*a+a)}\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



$$\cdots \;\Rightarrow\; \texttt{(a+a)*(a*a+}\underline{F}\texttt{)}\dashv \;\Rightarrow\; \texttt{(a+a)*(a*a+a)}\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

Z předchozího příkladu je vidět, že zásobníkový automat $\mathcal{M}$ během výpočtu v zásadě provádí **levou derivaci** v gramatice $\mathcal{G}$.

Snadno se ukáže, že:

- Každé levé derivaci v gramatice $\mathcal{G}$ odpovídá nějaký výpočet automatu $\mathcal{M}$.
- Každému výpočtu automatu $\mathcal{M}$ odpovídá nějaká levá derivace v gramatice $\mathcal{G}$.

Poznámka: Výše uvedený postup odpovídá syntaktické analýze **shora dolů**.

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

Alternativně lze při syntaktické analýze postupovat též **zdola nahoru**.

Tomu odpovídá následující konstrukce nedeterministického zásobníkového automatu $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, X_0)$ k dané gramatice $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, S, P)$, kde:

- $\Gamma = \Pi \cup \Sigma \cup \{\vdash\}$, kde $\vdash \notin (\Pi \cup \Sigma)$
- $X_0 = \vdash$
- Q obsahuje stavy odpovídající všem sufixům pravých stran pravidel z P a dále speciální stav $\langle S \rangle$ (kde $S \in \Pi$ je počáteční neterminál gramatiky $\mathcal{G}$) a speciální stav q_{acc}.

  Stav odpovídající suffixu α (kde $\alpha \in (\Pi \cup \Sigma)^*$) budeme označovat zápisem $\langle \alpha \rangle$.

  Speciálním případem je stav odpovídající sufixu ε. Tento stav budeme označovat $\langle \rangle$.
- $q_0 = \langle \rangle$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

- Pro každý vstupní symbol $a \in \Sigma$ a každý zásobníkový symbol $W \in \Gamma$ přidáme do δ následující pravidlo:

$$\langle\rangle W \xrightarrow{a} \langle\rangle aW$$

- Pro každé pravidlo $X \rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_n$ z gramatiky $\mathcal{G}$ (kde $X \in \Pi$, $n \geq 0$ a $Y_i \in (\Pi \cup \Sigma)$ pro $1 \leq i \leq n$) přidáme do přechodové funkce δ automatu $\mathcal{M}$ následující sadu pravidel:

$$\begin{aligned}
\langle\rangle Y_n &\xrightarrow{\varepsilon} \langle Y_n \rangle \\
\langle Y_n \rangle Y_{n-1} &\xrightarrow{\varepsilon} \langle Y_{n-1} Y_n \rangle \\
\langle Y_{n-1} Y_n \rangle Y_{n-2} &\xrightarrow{\varepsilon} \langle Y_{n-2} Y_{n-1} Y_n \rangle \\
&\vdots \\
\langle Y_2 Y_3 \ldots Y_n \rangle Y_1 &\xrightarrow{\varepsilon} \langle Y_1 Y_2 Y_3 \cdots Y_n \rangle
\end{aligned}$$

a dále pro každé $W \in \Gamma$ pravidla

$$\langle Y_1 Y_2 \cdots Y_n \rangle W \xrightarrow{\varepsilon} \langle\rangle XW$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

- Pokud například bude gramatika $\mathcal{G}$ obsahovat pravidlo

$$B \rightarrow CaADb$$

bude přechodová funkce δ automatu $\mathcal{M}$ obsahovat pravidla

$$\begin{aligned}
\langle\rangle b &\xrightarrow{\varepsilon} \langle b\rangle \\
\langle b\rangle D &\xrightarrow{\varepsilon} \langle Db\rangle \\
\langle Db\rangle A &\xrightarrow{\varepsilon} \langle ADb\rangle \\
\langle ADb\rangle a &\xrightarrow{\varepsilon} \langle aADb\rangle \\
\langle aADb\rangle C &\xrightarrow{\varepsilon} \langle CaADb\rangle
\end{aligned}$$

a dále pro každé $W \in \Gamma$ pravidlo

$$\langle CaADb\rangle W \xrightarrow{\varepsilon} \langle\rangle BW$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

- Speciálně pro ε-pravidla z gramatiky $\mathcal{G}$ budou přidaná pravidla vypadat následovně: ε-pravidlu

$$X \rightarrow \varepsilon$$

z gramatiky $\mathcal{G}$, kde $X \in \Pi$, budou odpovídat pravidla v δ tvaru

$$\langle\rangle W \xrightarrow{\varepsilon} \langle\rangle XW$$

kde $W \in \Gamma$.

- Nakonec přidáme do δ dvě speciální pravidla (kde $S \in \Pi$ je počáteční neterminál gramatiky $\mathcal{G}$):

$$\langle\rangle S \xrightarrow{\varepsilon} \langle S\rangle \qquad\qquad \langle S\rangle\vdash \xrightarrow{\varepsilon} q_{acc}$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

Příklad: Vezměme si opět stejnou gramatiku $\mathcal{G}$ jako v předchozím příkladě:

$$
\begin{aligned}
S &\to E \dashv \\
E &\to T \mid E{+}T \\
T &\to F \mid T{*}F \\
F &\to \mathtt{a} \mid (E)
\end{aligned}
$$

K ní sestrojíme zásobníkový automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, X_0)$, kde

- $\Sigma = \{ \mathtt{a}, +, *, (,), \dashv \}$
- $\Gamma = \{ S, E, T, F, \mathtt{a}, +, *, (,), \dashv, \vdash \}$
- $Q = \{ \langle\rangle, \langle\dashv\rangle, \langle E \dashv\rangle, \langle T\rangle, \langle +T\rangle, \langle E{+}T\rangle, \langle F\rangle, \langle *F\rangle, \langle T{*}F\rangle,$ $\langle \mathtt{a}\rangle, \langle)\rangle, \langle E)\rangle, \langle (E)\rangle, \langle S\rangle, q_{acc} \}$
- $q_0 = \langle\rangle$
- $X_0 = \vdash$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

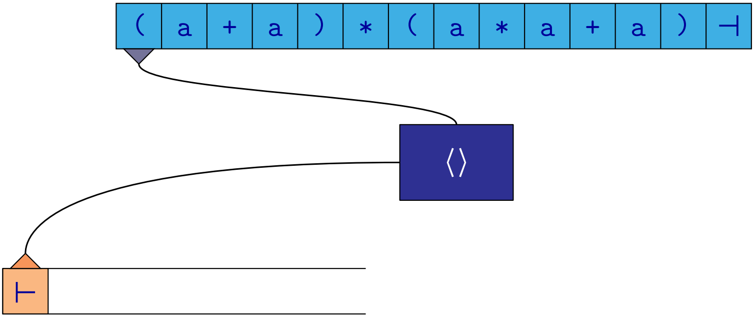
Pro každé $X \in \Gamma$ přidáme do δ následující pravidla:

$$\langle\rangle X \xrightarrow{\mathtt{a}} \langle\rangle \mathtt{a} X$$
$$\langle\rangle X \xrightarrow{+} \langle\rangle + X$$
$$\langle\rangle X \xrightarrow{*} \langle\rangle * X$$
$$\langle\rangle X \xrightarrow{(} \langle\rangle (X$$
$$\langle\rangle X \xrightarrow{)} \langle\rangle) X$$
$$\langle\rangle X \xrightarrow{\dashv} \langle\rangle \dashv X$$

$$\langle\rangle S \xrightarrow{\varepsilon} \langle S\rangle$$
$$\langle S\rangle \vdash \xrightarrow{\varepsilon} q_{acc}$$

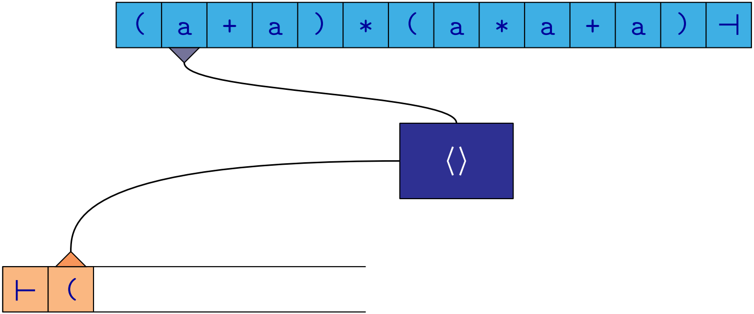
$$\langle\rangle \dashv \xrightarrow{\varepsilon} \langle \dashv\rangle$$
$$\langle \dashv\rangle E \xrightarrow{\varepsilon} \langle E \dashv\rangle \qquad \langle E \dashv\rangle X \xrightarrow{\varepsilon} \langle\rangle S X$$
$$\langle\rangle T \xrightarrow{\varepsilon} \langle T\rangle \qquad \langle T\rangle X \xrightarrow{\varepsilon} \langle\rangle E X$$
$$\langle T\rangle + \xrightarrow{\varepsilon} \langle + T\rangle$$
$$\langle + T\rangle E \xrightarrow{\varepsilon} \langle E + T\rangle \qquad \langle E + T\rangle X \xrightarrow{\varepsilon} \langle\rangle E X$$
$$\langle\rangle F \xrightarrow{\varepsilon} \langle F\rangle \qquad \langle F\rangle X \xrightarrow{\varepsilon} \langle\rangle T X$$
$$\langle F\rangle * \xrightarrow{\varepsilon} \langle * F\rangle$$
$$\langle * F\rangle T \xrightarrow{\varepsilon} \langle T * F\rangle \qquad \langle T * F\rangle X \xrightarrow{\varepsilon} \langle\rangle T X$$
$$\langle\rangle \mathtt{a} \xrightarrow{\varepsilon} \langle \mathtt{a}\rangle \qquad \langle \mathtt{a}\rangle X \xrightarrow{\varepsilon} \langle\rangle F X$$
$$\langle\rangle) \xrightarrow{\varepsilon} \langle) \rangle$$
$$\langle) \rangle E \xrightarrow{\varepsilon} \langle E) \rangle$$
$$\langle E) \rangle (\xrightarrow{\varepsilon} \langle (E) \rangle \qquad \langle (E) \rangle X \xrightarrow{\varepsilon} \langle\rangle F X$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

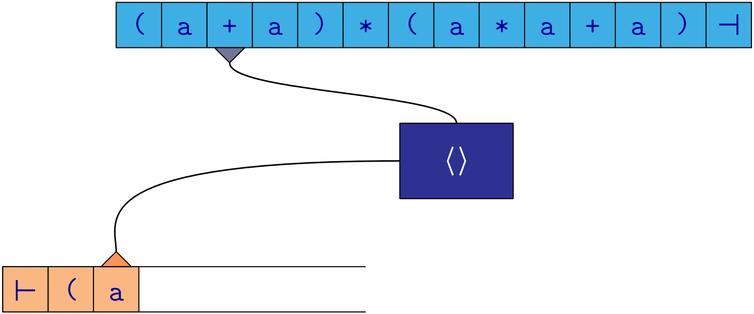


$(a{+}a){*}(a{*}a{+}a) \dashv$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

