Cvičení 5

Příklad 1: Uvažujme následující zásobníkový automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, C)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{A, B, C\}$ a kde přechodová funkce δ je zadaná následující sadou pravidel:

$$
\begin{array}{llll}
q_1C \xrightarrow{a} q_1A & q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_2A \xrightarrow{a} q_2 \\
q_1C \xrightarrow{b} q_1B & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB & q_2B \xrightarrow{b} q_2 \\
q_1C \xrightarrow{c} q_2 & q_1A \xrightarrow{c} q_2A & q_1B \xrightarrow{c} q_2B &
\end{array}
$$

Automat $\mathcal{M}$ přijímá prázdným zásobníkem.

Vypište posloupnost všech konfigurací, kterými automat $\mathcal{M}$ projde při výpočtu nad slovem $abaacaaba$.

Řešení:

$$
\begin{array}{l}
(q_1,\ abaacaaba,\ C) \\
\longrightarrow (q_1,\ baacaaba,\ A) \\
\longrightarrow (q_1,\ aacaaba,\ BA) \\
\longrightarrow (q_1,\ acaaba,\ ABA) \\
\longrightarrow (q_1,\ caaba,\ AABA) \\
\longrightarrow (q_2,\ aaba,\ AABA) \\
\longrightarrow (q_2,\ aba,\ ABA) \\
\longrightarrow (q_2,\ ba,\ BA) \\
\longrightarrow (q_2,\ a,\ A) \\
\longrightarrow (q_2,\ \varepsilon,\ \varepsilon)
\end{array}
\qquad \text{nebo} \qquad
\begin{array}{ll}
q_1C & \xrightarrow{a} q_1A \\
& \xrightarrow{b} q_1BA \\
& \xrightarrow{a} q_1ABA \\
& \xrightarrow{a} q_1AABA \\
& \xrightarrow{c} q_2AABA \\
& \xrightarrow{a} q_2ABA \\
& \xrightarrow{a} q_2BA \\
& \xrightarrow{b} q_2A \\
& \xrightarrow{a} q_2
\end{array}
$$

Příklad 2: Pro každý z následujících jazyků navrhněte zásobníkový automat, který daný jazyk přijímá.

Vytvořené automaty mohou být nedeterministické. U těch jazyků, kde je to možné, se pokuste sestrojit daný zásobníkový automat tak, aby byl deterministický.

Poznámka: Může být vhodné začít tím, že nejprve neformálně popíšete činnost vámi navrhovaného automatu pro daný jazyk. Tento popis by měl být dostatečně detailní na to, aby z něj bylo jasné, jak bude daný automat fungovat. Poté alespoň pro některé z následujících jazyků dotáhněte tuto konstrukci do podoby, kde uvedete formální popis daného automatu, tj. všechny jeho stavy, přechody, atd.

a) $\{ ww^R \mid w \in \{a, b\}^* \}$

b) $\{ a^n b^m \mid n > m \}$

c) $\{ a^n b^i c b c^j \mid n = i + j \}$

   Poznámka: Abeceda je $\{a, b, c\}$.

d) $\{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a > |w|_b \}$

e) Doplněk jazyka $\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$.

Řešení: Zasobníkový automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, X)$ přijímající prázdným zásobníkem, kde $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{X, A\}$ a kde přechodová funkce δ je daná následující sadou pravidel:

$$
\begin{array}{lll}
q_0X \xrightarrow{a} q_0AX & q_0X \xrightarrow{b} q_2X & \\
q_0A \xrightarrow{a} q_0AA & q_0A \xrightarrow{b} q_1 & q_0A \xrightarrow{\varepsilon} q_3A \\
q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X & \\
q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_1 & q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_3A \\
q_2X \xrightarrow{a} q_2X & q_2X \xrightarrow{b} q_2X & q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_3X \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2A & q_2A \xrightarrow{b} q_2A & q_2A \xrightarrow{\varepsilon} q_3A \\
q_3A \xrightarrow{\varepsilon} q_3 & q_3X \xrightarrow{\varepsilon} q_3 &
\end{array}
$$

Poznámka: Tentýž automat bude fungovat i při přijímání přijímajícím stavem, pokud se zvolí $F = \{q_3\}$.

f) $\{ wcx \mid w, x \in \{a, b\}^*$ a w^R je podslovem slova $x \}$

Poznámka: Abeceda je $\{a, b, c\}$.

g) $\{ w_1cw_2c \cdots cw_k \mid k \geq 1$, pro každé w_i platí $w_i \in \{a, b\}^*$ a existují nějaká i a j taková, že $w_i = w_j^R \}$

Poznámka: Abeceda je $\{a, b, c\}$. Všimněte si také, že pro daná i a j může platit $i = j$.

