

## Cvičení 5

**Příklad 1:** Uvažujme následující zásobníkový automat  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, C)$ , kde  $Q = \{q_1, q_2\}$ ,  $\Sigma = \{a, b, c\}$ ,  $\Gamma = \{A, B, C\}$  a kde přechodová funkce  $\delta$  je zadaná následující sadou pravidel:

$$\begin{array}{llll} q_1C \xrightarrow{a} q_1A & q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_2A \xrightarrow{a} q_2 \\ q_1C \xrightarrow{b} q_1B & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB & q_2B \xrightarrow{b} q_2 \\ q_1C \xrightarrow{c} q_2 & q_1A \xrightarrow{c} q_2A & q_1B \xrightarrow{c} q_2B & \end{array}$$

Automat  $\mathcal{M}$  přijímá prázdným zásobníkem.

Vypište posloupnost všech konfigurací, kterými automat  $\mathcal{M}$  projde při výpočtu nad slovem `abaacaaba`.

**Příklad 2:** Pro každý z následujících jazyků navrhnete zásobníkový automat, který daný jazyk přijímá.

Vytvořené automaty mohou být nedeterministické. U těch jazyků, kde je to možné, se pokuste sestrojít daný zásobníkový automat tak, aby byl deterministický.

*Poznámka:* Může být vhodné začít tím, že nejprve neformálně popíšete činnost vámi navrhovaného automatu pro daný jazyk. Tento popis by měl být dostatečně detailní na to, aby z něj bylo jasné, jak bude daný automat fungovat. Poté alespoň pro některé z následujících jazyků dotáhněte tuto konstrukci do podoby, kde uvedete formální popis daného automatu, tj. všechny jeho stavy, přechody, atd.

a)  $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

b)  $\{a^n b^m \mid n > m\}$

c)  $\{a^n b^i c b^j \mid n = i + j\}$

*Poznámka:* Abeceda je  $\{a, b, c\}$ .

d)  $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a > |w|_b\}$

e) Doplněk jazyka  $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ .

f)  $\{wcx \mid w, x \in \{a, b\}^* \text{ a } w^R \text{ je podslovem slova } x\}$

*Poznámka:* Abeceda je  $\{a, b, c\}$ .

g)  $\{w_1 c w_2 c \cdots c w_k \mid k \geq 1, \text{ pro každé } w_i \text{ platí } w_i \in \{a, b\}^* \text{ a existují nějaká } i \text{ a } j \text{ taková, že } w_i = w_j^R\}$

*Poznámka:* Abeceda je  $\{a, b, c\}$ . Všimněte si také, že pro daná  $i$  a  $j$  může platit  $i = j$ .

**Příklad 3:** Pro následující bezkontextovou gramatiku  $\mathcal{G}$  sestrojte zásobníkový automat  $\mathcal{M}$  přijímající jazyk generovaný touto gramatikou (tj. takový, že  $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ ):

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow \varepsilon \mid AS \\ A &\longrightarrow aAb \mid B \\ B &\longrightarrow \varepsilon \mid bB \end{aligned}$$

Uveďte nějakou derivaci slova  $aabbabbb$  v gramatice  $\mathcal{G}$  a nějaký přijímající výpočet automatu  $\mathcal{M}$  nad tímto slovem.

Je mezi touto derivací v gramatice  $\mathcal{G}$  a výpočtem automatu  $\mathcal{M}$  nějaký vztah?

**Příklad 4:** Uvažujme následující konstrukci: K danému zásobníkovému automatu  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , který přijímá pomocí přijímajících stavů, sestrojíme zásobníkový automat  $\mathcal{M}' = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, Z_0)$  přijímající prázdným zásobníkem, kde přechodová funkce  $\delta'$  obsahuje ty samé přechody, co funkce  $\delta$ , ke kterým navíc přidáme přechody typu

$$qX \xrightarrow{\varepsilon} q$$

pro každé  $q \in F$  a každé  $X \in \Gamma$ .

- Ukažte, že výše uvedená konstrukce obecně nevede k sestrojení ekvivalentního automatu, tj. uveďte konkrétní příklad zásobníkového automatu  $\mathcal{M}$  takového, že při použití výše uvedené konstrukce dostaneme automat  $\mathcal{M}'$ , kde  $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \neq \mathcal{L}(\mathcal{M}')$ .
- Navrhněte, jak tuto konstrukci upravit tak, aby výsledkem byl vždy ekvivalentní automat, tj. aby pro libovolný zásobníkový automat  $\mathcal{M}$  přijímající přijímajícím stavem aplikováním dané konstrukce vždy vznikl zásobníkový automat  $\mathcal{M}'$  přijímající prázdným zásobníkem takový, že  $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}')$ .

**Příklad 5:** Pro každý z následujících jazyků určete, jestli je daný jazyk (i) regulární, (ii) bezkontextový. Vaše odpovědi alespoň neformálně zdůvodněte.

- $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ nekončí sufixem } baa \text{ a } |w|_a \bmod 3 = 2\}$
- $\{a^j \mid j \text{ je mocninou čísla } 2\}$
- $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ je mocninou čísla } 2 \text{ zapsanou binárně}\}$
- jazyk popsáný regulárním výrazem  $a^*b^*c^*$
- $\{w \in \{a, +\}^* \mid w \text{ je generováno gramatikou } S \longrightarrow S+S \mid a\}$
- $\{w \in \{a, +, (, )\}^* \mid w \text{ je generováno gramatikou } S \longrightarrow S+S \mid (S) \mid a\}$
- $\{a^m b^n \mid (m \bmod 3) > (n \bmod 3)\}$
- $\{a^m b^n \mid n \neq m\}$
- $\{a^m b^n \mid m, n \geq 0, 5m + 3n = 24\}$
- $\{a^m b^n \mid m, n \geq 0, 5m - 3n = 24\}$

- k)  $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$
- l)  $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a > |w|_b \text{ a } |w|_b > |w|_c\}$
- m)  $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a > |w|_b \text{ nebo } |w|_b > |w|_c\}$
- n)  $\{a^n b^m c^k d^\ell \mid 2n = 3k \text{ nebo } 5m = 7\ell\}$
- o)  $\{a^n b^m c^k d^\ell \mid 2n = 3k \text{ a } 5m = 7\ell\}$
- p)  $\{a^n b^m c^k d^\ell \mid 2n = 3m \text{ a } 5k = 7\ell\}$
- q)  $\{a^n b^m c^k d^\ell \mid 2n = 3\ell \text{ a } 5k = 7m\}$
- r)  $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- s)  $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- t)  $\{ww \mid w \in \{a\}^*\}$