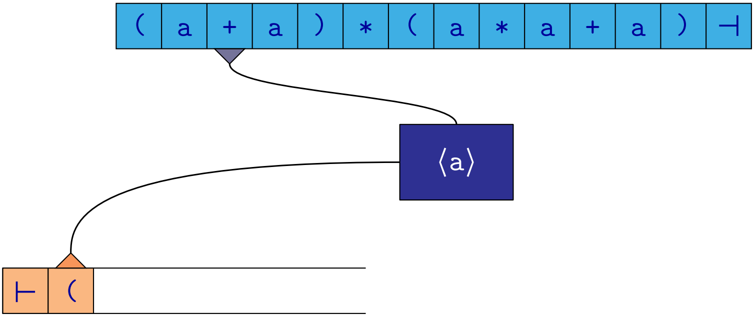


$\texttt{(a+a)*(a*a+a)} \dashv$



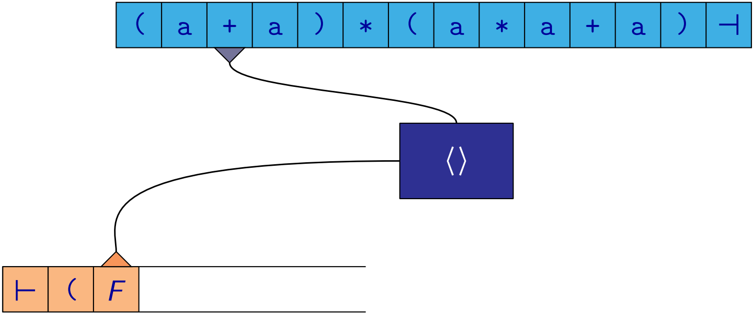
(a+a)*(a*a+a) ⊣

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



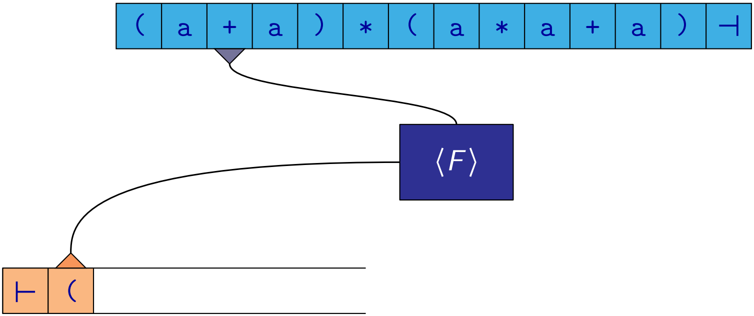
(a+a)*(a*a+a) ⊣

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



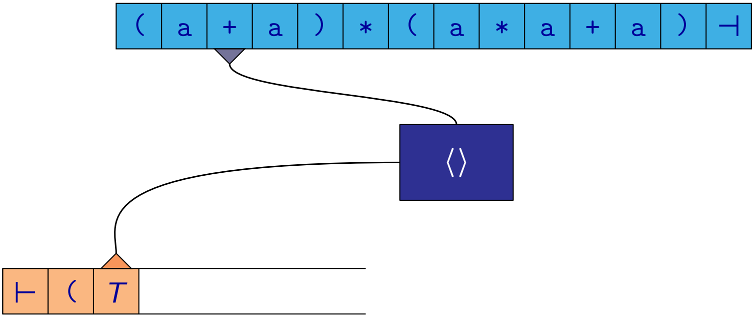
$(\underline{F}\texttt{+a)*(a*a+a)} \dashv \;\Rightarrow\; \texttt{(a+a)*(a*a+a)} \dashv$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

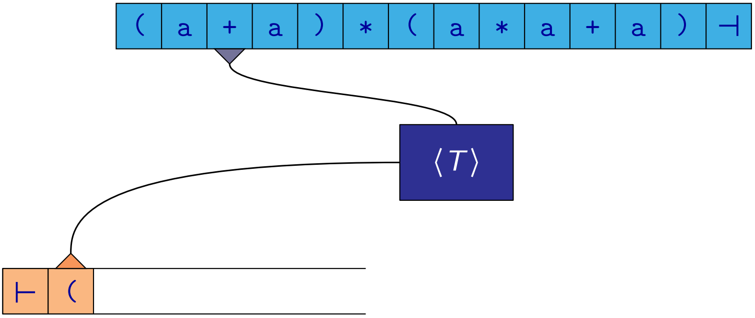


$(\underline{F}\text{+a)*(a*a+a)} \dashv \;\Rightarrow\; \text{(a+a)*(a*a+a)} \dashv$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

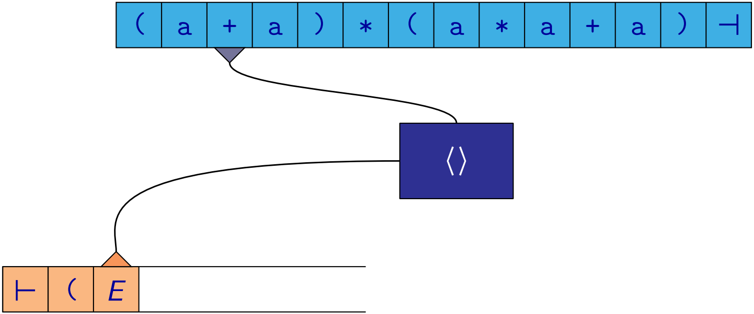


$(\underline{T}\mathtt{+a)*(a*a+a)} \dashv \;\Rightarrow\; (\underline{F}\mathtt{+a)*(a*a+a)} \dashv \;\Rightarrow\; \mathtt{(a+a)*(a*a+a)} \dashv$



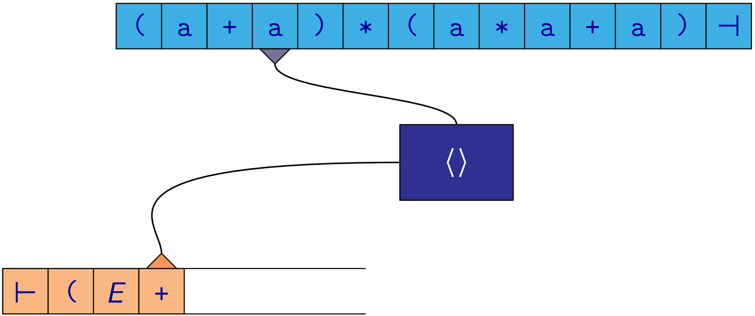
$$\texttt{(}\underline{T}\texttt{+a)*(a*a+a)}\dashv \;\Rightarrow\; \texttt{(}\underline{F}\texttt{+a)*(a*a+a)}\dashv \;\Rightarrow\; \texttt{(a+a)*(a*a+a)}\dashv$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



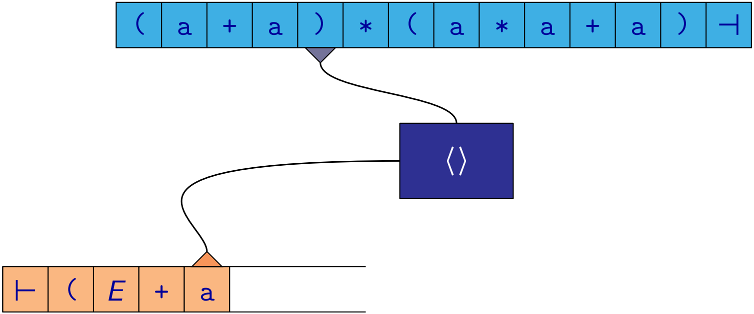
$(\underline{E}+\mathtt{a})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv\ \Rightarrow\ (\underline{T}+\mathtt{a})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv\ \Rightarrow\ (\underline{F}+\mathtt{a})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv\ \Rightarrow$
$\cdots$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



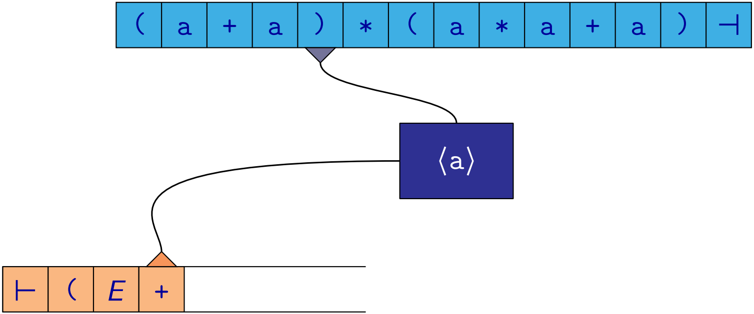
$(\underline{E}+\mathtt{a})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{T}+\mathtt{a})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{F}+\mathtt{a})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow$
$\dots$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



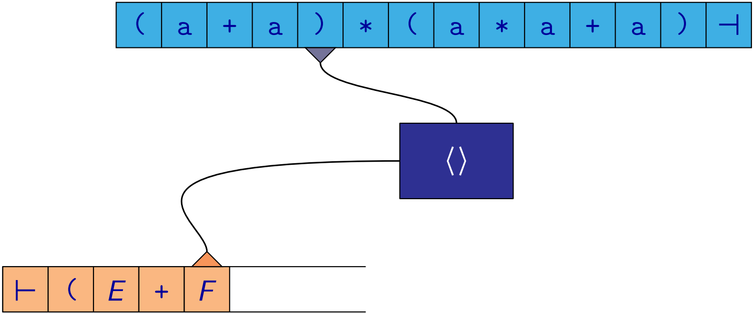
$(\underline{E}+\mathrm{a})*(\mathrm{a}*\mathrm{a}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{T}+\mathrm{a})*(\mathrm{a}*\mathrm{a}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{F}+\mathrm{a})*(\mathrm{a}*\mathrm{a}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow$
$\cdots$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



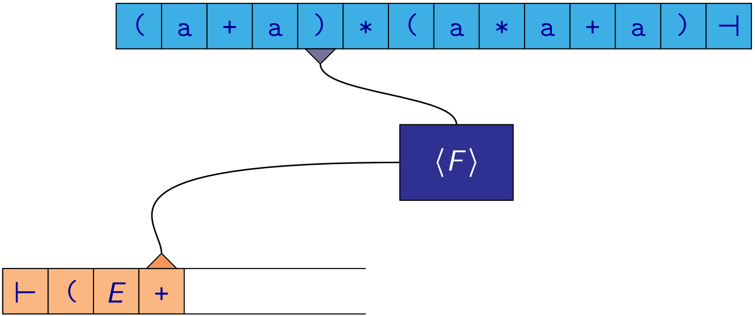
$(\underline{E}+\mathtt{a})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{T}+\mathtt{a})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{F}+\mathtt{a})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow$
$\cdots$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



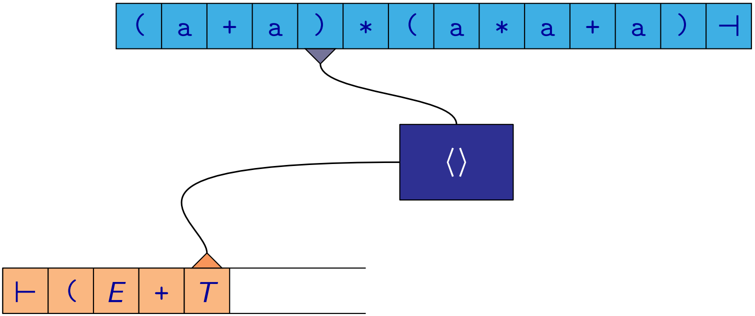
$(E+\underline{F})*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{E}+a)*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{T}+a)*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow$
$\ldots$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