Řešení: Zasobníkový automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z)$ přijímající prázdným zásobníkem, kde $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{Z, A, B\}$ a kde přechodová funkce δ je daná následující sadou pravidel:

$$
\begin{array}{llll}
q_0Z \xrightarrow{a} q_1Z & q_0Z \xrightarrow{b} q_1Z & q_0Z \xrightarrow{c} q_0Z & q_0Z \xrightarrow{\varepsilon} q_2Z \\
q_1Z \xrightarrow{a} q_1Z & q_1Z \xrightarrow{b} q_1Z & q_1Z \xrightarrow{c} q_0Z & \\
q_2Z \xrightarrow{a} q_2AZ & q_2Z \xrightarrow{b} q_2BZ & q_2Z \xrightarrow{c} q_3Z & \\
q_2Z \xrightarrow{a} q_5Z & q_2Z \xrightarrow{b} q_5Z & & q_2Z \xrightarrow{\varepsilon} q_5Z \\
q_2A \xrightarrow{a} q_2AA & q_2A \xrightarrow{b} q_2BA & q_2A \xrightarrow{c} q_3A & \\
q_2A \xrightarrow{a} q_5A & q_2A \xrightarrow{b} q_5A & & q_2A \xrightarrow{\varepsilon} q_5A \\
q_2B \xrightarrow{a} q_2AB & q_2B \xrightarrow{b} q_2BB & q_2B \xrightarrow{c} q_3B & \\
q_2B \xrightarrow{a} q_5B & q_2B \xrightarrow{b} q_5B & & q_2B \xrightarrow{\varepsilon} q_5B \\
q_3Z \xrightarrow{a} q_4Z & q_3Z \xrightarrow{b} q_4Z & q_3Z \xrightarrow{c} q_3Z & q_3Z \xrightarrow{\varepsilon} q_5Z \\
q_3A \xrightarrow{a} q_4A & q_3A \xrightarrow{b} q_4A & q_3A \xrightarrow{c} q_3A & q_3A \xrightarrow{\varepsilon} q_5A \\
q_3B \xrightarrow{a} q_4B & q_3B \xrightarrow{b} q_4B & q_3B \xrightarrow{c} q_3B & q_3B \xrightarrow{\varepsilon} q_5B \\
q_4Z \xrightarrow{a} q_4Z & q_4Z \xrightarrow{b} q_4Z & q_4Z \xrightarrow{c} q_3Z & \\
q_4A \xrightarrow{a} q_4A & q_4A \xrightarrow{b} q_4A & q_4A \xrightarrow{c} q_3A & \\
q_4B \xrightarrow{a} q_4B & q_4B \xrightarrow{b} q_4B & q_4B \xrightarrow{c} q_3B & \\
q_5A \xrightarrow{a} q_5 & q_5B \xrightarrow{b} q_5 & q_5Z \xrightarrow{c} q_6Z & q_5Z \xrightarrow{\varepsilon} q_6 \\
q_6Z \xrightarrow{a} q_6Z & q_6Z \xrightarrow{b} q_6Z & q_6Z \xrightarrow{c} q_6Z & q_6Z \xrightarrow{\varepsilon} q_6
\end{array}
$$

Poznámka: Tentýž automat bude fungovat i při přijímání přijímajícím stavem, pokud se zvolí $F = \{q_6\}$.

Příklad 3: Pro následující bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$ sestrojte zásobníkový automat $\mathcal{M}$ přijímající jazyk generovaný touto gramatikou (tj. takový, že $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$):

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & \varepsilon \mid AS \\ A & \longrightarrow & aAb \mid B \\ B & \longrightarrow & \varepsilon \mid bB \end{array}$$

Uveďte nějakou derivaci slova $aabbabbb$ v gramatice $\mathcal{G}$ a nějaký přijímajímající výpočet automatu $\mathcal{M}$ nad tímto slovem.

