Distribuované algoritmy

Distribuované algoritmy

Distribuované systémy:

- skládají se s mnoha paralelně běžících **procesů**
- tyto procesy jsou vzájemně propojeny pomocí **sítě**
- komunikují spolu posíláním **zpráv** přes síťová spojení

Při návrhu a analýze algoritmů pro distribuované systémy je často hlavní pozornost soustředěna na otázky týkající se vzájemné komunikace mezi procesy, synchronizace mezi nimi, množství posílaných zpráv, apod.

Obecně je možné distribuované systémy dělit podle řady různých hledisek.

Jedno z hlavních rozdělení:

- **synchronní**
- **asynchronní**

Synchronní distribuované algoritmy

Popíšeme si jednu z možných variant **synchronních systémů**.

Struktura **komunikační sítě** může být popsána jako orientovaný graf $G = (V, E)$:

- vrcholy grafu představují uzly této sítě
- hrany představují komunikační linky mezi těmito uzly, přes které je možné posílat zprávy

(Typicky se předpokládá, že tento graf je silně souvislý, tj. že existuje cesta z každého vrcholu do každého.)

Je specifikována **množina zpráv** M, které lze přes tyto linky posílat.

- Speciální hodnota *null* (kde $null \notin M$) označuje absenci posílané zprávy, tj. že v daném okamžiku není posílána žádná zpráva.
- V jednom okamžiku je každá z linek z množiny E schopna přenášet jeden prvek z množiny $M \cup \{null\}$.

Synchronní distribuované algoritmy

S každým vrcholem $i \in V$ je spojen jeden **proces**, označený P_i, skládající se z následujících komponent:

- $States_i$ — množina **stavů** (může být nekonečná)
- $Init_i$ — neprázdná podmnožina množiny $States_i$, počáteční stavy
- $msgs_i$ — funkce typu $States_i \times Out\text{-}Links_i \to M \cup \{null\}$,
  — reprezentuje generování zpráv poslaných daným procesem po jednotlivých linkách

  ($Out\text{-}Links_i$ je množina hran vedoucích z vrcholu i)
- $trans_i$ — funkce přiřazující stavům z množiny $States_i$ a vektorům (indexovaných prvky množiny $In\text{-}Links_i$) hodnot z $M \cup \{null\}$ prvky z množiny $States_i$
  — reprezentuje přechody mezi stavy procesu na základě aktuálního stavu a zpráv přijatých daným procesem po jednotlivých linkách

  ($In\text{-}Links_i$ je množina hran vedoucích do vrcholu i)

Synchronní distribuované algoritmy

Běh systému začíná v konfiguraci, kde každý proces P_i je v některém ze stavů z množiny $Init_i$.

Všechny procesy neustále opakují následující dva kroky, kde každý z těchto kroků provádějí všechny procesy synchronizovaně najednou:

- Každý proces P_i vygeneruje zprávy dané funkcí $msgs_i$, které pošle na příslušné linky.

  (Můžeme si představovat, že se tyto zprávy zapíšou do příslušných hran grafu.)

- Každý proces P_i změní svůj stav podle funkce $trans_i$ a přijatých zpráv.

  (Můžeme si představovat, že proces přečte tyto zprávy z příslušných hran grafu, a že poté jsou tyto zprávy z těchto hran smazány.)

Jednomu provedení těchto dvou kroků budeme říkat jedno **kolo** (**round**) posílání zpráv.

Synchronní distribuované algoritmy

- Obecně zde neklademe žádné omezení na to, jaké množství výpočtů musí daný proces P_i provést, aby spočítal hodnoty funkcí $msgs_i$ a $trans_i$.
- Tyto systémy, tak jak byly popsány, jsou plně **deterministické** — pro dané počáteční stavy jednotlivých procesů existuje jediný možný průběh výpočtu.
- Obecně bychom mohli uvažovat i **nedeterministické** systémy, kde by $msgs_i$ a $trans_i$ nebyly funkce, ale relace.

  Případně bychom mohli uvažovat i další možná zobecnění, např. **randomizované** systémy, kde by možné přechody mezi stavy a generované zprávy byly vybírány náhodně podle nějakého pravděpodobnostního rozdělení.

Synchronní distribuované algoritmy

- **Zastavení** procesu P_i je možné modelovat pomocí nějakého speciálního stavu *halt*, kdy proces v tomto stavu již nebude posílat žádné zprávy, přijímané zprávy bude ignorovat a bude už neustále zůstávat v tomto stavu.

- Standardně můžeme předpokládat, že všechny procesy startují najednou na začátku výpočtu.

  Pokud bychom chtěli modelovat to, že procesy startují postupně v různých kolech během výpočtu, můžeme to modelovat například tak, že procesy jsou na začátku v nějakém speciálním stavu *inactive*.

  Součástí grafu bude speciální vrchol s procesem reprezentujícím **prostředí** (**environment**), který v určitých časech bude jednotlivým procesům posílat speciální zprávy *wakeup*, kterými je převede ze stavu *inactive* do aktivního stavu.

Synchronní distribuované algoritmy

Specifickou podoblastí jsou algoritmy pro distribuované systémy, u kterých se počítá s tím, že bude docházet k různým druhům chyb a výpadků, např.:

- ztrátám posílaných zpráv
- chybám při přenosu zpráv, kdy je přijata jiná zpráva, než byla odeslána
- nečekanému zastavení některých procesů
- chybnému chování některých procesů

Výše uvedený model je možné rozšířit o modelování různý druhů těchto chyb.