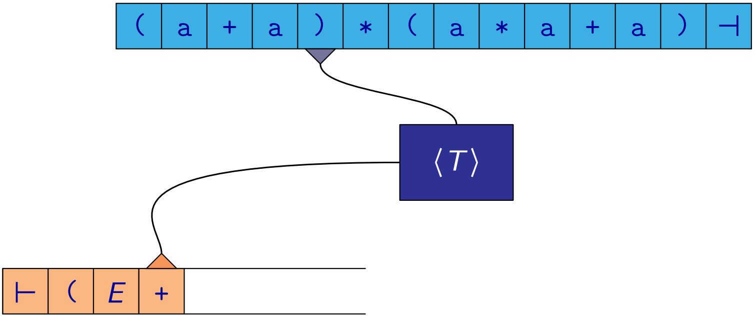


$$(E+\underline{F})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{E}+\mathtt{a})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{T}+\mathtt{a})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

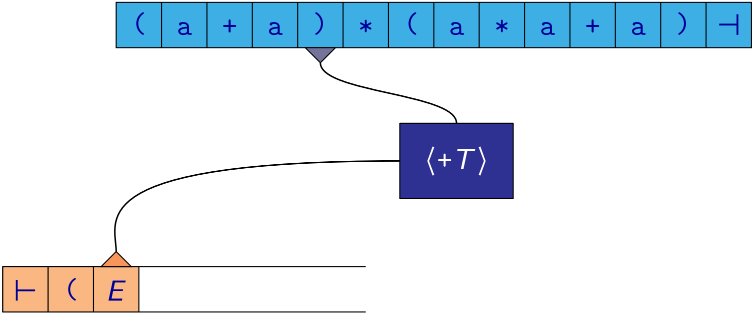
Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



$(E+\underline{T})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (E+\underline{F})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{E}+\mathtt{a})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow$
$\ldots$

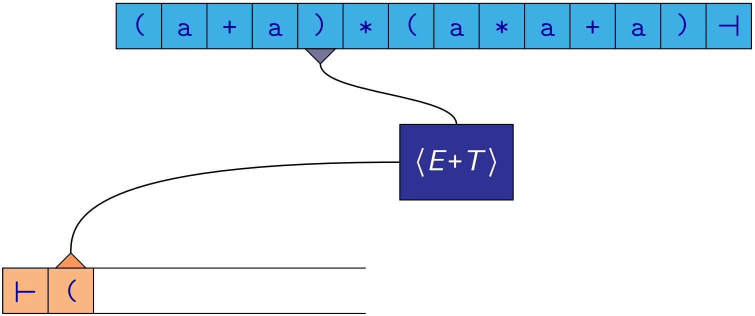


$(E{+}\underline{T})*(a*a{+}a) \dashv \;\Rightarrow\; (E{+}\underline{F})*(a*a{+}a) \dashv \;\Rightarrow\; (\underline{E}{+}a)*(a*a{+}a) \dashv \;\Rightarrow$
$\ldots$



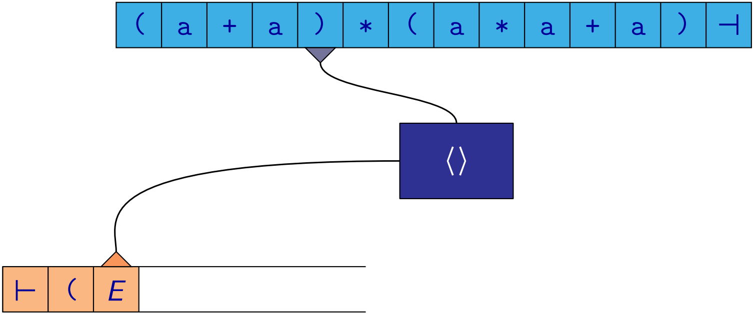
$(E+\underline{T})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (E+\underline{F})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{E}+\mathtt{a})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow$
$\dots$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



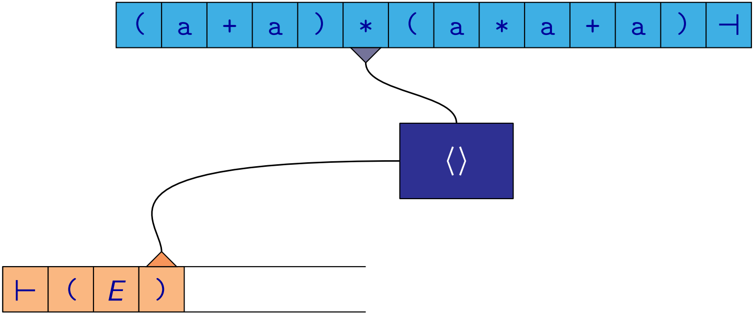
$(E+\underline{T})*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; (E+\underline{F})*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{E}+a)*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow$
$\dots$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



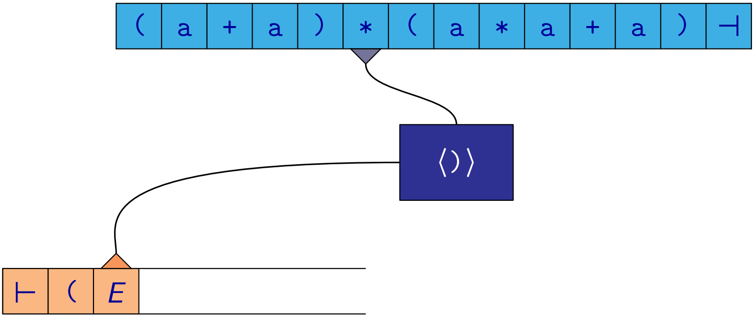
$$(\underline{E})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (E+\underline{T})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (E+\underline{F})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



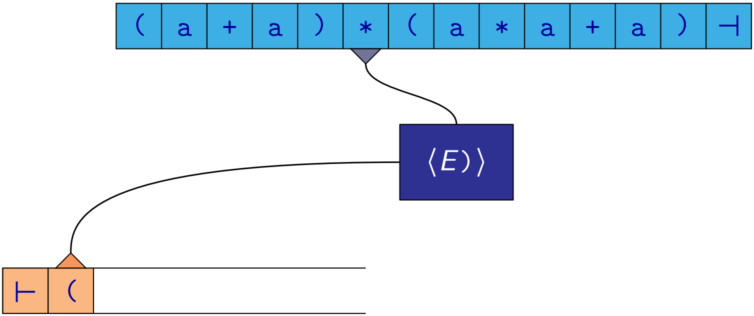
$$(\underline{E})*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; (E+\underline{T})*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; (E+\underline{F})*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

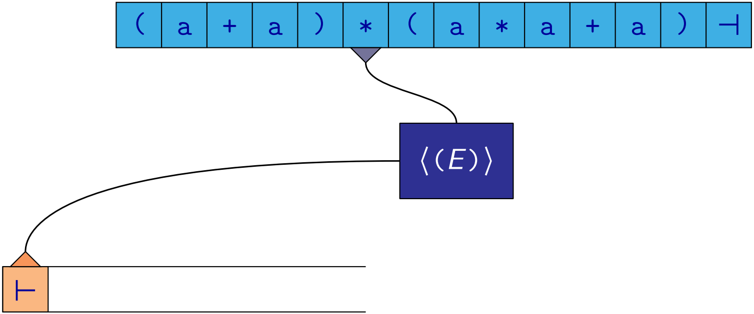


$$(\underline{E})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv\ \Rightarrow\ (E+\underline{T})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv\ \Rightarrow\ (E+\underline{F})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv\ \Rightarrow\ \cdots$$

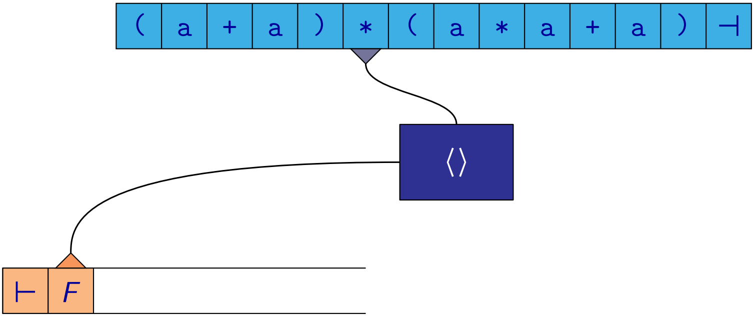
Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



$$(\underline{E})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (E+\underline{T})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (E+\underline{F})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

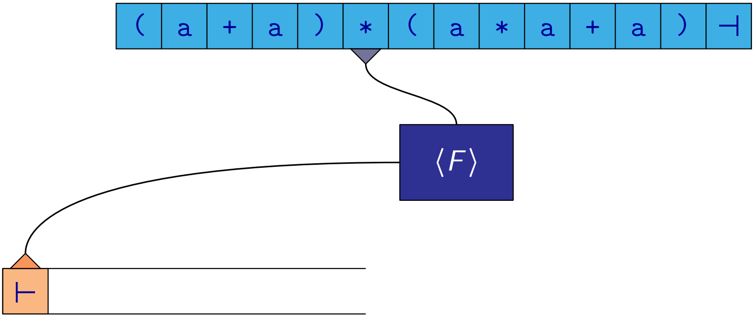


$$(\underline{E})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (E+\underline{T})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (E+\underline{F})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$



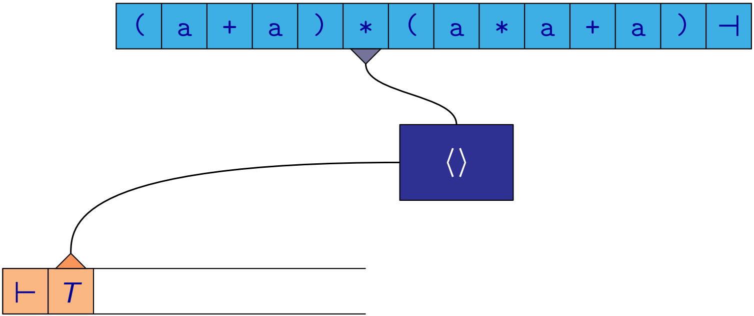
$$\underline{F}\mathtt{*(a*a+a)}\dashv \;\Rightarrow\; \mathtt{(}\underline{E}\mathtt{)*(a*a+a)}\dashv \;\Rightarrow\; \mathtt{(}E\mathtt{+}\underline{T}\mathtt{)*(a*a+a)}\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



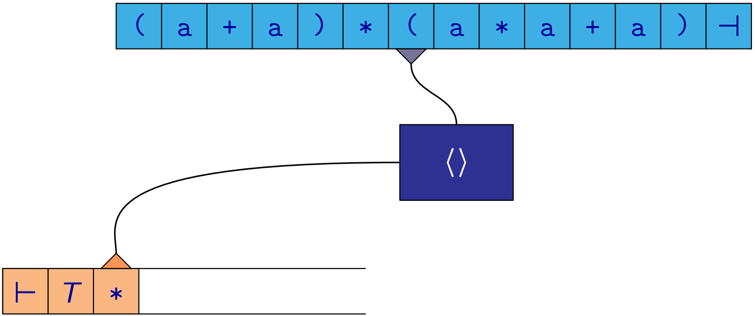
$\underline{F}*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{E})*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; (E+\underline{T})*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