Je mezi touto derivací v gramatice $\mathcal{G}$ a výpočtem automatu $\mathcal{M}$ nějaký vztah?

Řešení: Automat $\mathcal{M} = \{q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, S$, kde $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{S, A, B, a, b\}$ a kde přechodová funkce δ je dána následující sadou pravidel:

$$\begin{array}{ll} q_0S \xrightarrow{\varepsilon} q_0 & \quad q_0a \xrightarrow{a} q_0 \\ q_0S \xrightarrow{\varepsilon} q_0AS & \quad q_0b \xrightarrow{b} q_0 \\ q_0A \xrightarrow{\varepsilon} q_0aAb & \\ q_0A \xrightarrow{\varepsilon} q_0B & \\ q_0B \xrightarrow{\varepsilon} q_0 & \\ q_0B \xrightarrow{\varepsilon} q_0bB & \end{array}$$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow AS \\ &\Rightarrow aAbS \\ &\Rightarrow aaAbbS \\ &\Rightarrow aaBbbS \\ &\Rightarrow aabbS \\ &\Rightarrow aabbAS \\ &\Rightarrow aabbaAbS \\ &\Rightarrow aabbaBbS \\ &\Rightarrow aabbabBbS \\ &\Rightarrow aabbabbBbS \\ &\Rightarrow aabbabbbS \\ &\Rightarrow aabbabbb \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_0S &\xrightarrow{\varepsilon} q_0AS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0aAbS \\ &\xrightarrow{a} q_0AbS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0aAbbS \\ &\xrightarrow{a} q_0AbbS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0BbbS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0bbS \\ &\xrightarrow{b} q_0bS \\ &\xrightarrow{b} q_0S \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0AS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0aAbS \\ &\xrightarrow{a} q_0AbS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0BbS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0bBbS \\ &\xrightarrow{b} q_0BbS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0bBbS \\ &\xrightarrow{b} q_0BbS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0bS \\ &\xrightarrow{b} q_0S \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 \end{aligned}$$

Příklad 4: Uvažujme následující konstrukci: K danému zásobníkovému automatu $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, který přijímá pomocí přijímajících stavů, sestrojíme zásobníkový automat $\mathcal{M}' = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, Z_0)$ přijímající prázdným zásobníkem, kde přechodová funkce δ' obsahuje ty samé přechody, co funkce δ, ke kterým navíc přidáme přechody typu

$$qX \xrightarrow{\varepsilon} q$$

pro každé $q \in F$ a každé $X \in \Gamma$.

a) Ukažte, že výše uvedená konstrukce obecně nevede k sestrojení ekvivalentního automatu, tj. uveďte konkrétní příklad zásobníkového automatu $\mathcal{M}$ takového, že při použití výše uvedené konstrukce dostaneme automat $\mathcal{M}'$, kde $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \neq \mathcal{L}(\mathcal{M}')$.

Řešení: Například zásobníkový automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, X, F)$, přijímající pomocí přijímajících stavů, kde $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{X, A, B\}$, $F = \{q_2\}$, a přechodová funkce δ je dána následující sadou pravidel:

$$\begin{array}{llll}
q_0X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1A \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1 & q_2B \xrightarrow{b} q_2B \\
 & q_1A \xrightarrow{b} q_1 & q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & q_2X \xrightarrow{b} q_2X \\
 & q_1A \xrightarrow{c} q_2A & &
\end{array}$$

Tento automat přijímá jazyk

$$L = \{a^nb^n \mid n \geq 1\} \cup \{a^nc \mid n \geq 1\}.$$

Po provedení výše uvedené konstrukce bude automat $\mathcal{M}'$ přijímat kromě všech slov z jazyka L navíc také všechna slova tvaru a^ncb^m, kde $n \geq 1$ a $m \geq 1$.

b) Navrhněte, jak tuto konstrukci upravit tak, aby výsledkem byl vždy ekvivalentní automat, tj. aby pro libovolný zásobníkový automat $\mathcal{M}$ přijímající přijímajícím stavem aplikováním dané konstrukce vždy vznikl zásobníkový automat $\mathcal{M}'$ přijímající prázdným zásobníkem takový, že $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}')$.

