

Cvičení 8

Příklad 1:

a) Navrhňte a popište pseudokódem algoritmus pro řešení následujícího problému:

VSTUP: Přirozené číslo n .

OTÁZKA: Je n prvočíslo?

- Nakreslete graf řídicího toku vámi navrženého algoritmu.
- Odsimulujte činnost tohoto algoritmu pro některé vstupy (např. $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 15$, $n = 16$, apod.). Určete, kolik kroků váš algoritmus pro tyto vstupy provede.

b) Navrhňte a popište pseudokódem algoritmus pro řešení následujícího problému (jedná se o problém rozkladu přirozeného čísla na prvočísla):

VSTUP: Přirozené číslo n , kde $n > 1$.

VÝSTUP: Prvočísla p_1, p_2, \dots, p_k taková, že $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k = n$.

Poznámka: Algoritmus může vzniknout vhodnou modifikací a rozšířením algoritmu navrženého v předchozím bodě nebo případně můžete tento algoritmus použít jako podprogram.

Příklad 2: Níže uvedený Algoritmus 1 by měl řešit následující problém:

VSTUP: Přirozené číslo n .

VÝSTUP: Hodnota $n!$ (tj. faktoriál čísla n).

Připomeňme, že funkce faktoriál je definována následovně:

- $0! = 1$,
- $n! = (n - 1)! \cdot n$ pro $n \geq 1$.

Pro jednoduchost předpokládejte, že hodnotami proměnných mohou být libovolná (neomezeně velká) přirozená čísla.

Algoritmus 1: Výpočet faktoriálu

```
FACTORIAL (n):  
  x := 1  
  for i := 2 to n do  
    x := x * i  
  return x
```

a) Nakreslete graf řídicího toku tohoto algoritmu.

- b) Popište výpočet, který tento algoritmus provede, pokud jako vstup dostane číslo 5. Vypište posloupnost jednotlivých konfigurací při tomto výpočtu.
- c) Nyní je cílem ukázat, že daný algoritmus je korektní, tj. pro každý vstup se po konečném počtu kroků zastaví a vydá správný výsledek.

V případě Algoritmu 1 je výhodné analýzu korektnosti rozdělit na dvě části — na analýzu případu, kdy $n = 0$, a na analýzu případů, kdy $n \geq 1$.

- Ukažte, že algoritmus korektně pracuje pro vstup, kde $n = 0$. Zde stačí odsimulovat výpočet daného algoritmu pro tento vstup (a zkontrolovat, že se zastaví a jeho výstup odpovídá očekávanému výsledku).

Dále tedy předpokládejte, že pro hodnotu na vstupu platí $n \geq 1$ (tj. následující body řešte s tímto dodatečným předpokladem):

- Zformulujte hypotézy ohledně toho, jaké invarianty platí v jednotlivých místech v kódu (tj. v jednotlivých vrcholech grafu řídicího toku). Snažte se navrhnout takové invarianty, aby se pomocí nich dala zdůvodnit korektnost výše uvedeného algoritmu.
- Ověřte, že invarianty navržené v předchozím bodě opravdu platí.
- S využitím těchto invariantů zdůvodněte, že platí, že pokud výpočet algoritmu skončí, tak algoritmus vrátí správný výsledek.
- Ukažte, že pro libovolný vstup platí, že výpočet výše uvedeného algoritmu skončí po konečném počtu kroků.

Příklad 3: Níže uvedený Algoritmus 2 by měl sloužit k nalezení prvku v seříděném poli. Jedná se o jednu možnou variantu algoritmu pro binární vyhledávání (metodou půlení intervalu). Z hlediska této úlohy není podstatné, jakého konkrétního typu jsou prvky tohoto pole, pro jednoduchost můžeme předpokládat, že jsou to celá čísla. Prvky pole jsou indexovány od nuly, tj. pokud pole A má n prvků, jedná se o prvky $A[0], A[1], \dots, A[n - 1]$.

Algoritmus by měl řešit následující problém:

VSTUP: Hledaná hodnota x , pole A o n prvcích (kde $n \geq 0$), jehož prvky jsou seříděny od nejmenšího po největší, tj. pro všechna přirozená čísla i a j taková, že $0 \leq i < j < n$, platí $A[i] \leq A[j]$.

VÝSTUP: Přirozené číslo i udávající index prvního výskytu hodnoty x v poli A nebo speciální hodnota NOTFOUND v případě, kdy se hodnota x v poli A nenachází.

Poznámka: Pro jednoduchost předpokládejte, že hodnoty proměnných mohou být libovolně velká celá čísla.

- a) Nakreslete graf řídicího toku tohoto algoritmu.
- b) Vypište posloupnost konfigurací ve výpočtu, kde vstupem jsou hodnoty $x = 6$, $A = [1, 3, 3, 4, 6, 6, 8, 9, 10, 10, 12, 13]$ a $n = 12$.