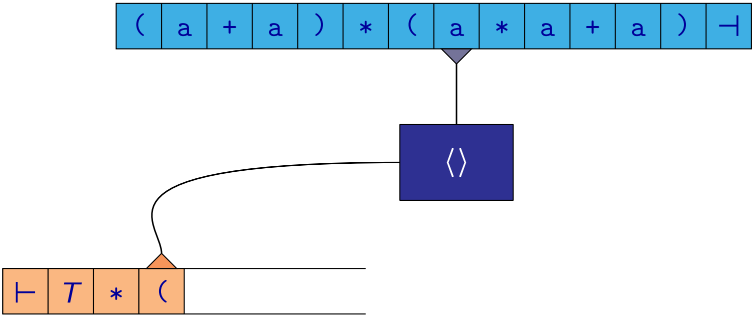
$$\underline{T}*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \underline{F}*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{E})*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



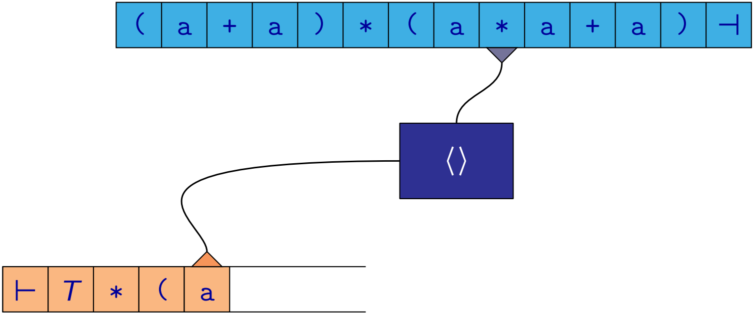
$$\underline{T}*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; \underline{F}*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{E})*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



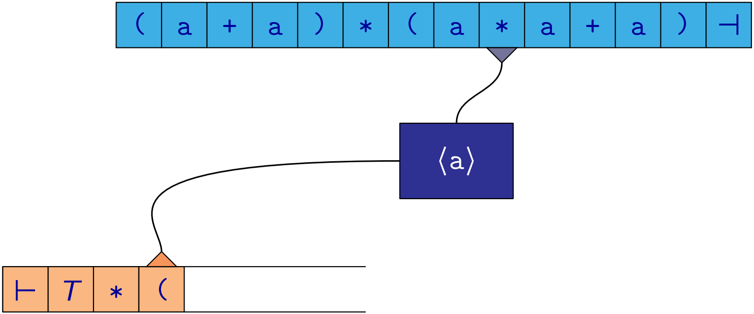
$$\underline{T}*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; \underline{F}*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{E})*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

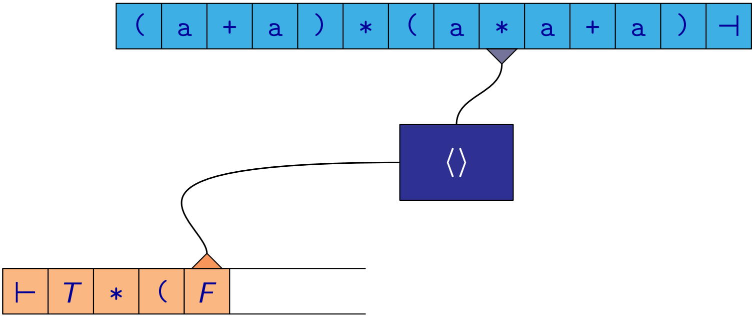


$\underline{T}*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; \underline{F}*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; (\underline{E})*(a*a+a)\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$

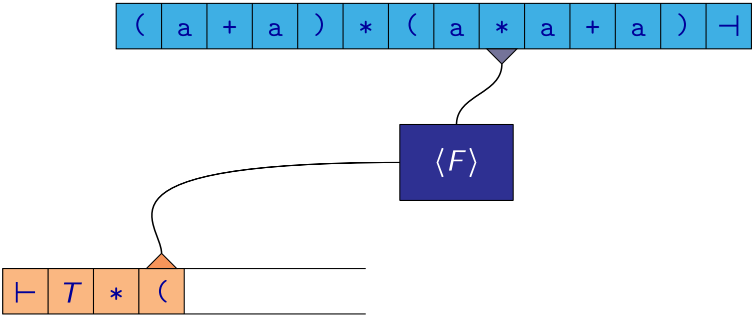
Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



$$\underline{T}*(a*a+a) \dashv \;\Rightarrow\; \underline{F}*(a*a+a) \dashv \;\Rightarrow\; (\underline{E})*(a*a+a) \dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

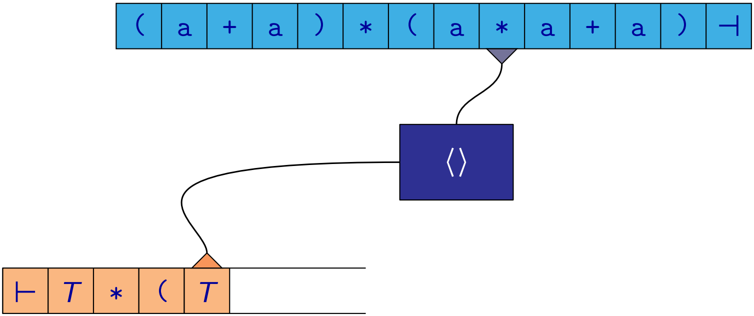


$$T*(\underline{F}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \underline{T}*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \underline{F}*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$



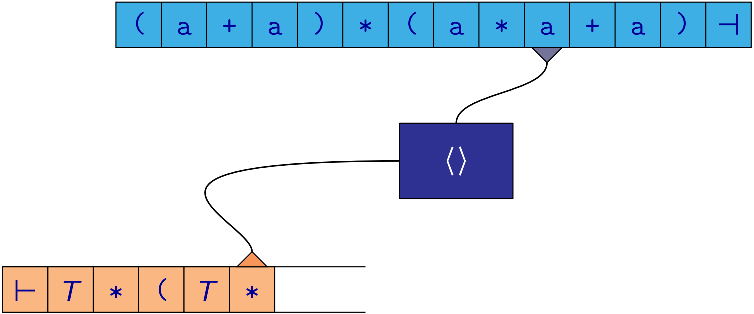
$$T*(\underline{F}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \underline{T}*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \underline{F}*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



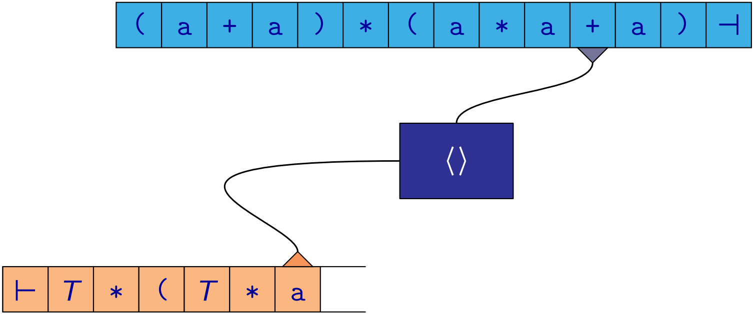
$$T*(\underline{T}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{F}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \underline{T}*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



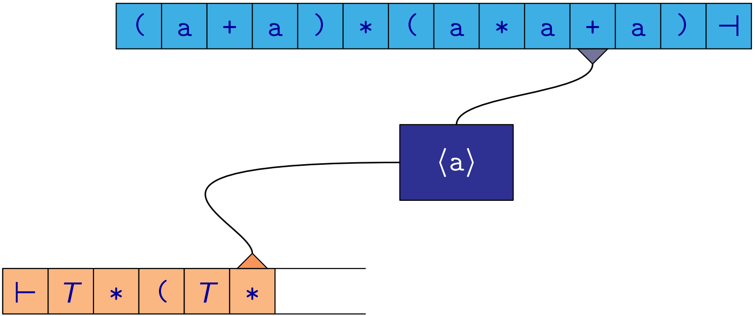
$$T*(\underline{T}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{F}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \underline{T}*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



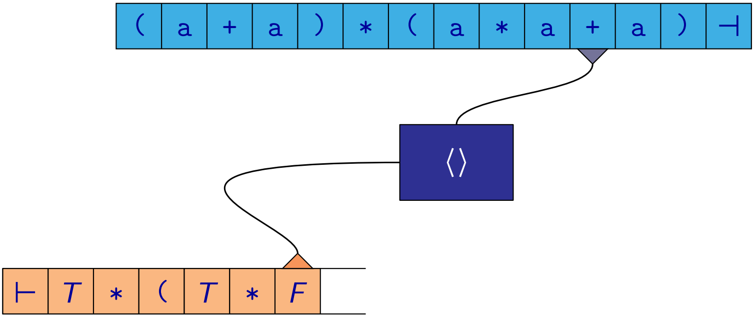
$$T*(\underline{T}*\mathrm{a}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{F}*\mathrm{a}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; \underline{T}*(\mathrm{a}*\mathrm{a}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



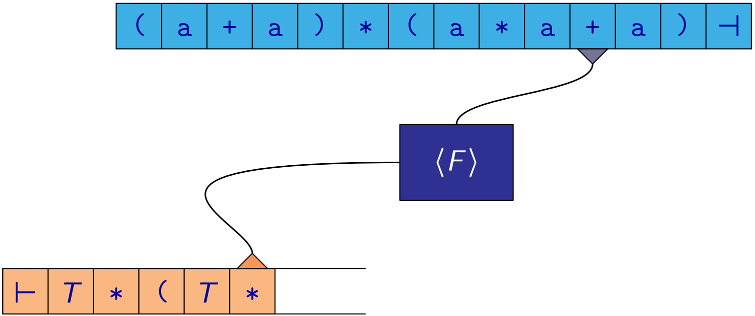
$$T*(\underline{T}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{F}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \underline{T}*(\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



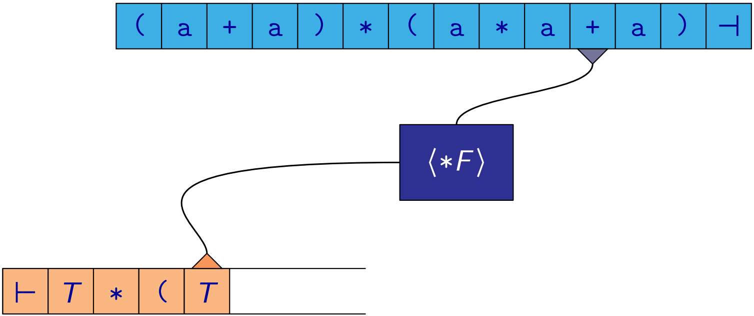
$$T*(T*\underline{F}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{F}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



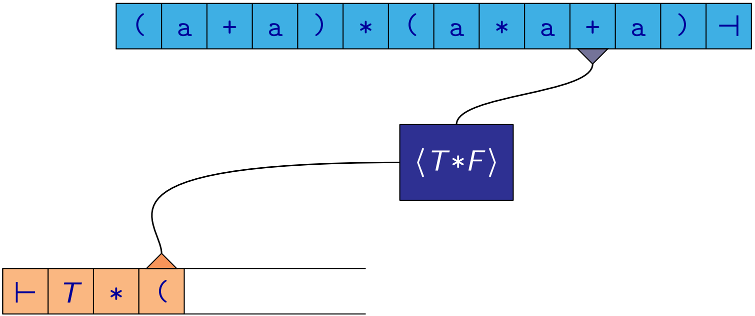
$$T*(T*\underline{F}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{F}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

