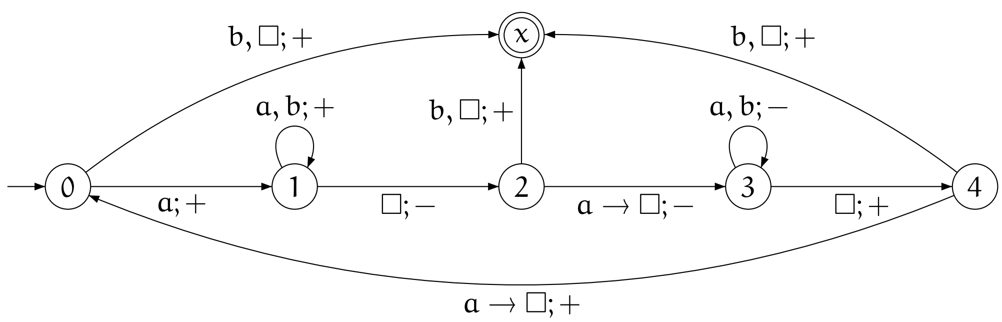
Cvičení 6

Příklad 1: Navrhněte Turingův stroj, který ze zadaného slova nad abecedou $\{a, b\}$ umaže od začátku i od konce nejdelší možné stejně dlouhé úseky znaků a. (Tj. ze slova '$aaababaa$' udělá '$abab$', kdežto z '$aaabab$' neumaže nic. Ze slova 'aaa' zbyde ε.)

Řešení: Nejprve si problém rozebereme. Pokud slovo začíná b, můžeme hned skončit. Pokud je na začátku a, možná by se někomu chtělo jej hned umazat – přepsat na $\square$, ale to není možné, protože jsme ještě nezkontrolovali, jestli je a i na konci slova. Proto se nejprve vždy musíme podívat i na konec, zda tam jsou odpovídající a, od konce už pak můžeme umazat a od začátku a umažeme až po návratu zpět.

Další otázkou je, jak si spočítáme, kolik a je na začátku i na konci společných. Bohužel zde narazíme na podobné omezení jako u automatů – samotný TS (jeho řídící jednotka) si nemůže znaky a spočítat, protože má jen omezeně mnoho stavů. Proto budeme muset znaky a umazávat postupně a synchronizovaně.

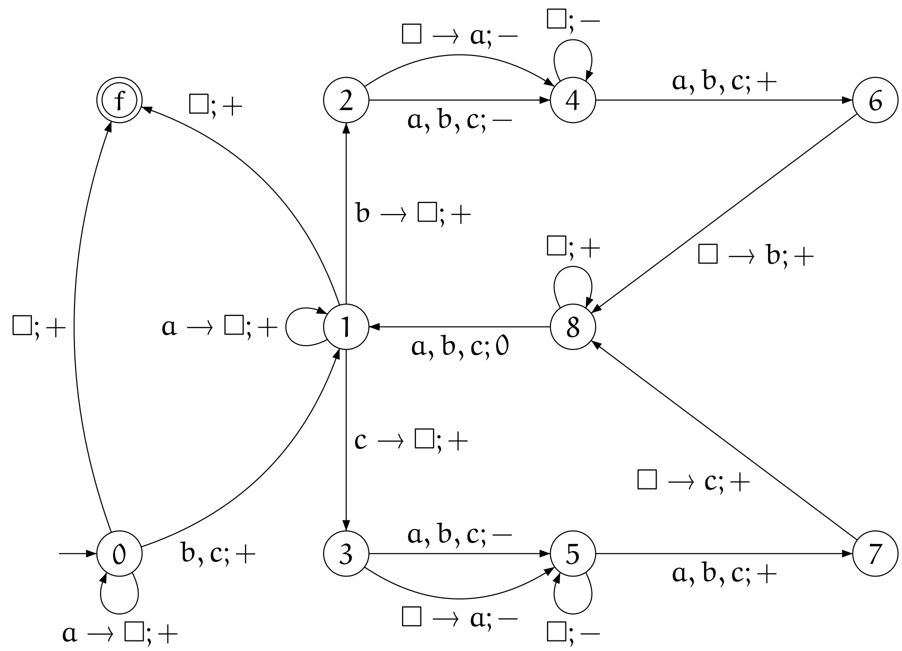


Jinými slovy, zkontrolujeme znak a na začátku, pak se přesuneme na konec, pokud tam a najdeme, umažeme jej, vrátíme se na začátek a odpovídající a také umažeme, a tak pořád dokola až do zastavení.