Algoritmus 2: Binární vyhledávání

```

1 BSEARCH(x, A, n):
2   ℓ := 0
3   r := n
4   while ℓ < r do
5     k := ⌊(ℓ + r) / 2⌋
6     if A[k] < x then
7       ℓ := k + 1
8     else
9       r := k
10  if ℓ < n and A[ℓ] = x then
11    return ℓ
12  return NOTFOUND

```

c) Řekněme, že bychom v algoritmu provedli následující změny (vždy jen jednu z těchto změn). Pro každou z těchto změn najděte příklad vstupu, při kterém algoritmus (s touto změnou) nepracuje korektně (např. se nezastaví, přistupuje k prvkům pole mimo povolený rozsah, vrací chybný výstup, apod.).

- Na řádku 4 změnit podmínku $\ell < r$ na $\ell \leq r$.
- Na řádku 7 změnit přiřazení $\ell := k + 1$ na $\ell := k$.
- Na řádku 9 změnit přiřazení $r := k$ na $r := k - 1$.
- Na řádku 9 změnit přiřazení $r := k$ na $r := k + 1$.
- Na řádku 5 změnit přiřazení $k := \lfloor (\ell + r) / 2 \rfloor$ na $k := \lceil (\ell + r) / 2 \rceil$ (resp. na $k := \lfloor (\ell + r + 1) / 2 \rfloor$).

d) Navrhněte vhodné invarianty, které podle vás platí v jednotlivých vrcholech grafu řídicího toku.

Nápověda: Před provedením testu $\ell < r$ na řádku 4 by mělo platit následující:

- $0 \leq \ell \leq r \leq n$,
- pro každé i takové, že $0 \leq i < \ell$, je $A[i] < x$,
- pro každé i takové, že $r \leq i < n$, je $A[i] \geq x$.

- Ověřte, že invarianty navržené v předchozím bodě opravdu platí.
- Zjistěte, zda se algoritmus pro každý vstup zastaví. Pokud ano, dokažte to, pokud ne, uveďte příklad vstupu, pro který se výpočet algoritmu nikdy nezastaví.
- Na základě předchozí analýzy buď zdůvodněte, že je výše uvedený algoritmus korektní, nebo uveďte příklad vstupu, pro který se nechová korektně.
- Řekněme, že bychom měli implementaci tohoto algoritmu, kde by pro hodnoty proměnných n , ℓ , r a k byla použita 32-bitová celá čísla se znaménkem (tj. čísla, jejichž hodnoty mohou

být v rozsahu $-2^{31}, \dots, 2^{31} - 1$) a i veškeré aritmetické operace s těmito proměnnými by byly prováděny na tomto datovém typu. Bude algoritmus, tak jak byl popsán, správně fungovat pro všechny vstupy, kde $n < 2^{31}$?

Příklad 4: Navrhněte algoritmus pro řešení následujícího problému. Jedná se o problém přiřadit vrcholům grafu barvy z dané množiny barev tak, aby žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou. Barvy jsou označeny čísly $1, 2, \dots, k$, kde k je celkový počet barev, které máme k dispozici. Pokud máme dán graf $G = (V, E)$, kde V je množina jeho vrcholů a E množina jeho hran, **obarvením** grafu G pomocí k barev budeme rozumět libovolnou takovou funkci $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, kde pro každou hranu $\{u, v\} \in E$ (kde $u, v \in V$) platí $f(u) \neq f(v)$.

VSTUP: Neorientovaný graf $G = (V, E)$ a přirozené číslo k .

VÝSTUP: Někaké obarvení grafu G pomocí k barev nebo informace, že žádné takové obarvení neexistuje.

Poznámky:

- Předpokládejte, že vrcholy grafu G jsou označeny čísly $1, 2, \dots, n$ (kde n je celkový počet vrcholů), a že graf G je zadán na vstupu ve formě, kdy je dáno toto číslo n a seznam hran, kde je každá hrana reprezentována jako dvojice čísel udávajících čísla vrcholů spojených touto hranou.
- Může být rozumné celé řešení rozložit na několik podprogramů (funkcí, procedur, metod, ...), řešících jednotlivé podúlohy. U podprogramů řešících jednoduché dílčí podúlohy, kde je jasné, jak by se daný podprogram dal implementovat, není třeba detailně (např. pomocí pseudokódu) popisovat činnost tohoto podprogramu, ale stačí stručně slovně popsat, *co* má tento podprogram dělat (není třeba popisovat, *jak* to bude dělat).

Oproti tomu klíčové části algoritmu by měly být popsány přesně a podrobně, nejlépe pomocí pseudokódu, tak, aby jejich případná implementace v nějakém programovacím jazyce spočívala jen v rutinním přepsání tohoto pseudokódu do daného programovacího jazyka.

- Při řešení může být výhodné použít rekurzi.
- Alespoň neformálně pak zdůvodněte, proč je vámi navržený algoritmus korektní, tj. čím je zaručeno, že se pro každý vstup zastaví po konečném počtu kroků a že vydá správný výsledek.