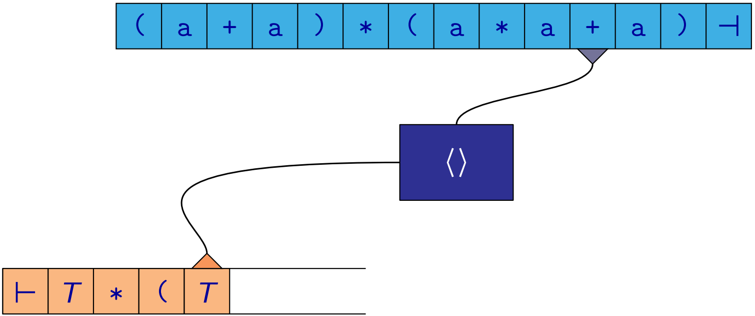


$$T*(T*\underline{F}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{F}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

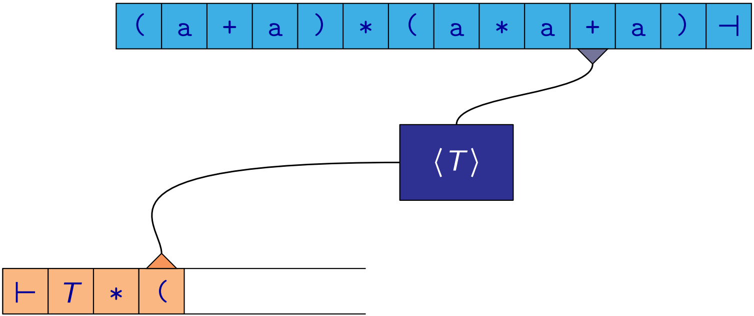


$$T*(T*\underline{F}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{F}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$



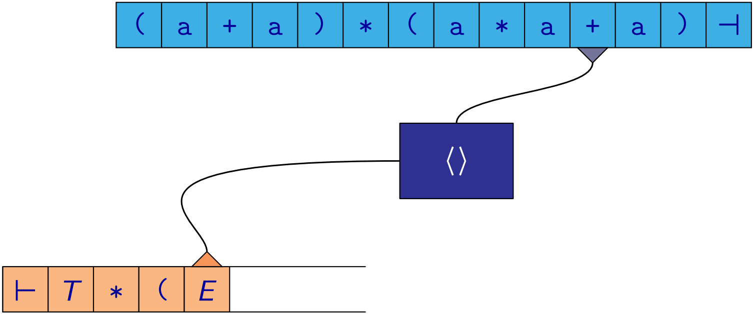
$$T*(\underline{T}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(T*\underline{F}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}*\mathrm{a}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



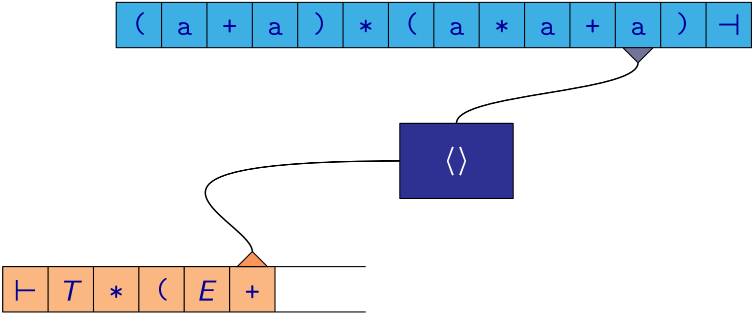
$$T*(\underline{T}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(T*\underline{F}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}*\mathtt{a}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



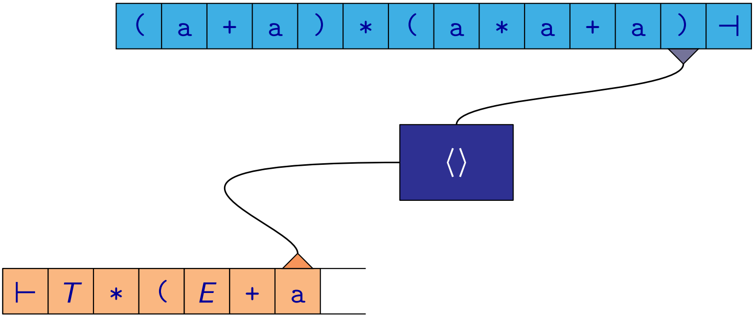
$$T*(\underline{E}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(T*\underline{F}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

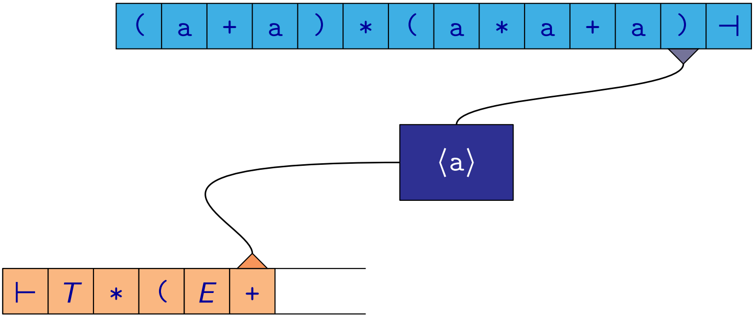


$$T*(\underline{E}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(T*\underline{F}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

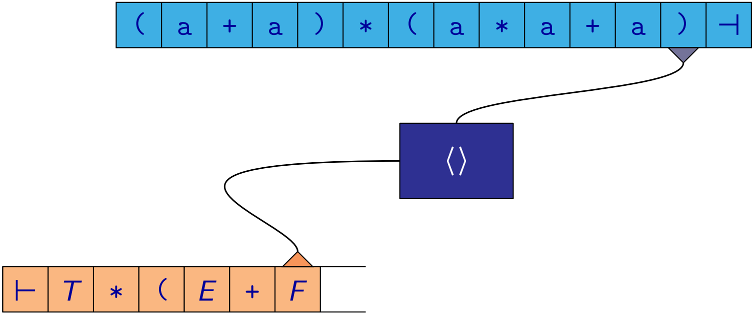
Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



$$T*(\underline{E}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(T*\underline{F}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

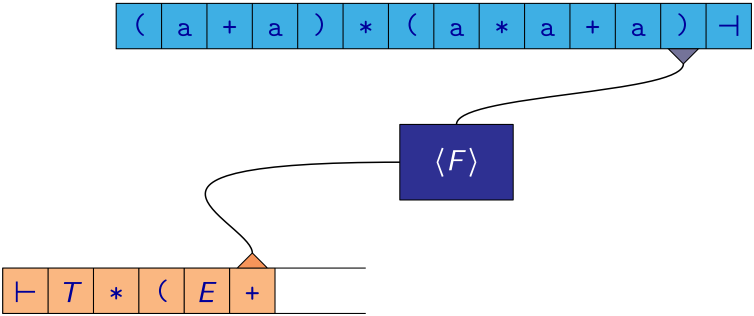


$$T*(\underline{E}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(T*\underline{F}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$



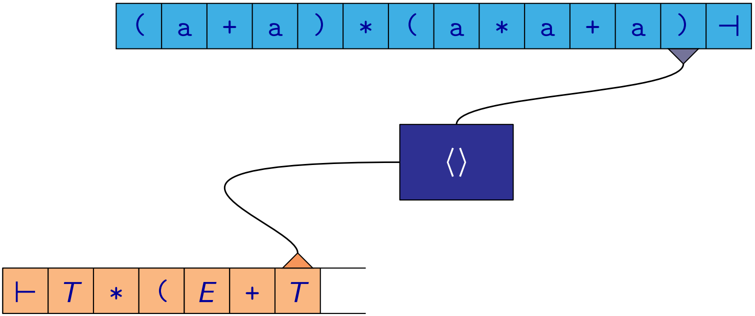
$T*(E+\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(T*\underline{F}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow$
$\cdots$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

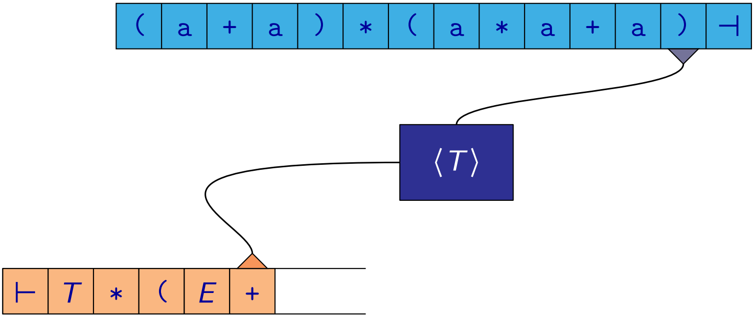


$$T*(E+\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(T*\underline{F}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; \dots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

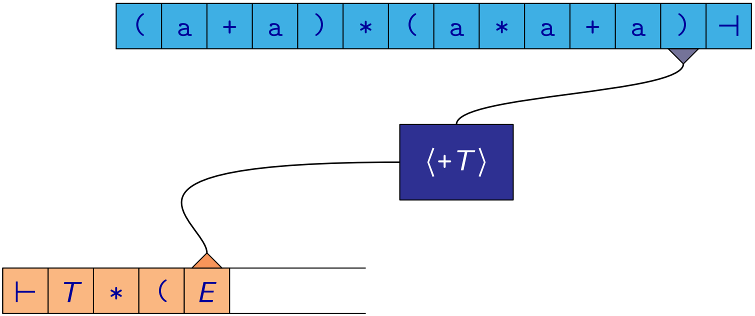


$$T*(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$



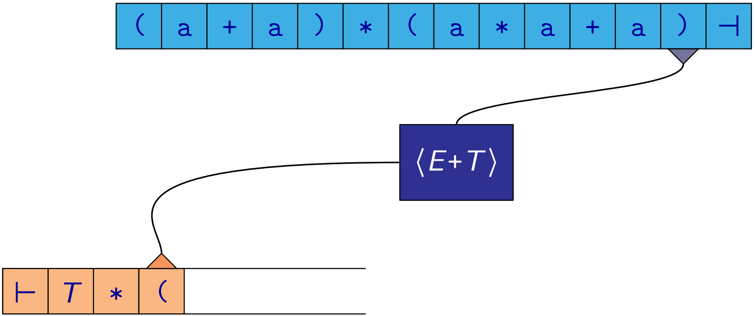
$$T*(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



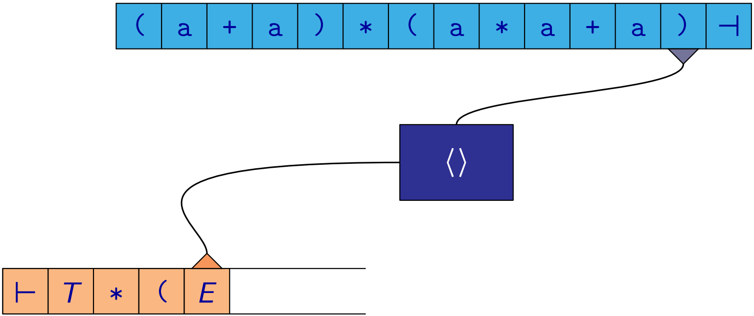
$$T*(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