Příklad 2: Navrhněte Turingův stroj, který z daného slova nad abecedou $\{a, b, c\}$ vypustí všechny výskyty znaku a.

Řešení: Příklad se zdá jednoduchý – TS by mohl projít všechny znaky slova a znak a přepíše na $\square$. Je to však korektní postup?

Zadání přece říká, že se znaky a mají ***vypustit***, ne nahradit mezerami, takže my místo pouhého přepisování znaku a musíme všechny znaky za ním posunout o 1 dopředu. (Přepisování a na $\square$ lze tedy použít jen na prvních a posledních znacích slova.) Navíc si musíme uvědomit, že po vypuštění dalších znaků a se už bude zbytek slova posouvat o více než jeden znak doleva.



Výsledný Turingův stroj je již dosti složitý, neboť musí řešit množství problematických okrajových situací. Zde uvádíme neformální slovní popis jeho činnosti:

Na začátku jsou ve stavu 0 umazávány všechny znaky a. Po prvním výskytu jiného znaku stroj přejde do stavu 1, který je vlastně centrálním stavem hlavního pracovního cyklu stroje. Při každém průchodu tímto pracovním cyklem z 1 zpět do 1 je přenesen jeden následující znak b (horní větev) či c (dolní větev) z původní pozice na novou (vlevo). Znak se přenáší přes střední úsek mezer (který může být libovolně dlouhý), což nám umožňuje znaky a prostě mazat. Přenos je konkrétně implementován tak, že znak je na původní pozici smazán, pak stroj přejde po mezerách doleva na upravený úsek slova, tam přenesený znak zpětně zapíše a po mezerách zase přejde doprava.

Všimněte si “podivných” přechodů $2 \to 4$ a $3 \to 5$ po znaku □. Proč je tam zapisován znak a? Čtení znaku □ ve stavech 2, 4 znamená, že jsme dosáhli konce slova, avšak skončit ještě nemůžeme, neboť nám zbývá zapsat předchozí smazaný znak b nebo c. Pracovní cyklus proto musíme dokončit, ale zároveň si nemůžeme dovolit nechat na pravém konci slova jen mezery, protože by pak stroj ve stavu 8 skončil v nekonečné smyčce. Proto si pomůžeme zapsáním na konec znaku a, který se stejně pak smaže.

Příklad 3: Navrhněte Turingovy stroje, které budou rozpoznávat následující jazyky:

a) $\{ w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R \}$

b) $\{ wcw \mid w \in \{a, b\}^* \}$

Poznámka: Abeceda je $\{a, b, c\}$.

c) $\{ ww \mid w \in \{a, b\}^* \}$

Příklad 4: Navrhněte jednopáskový Turingův stroj, který dané číslo zapsané v binární soustavě celočíselně vydělí třemi.

Například pro vstup 100101 (což je v desítkové soustavě 37) bude výstupem řetězec 1100 (což je v desítkové soustavě 12), protože $\lfloor 37/3 \rfloor = 12$.

Návod: Vzpoměňte si na klasický školní algoritmus dělení čísel a postupujte přesně podle něj.

Řešení: Turingův stroj $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, p_0, F)$, kde $Q = \{p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2, r, f\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{\Box, 0, 1\}$, $F = \{f\}$ a kde přechodová funkce δ je dána následující tabulkou:

δ	$\Box$	0	1
p_0	$(r, \Box, -1)$	$(p_0, \Box, +1)$	$(p_1, \Box, +1)$
p_1	$(r, \Box, -1)$	$(p_2, \Box, +1)$	$(q_0, 1, +1)$
p_2	$(r, \Box, -1)$	$(q_1, 1, +1)$	$(q_2, 1, +1)$
q_0	$(f, \Box, 0)$	$(q_0, 0, +1)$	$(q_1, 0, +1)$
q_1	$(f, \Box, 0)$	$(q_2, 0, +1)$	$(q_0, 1, +1)$
q_2	$(f, \Box, 0)$	$(q_1, 1, +1)$	$(q_2, 1, +1)$
r	$(f, 0, +1)$	$(f, 0, +1)$	$(f, 0, +1)$

Příklad 5: Popište, jak je možné činnost jednopáskového Turingova stroje s oboustranně nekonečnou páskou simulovat jednopáskovým Turingovým strojem s jednostranně nekonečnou páskou.