Řešení: K danému zásobníkovému automatu $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, X_0, F)$, který přijímá pomocí přijímajících stavů, sestrojíme zásobníkový automat $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', X_0')$, přijímající prázdným zásobníkem, kde:

- $Q' = Q \cup \{q_0', q_f\}$, kde q_0' a q_f jsou nové stavy nevyskytující se v Q,
- $\Gamma' = \Gamma \cup \{X_0'\}$, kde X_0' je nový zásobníkový symbol nevyskytující se v Γ,
- δ' obsahuje všechna pravidla z δ a navíc pravidla
  - $q_0'X_0' \xrightarrow{\varepsilon} q_0X_0X_0'$,
  - $qX \xrightarrow{\varepsilon} q_f$ pro každé $q \in F$ a $X \in \Gamma'$,
  - $q_fX \xrightarrow{\varepsilon} q_f$ pro každé $X \in \Gamma'$.

Příklad 5: Pro každý z následujících jazyků určete, jestli je daný jazyk (i) regulární, (ii) bezkontextový. Vaše odpovědi alespoň neformálně zdůvodněte.

a) $\{ w \in \{a, b\}^* \mid w$ nekončí sufixem $\mathtt{baa}$ a $|w|_a \bmod 3 = 2 \}$

Řešení: Je regulární, je bezkontextový.

b) $\{ a^j \mid j$ je mocninou čísla $2 \}$

Řešení: Není regulární, není bezkontextový.

c) $\{ w \in \{0, 1\}^* \mid w$ je mocninou čísla 2 zapsanou binárně$\}$

Řešení: Je regulární, je bezkontextový.

d) jazyk popsaný regulárním výrazem $a^*b^*c^*$

Řešení: Je regulární, je bezkontextový.

e) $\{ w \in \{a, +\}^* \mid w$ je generováno gramatikou $S \longrightarrow S{+}S \mid a \}$

Řešení: Je regulární, je bezkontextový.

f) $\{ w \in \{a, +, (,)\}^* \mid w$ je generováno gramatikou $S \longrightarrow S{+}S \mid (S) \mid a \}$

Řešení: Není regulární, je bezkontextový.

g) $\{ a^m b^n \mid (m \bmod 3) > (n \bmod 3) \}$

Řešení: Je regulární, je bezkontextový.

h) $\{ a^m b^n \mid n \neq m \}$

Řešení: Není regulární, je bezkontextový.

i) $\{ a^m b^n \mid m, n \geq 0,\ \ 5m + 3n = 24 \}$

Řešení: Je regulární, je bezkontextový.

j) $\{ a^m b^n \mid m, n \geq 0,\ \ 5m - 3n = 24 \}$

Řešení: Není regulární, je bezkontextový.

k) $\{ w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c \}$

Řešení: Není regulární, není bezkontextový.

l) $\{ w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a > |w|_b$ a $|w|_b > |w|_c \}$

Řešení: Není regulární, není bezkontextový.

m) $\{ w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a > |w|_b$ nebo $|w|_b > |w|_c \}$

Řešení: Není regulární, je bezkontextový.

n) $\{ a^n b^m c^k d^\ell \mid 2n = 3k$ nebo $5m = 7\ell \}$

Řešení: Není regulární, je bezkontextový.

o) $\{\, a^n b^m c^k d^\ell \mid 2n = 3k \text{ a } 5m = 7\ell \,\}$

Řešení: Není regulární, není bezkontextový.

p) $\{\, a^n b^m c^k d^\ell \mid 2n = 3m \text{ a } 5k = 7\ell \,\}$

Řešení: Není regulární, je bezkontextový.

q) $\{\, a^n b^m c^k d^\ell \mid 2n = 3\ell \text{ a } 5k = 7m \,\}$

Řešení: Není regulární, je bezkontextový.

r) $\{\, ww \mid w \in \{a, b\}^* \,\}$

Řešení: Není regulární, není bezkontextový.

s) $\{\, ww^R \mid w \in \{a, b\}^* \,\}$

Řešení: Není regulární, je bezkontextový.

t) $\{\, ww \mid w \in \{a\}^* \,\}$

Řešení: Je regulární, je bezkontextový.