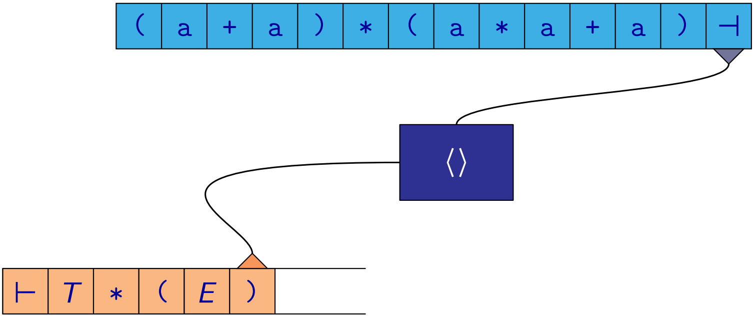
$$T*(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{T}+\mathtt{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



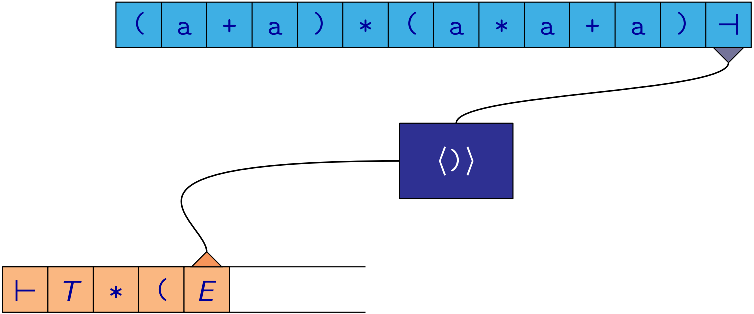
$$T*(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



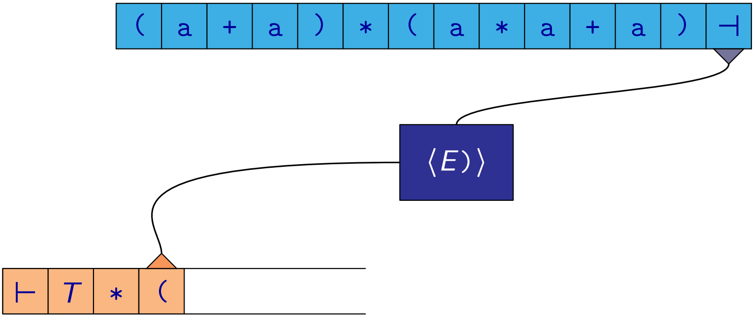
$$T*(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



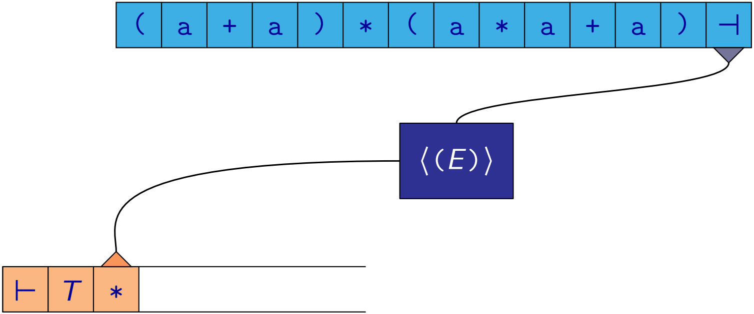
$$\mathit{T}{*}(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; \mathit{T}{*}(E{+}\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; \mathit{T}{*}(E{+}\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; \mathit{T}{*}(\underline{E}{+}\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

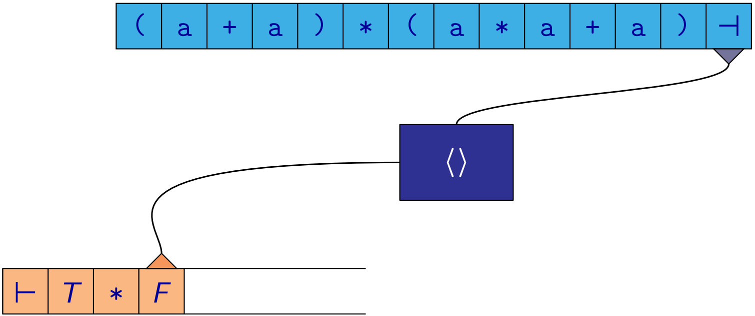


$$T*(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

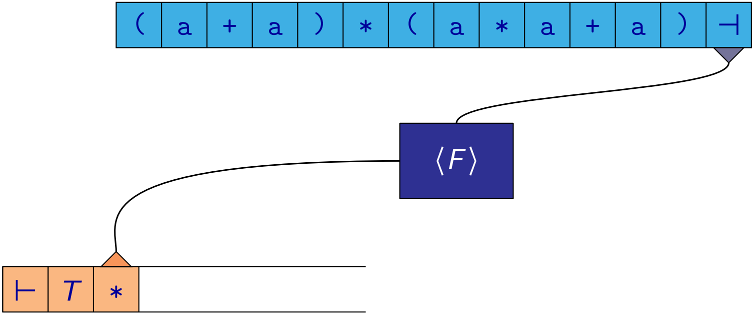


$$T{*}(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; T{*}(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; T{*}(E+\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; T{*}(\underline{E}+\mathrm{a})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$



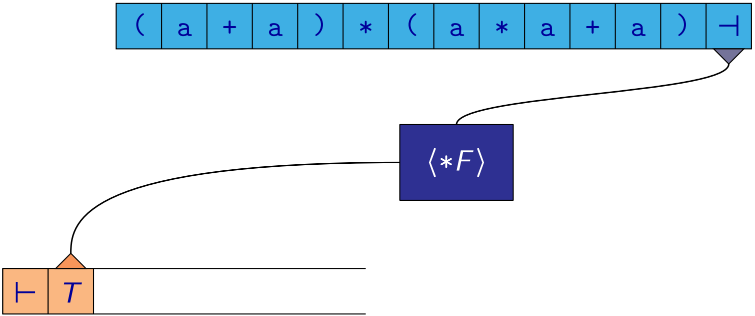
$$T*\underline{F}\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



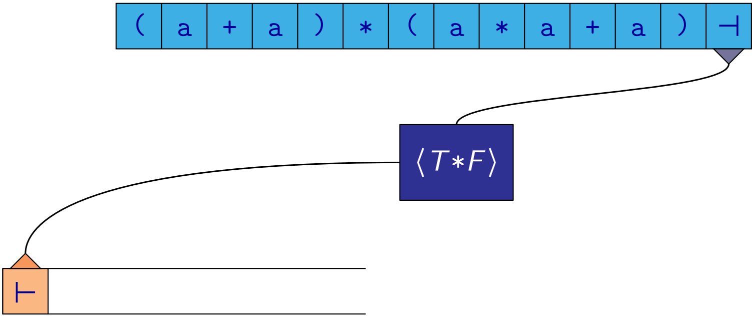
$$\mathit{T}*\underline{F}\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



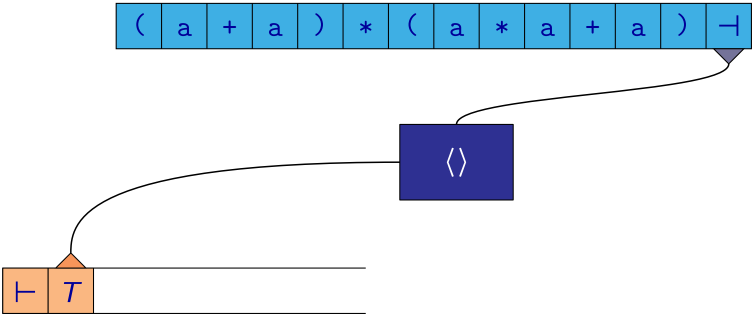
$$T*\underline{F}\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



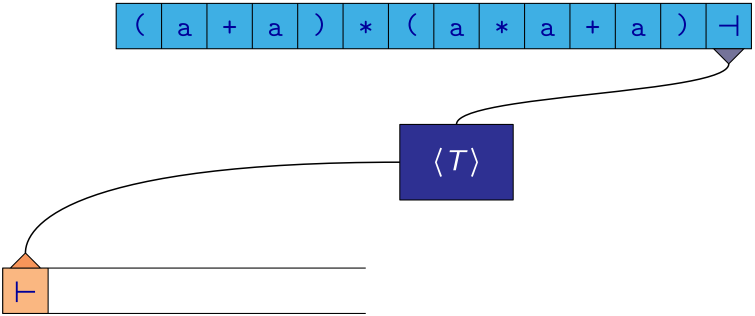
$$T{*}\underline{F}\dashv \;\Rightarrow\; T{*}(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; T{*}(E{+}\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; T{*}(E{+}\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



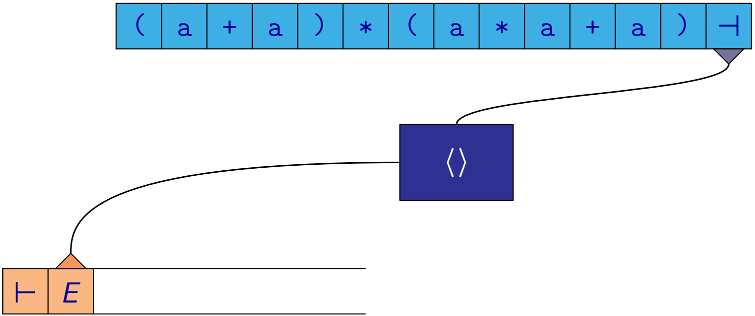
$\underline{T}\dashv \;\Rightarrow\; T*\underline{F}\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{F})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



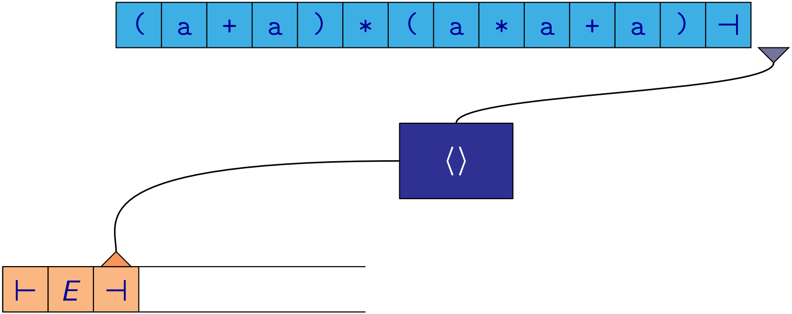
$\underline{T}\dashv \;\Rightarrow\; T*\underline{F}\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{F})\dashv \;\Rightarrow$
$\dots$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



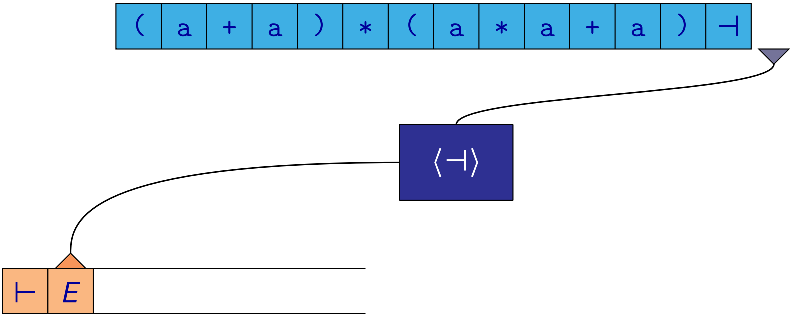
$$\underline{E}\dashv \;\Rightarrow\; \underline{T}\dashv \;\Rightarrow\; T*\underline{F}\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



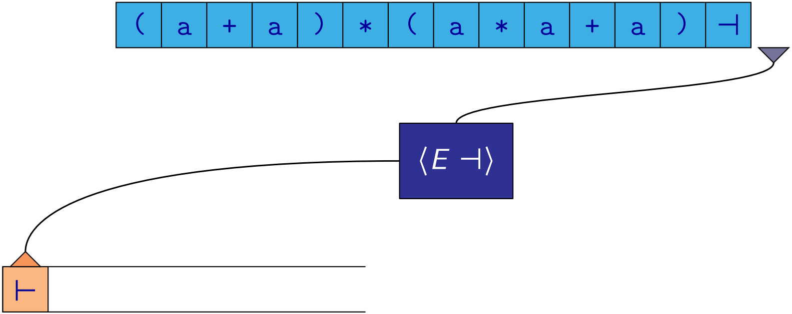
$$\underline{E}\dashv \;\Rightarrow\; \underline{T}\dashv \;\Rightarrow\; T*\underline{F}\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



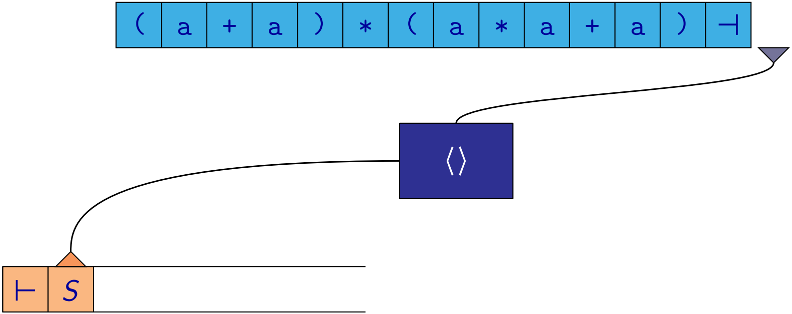
$$\underline{E}\dashv \;\Rightarrow\; \underline{T}\dashv \;\Rightarrow\; T{*}\underline{F}\dashv \;\Rightarrow\; T{*}(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; T{*}(E{+}\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

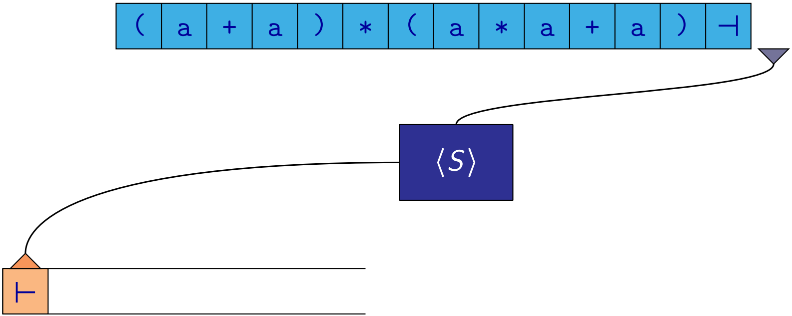


$\underline{E}\dashv \;\Rightarrow\; \underline{T}\dashv \;\Rightarrow\; T*\underline{F}\dashv \;\Rightarrow\; T*(\underline{E})\dashv \;\Rightarrow\; T*(E+\underline{T})\dashv \;\Rightarrow\; \cdots$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

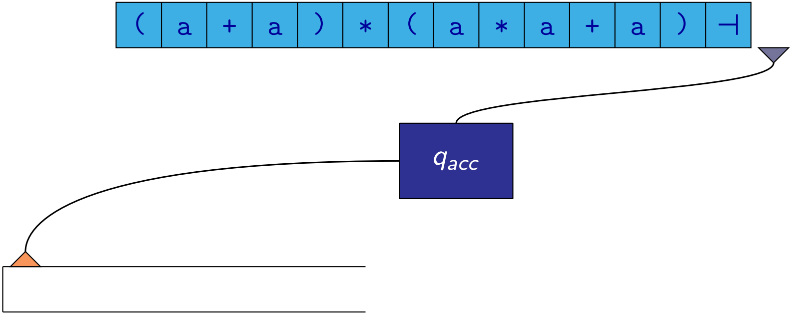


$$\underline{S} \Rightarrow \underline{E}\dashv \Rightarrow \underline{T}\dashv \Rightarrow T*\underline{F}\dashv \Rightarrow T*(\underline{E})\dashv \Rightarrow T*(E+\underline{T})\dashv \Rightarrow \cdots$$



$$\underline{S} \Rightarrow \underline{E}\dashv \Rightarrow \underline{T}\dashv \Rightarrow T{*}\underline{F}\dashv \Rightarrow T{*}(\underline{E})\dashv \Rightarrow T{*}(E{+}\underline{T})\dashv \Rightarrow \cdots$$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



$$\underline{S} \Rightarrow \underline{E}\dashv \Rightarrow \underline{T}\dashv \Rightarrow T*\underline{F}\dashv \Rightarrow T*(\underline{E})\dashv \Rightarrow T*(E+\underline{T})\dashv \Rightarrow \cdots$$

Jak je vidět z předchozího příkladu, zásobníkový automat $\mathcal{M}$ v zásadě provádí **pravou derivaci** v gramatice $\mathcal{G}$ pozpátku.

Další třídy bezkontextových gramatik

Existuje řada různých tříd bezkontextových gramatik, pro které je možné sestrojit daný zásobníkový automat tak, aby byl deterministický:

- Přístup **shora dolů** — vytváří levou derivaci:
  - LL(0), LL(1), LL(2), ...
- Přístup **zdola nahoru** — vytváří pravou derivaci pozpátku:
  - LR(0), LR(1), LR(2), ...
  - LALR (resp. LALR(1), ...)
  - SLR (resp. SLR(1), ...)

Generátory parserů

Generátory parserů — nástroje, které umožňují z popisu dané gramatiky automaticky vygenerovat kód v nějakém programovacím jazyce, který de facto implementuje činnost odpovídajícího zásobníkového automatu.

Příklady generátorů parserů:

- Yacc
- Bison
- ANTLR
- JavaCC
- Menhir
- ...

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

Věta

Ke každému zásobníkovému automatu $\mathcal{M}$ s jedním stavem a přijímajícím prázdným zásobníkem lze sestrojit bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$ takovou, že $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathcal{M})$.

Důkaz: Pro ZA $\mathcal{M} = (\{q_0\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, X_0)$, kde $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$, vytvoříme BG $\mathcal{G} = (\Gamma, \Sigma, X_0, P)$, kde

$$(A \rightarrow a\alpha) \in P \qquad \Longleftrightarrow \qquad (q_0, \alpha) \in \delta(q_0, a, A)$$

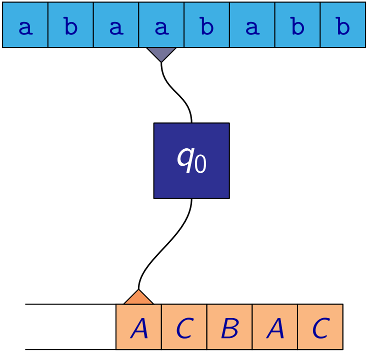
pro každé $A \in \Gamma$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\alpha \in \Gamma^*$.

Indukcí můžeme dokázat

$$X_0 \Rightarrow^* u\alpha \ \ (\text{v } \mathcal{G}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad q_0 X_0 \xrightarrow{u} q_0\alpha \ \ (\text{v } \mathcal{M})$$

kde $u \in \Sigma^*$ a $\alpha \in \Gamma^*$ (přičemž v $\mathcal{G}$ uvažujeme pouze levé derivace).

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



$\mathcal{M}$:

$$\vdots$$

$$q_0 A \xrightarrow{a} q_0 BC$$

$$q_0 B \xrightarrow{b} q_0$$

$$\vdots$$

$\mathcal{G}$:

$$\vdots$$

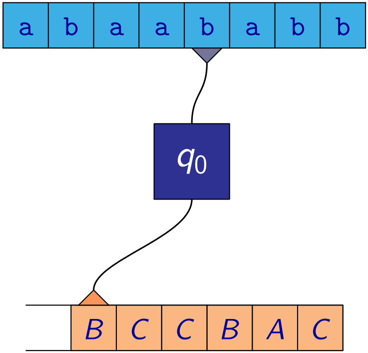
$$A \rightarrow aBC$$

$$B \rightarrow b$$

$$\vdots$$

a b a $\underline{A}\, C\, B\, A\, C$

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů



$\mathcal{M}$:

$\vdots$

$q_0 A \xrightarrow{a} q_0 BC$

$q_0 B \xrightarrow{b} q_0$

$\vdots$

$\mathcal{G}$:

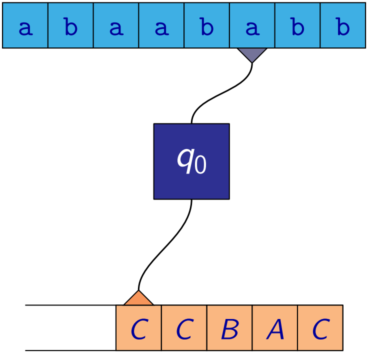
$\vdots$

$A \rightarrow aBC$

$B \rightarrow b$

$\vdots$

$$\mathtt{a\,b\,a}\,\underline{A}\,C\,B\,A\,C$$
$$\Rightarrow \mathtt{a\,b\,a\,a}\,\underline{B}\,C\,C\,B\,A\,C$$



$\mathcal{M}$:

$$\vdots$$
$$q_0 A \xrightarrow{a} q_0 BC$$
$$q_0 B \xrightarrow{b} q_0$$
$$\vdots$$

$\mathcal{G}$:

$$\vdots$$
$$A \to aBC$$
$$B \to b$$
$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
& \mathtt{aba}\,\underline{A}\,C\,B\,A\,C \\
\Rightarrow\ & \mathtt{abaa}\,\underline{B}\,C\,C\,B\,A\,C \\
\Rightarrow\ & \mathtt{abaab}\,\underline{C}\,C\,B\,A\,C
\end{aligned}
$$

Věta

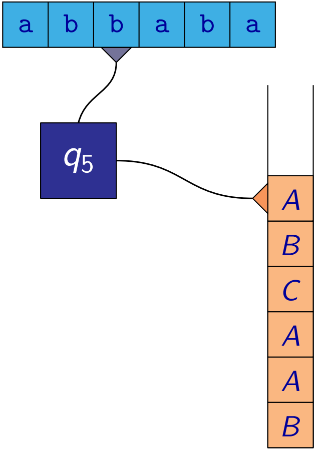
Ke každému zásobníkovému automatu $\mathcal{M}$ lze sestrojit zásobníkový automat $\mathcal{M}'$ s jedním stavem tž. $\mathcal{L}(\mathcal{M}') = \mathcal{L}(\mathcal{M})$.

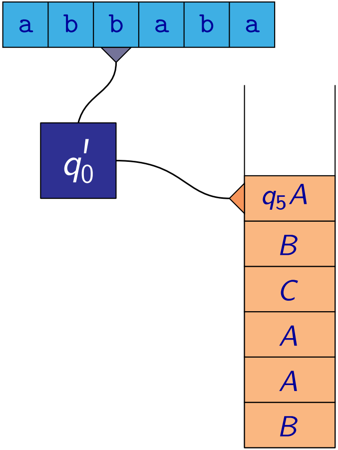
Myšlenka důkazu:

- Stav automatu $\mathcal{M}$ si budeme pamatovat na zásobníku.
- Pro $\delta(q, a, X) = \{(q', \varepsilon)\}$ musíme kontrolovat nejen, že jsme ve stavu q, ale také, že se dostaneme do stavu q'. (Další případy jsou přímočaré.)
- Každý zásobníkový symbol automatu $\mathcal{M}'$ je tedy trojice, kde si pamatujeme zásobníkový symbol, aktuální stav a aktuální stav ze symbolu o jedna níže na zásobníku.
- ZA $\mathcal{M}'$ nedeterministicky „hádá“ řídící stavy, do kterých se dostane $\mathcal{M}$ v okamžiku, kdy se daný zásobníkový symbol ocitne na vrcholu zásobníku.

Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

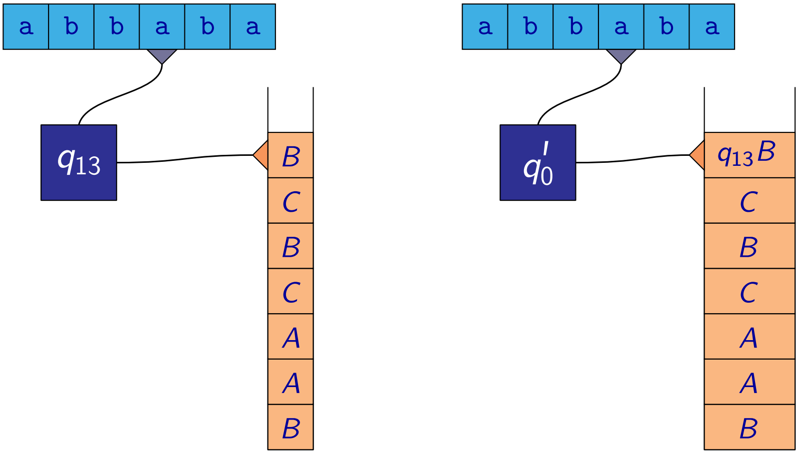
Chybná myšlenka:





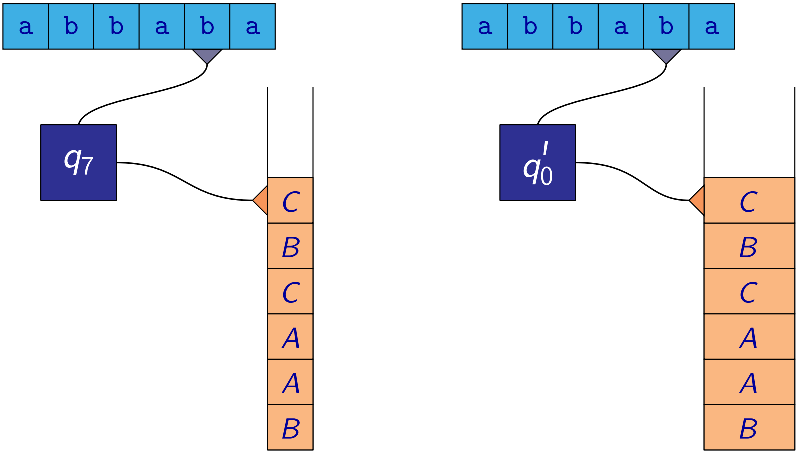
Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

Chybná myšlenka:



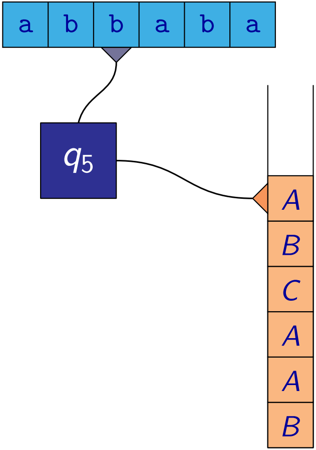
Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

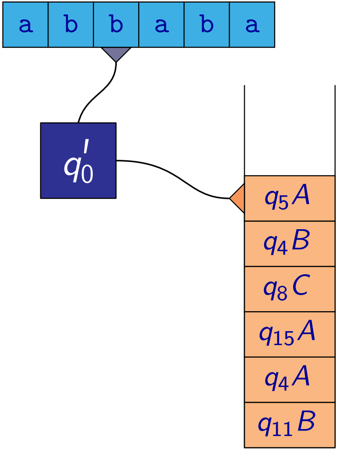
Chybná myšlenka:



Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

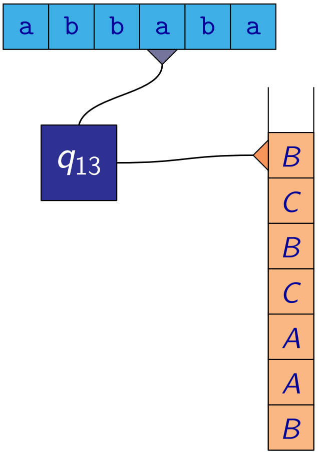
Další chybná myšlenka:

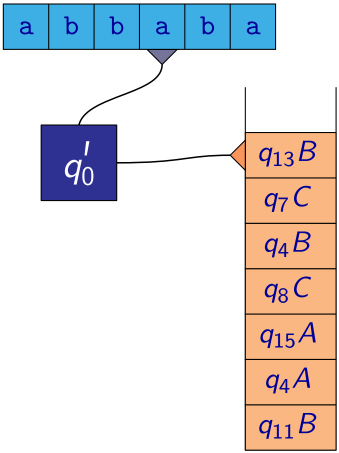




Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

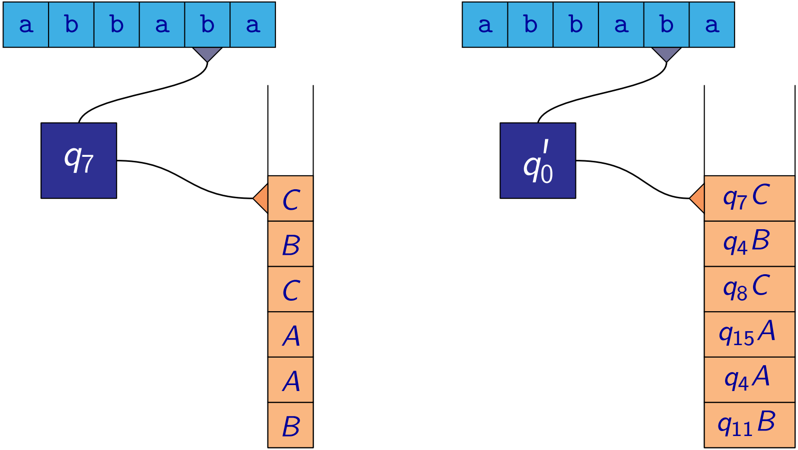
Další chybná myšlenka:



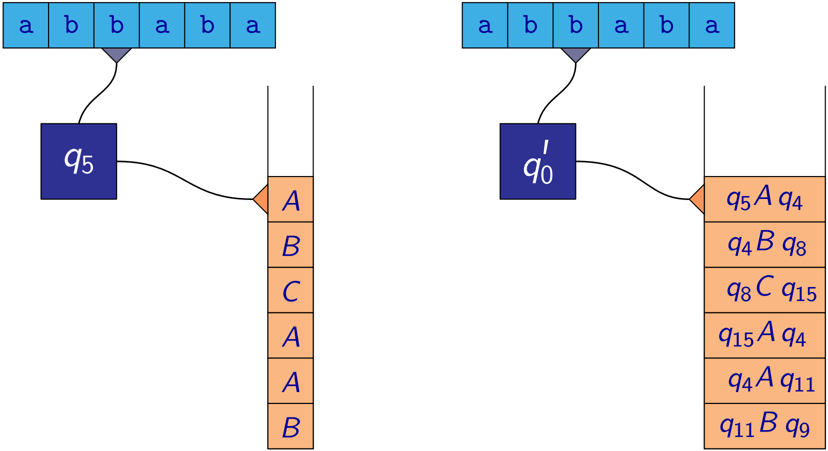


Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

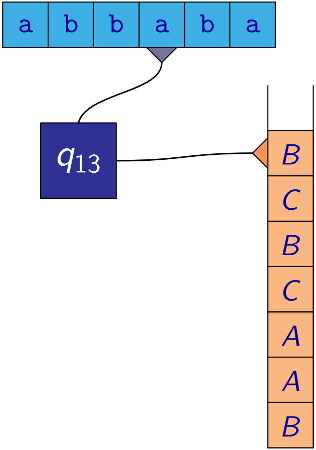
Další chybná myšlenka:

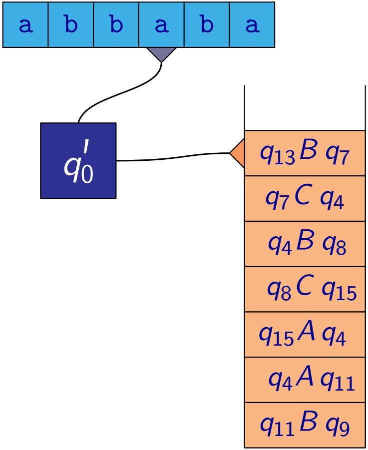


Korektní konstrukce:



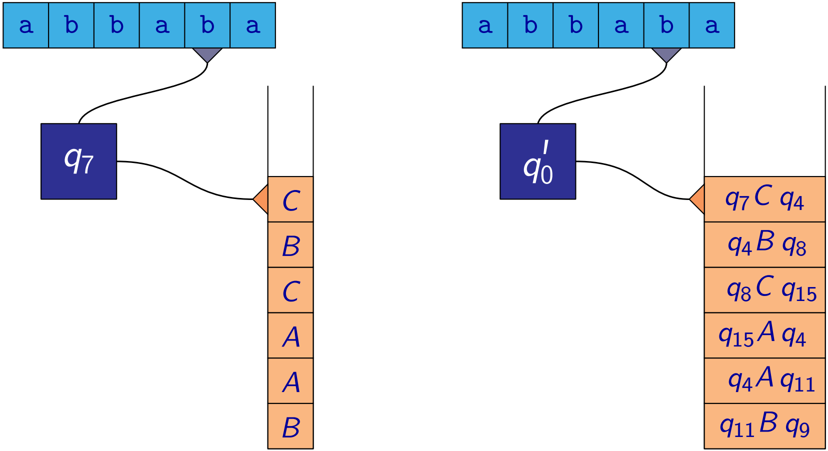
Korektní konstrukce:





Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

Korektní konstrukce:



Ekvivalence bezkontextových gramatik a zás. automatů

Tvrzení

K libovolné bezkontextové gramatice $\mathcal{G}$ je možné sestrojit (nedeterministický) zásobníkový automat $\mathcal{M}$ takový, že $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathcal{M})$.

Tvrzení

K libovolnému zásobníkovému automatu $\mathcal{M}$ je možné sestrojit bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$ takovou, že $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$.