Synchronní distribuované algoritmy

Formálně můžeme běh daného synchronního distribuovaného systému popsat například jako posloupnost:

$$C_0, \mu_1, \nu_1, C_1, \mu_2, \nu_2, C_2, \ldots$$

kde:

- C_r — reprezentuje stavy jednotlivých procesů po r kolech výpočtu, tj. C_r je funkce, která každému vrcholu $i \in V$ přiřazuje stav z množiny $States_i$.
- μ_r — reprezentuje zprávy poslané jednotlivými procesy v kole r, tj. μ_r je funkce, která každé hraně z množiny E přiřazuje hodnotu z množiny $M \cup \{null\}$
- ν_r — reprezentuje zprávy přijaté jednotlivými procesy v kole r, tj. ν_r je funkce, která každé hraně z množiny E přiřazuje hodnotu z množiny $M \cup \{null\}$

  — ν_r se může lišit od μ_r, pokud modelujeme chyby při přenosu (ztráty zpráv, apod.)

Synchronní distribuované algoritmy

Co se týká **vstupu** a **výstupu**, předpokládá se, že:

- jednotlivé části vstupu jsou nějakým způsobem uloženy v počátečních stavech procesů,
- jednotlivé části výstupu budou poté, co výpočet skončí, nějakým způsobem uloženy ve stavech jednotlivých procesů.

Poznámka: U distribuovaných systémů nemusí být vždy úplně snadné rozpoznat, kdy výpočet končí.

U některých algoritmů například může být na závěr výpočtu provedena nějaká závěrečná fáze, kdy jsou jednotlivé procesy rozesláním příslušných zpráv informovány o tom, že výpočet skončil.

Synchronní distribuované algoritmy

Z hlediska složitosti se u synchronních distribuovaných systémů zkoumají především:

- **časová složitost** — doba výpočtu se většinou počítá jako počet provedených kol posílání zpráv
- **komunikační složitost** — většinou se počítá jako celkový počet zpráv poslaných během výpočtu

  Někdy se bere v úvahu i velikost těchto zpráv, tj. celkový počet bitů ve všech poslaných zprávách.

Leader election

Ukážeme si několik příkladů distribuovaných algoritmů.

Budou řešit problém, kdy je mezi všemi procesy třeba zvolit jeden, který pak například provede nějakou akci.

Tento problém se nazývá **leader election**.

Poznámka: Řešení tohoto problému bude typicky sloužit jako součást nějakého většího algoritmu.

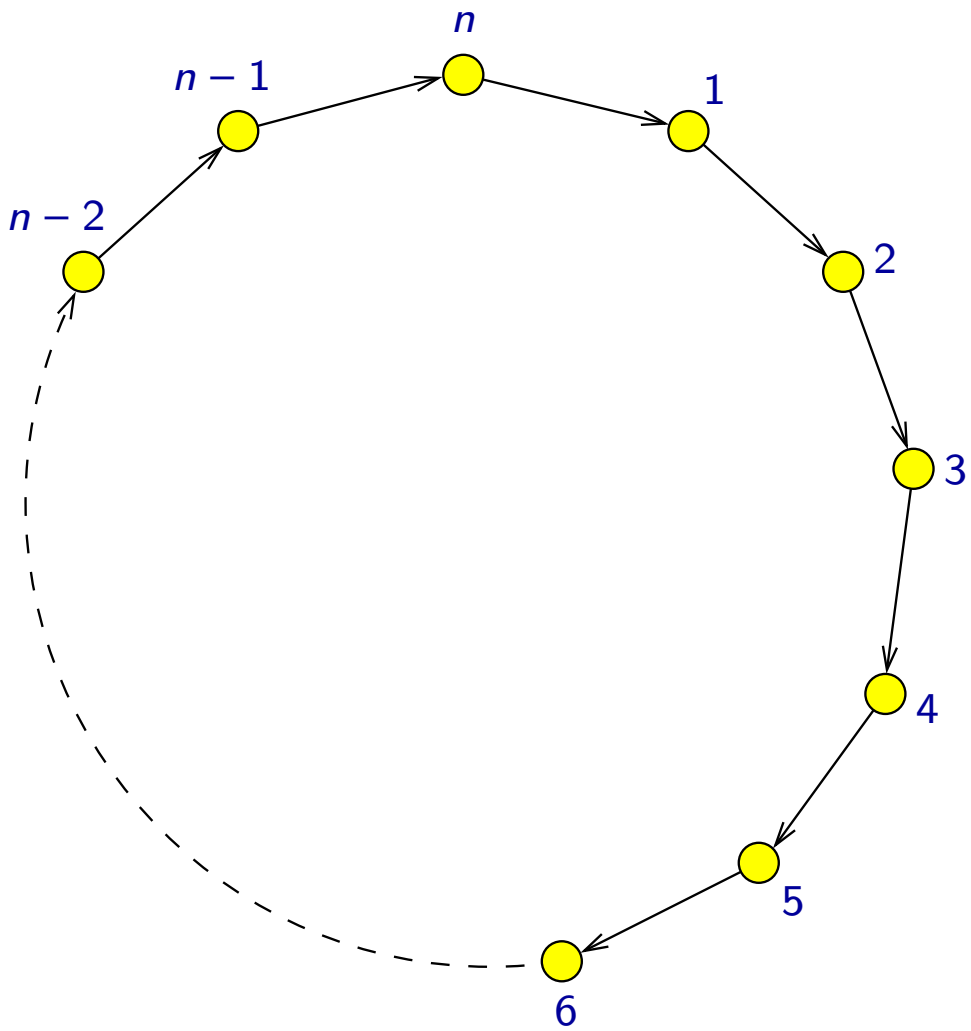
Nejedná se o typický vstupně-výstupní problém, kde by bylo určeno, co je vstupem a výstupem.

Cílem je, aby po skončení algoritmu právě jeden z procesů přešel do nějakého speciálního stavu, označeného např. LEADER.

Ostatní procesy pak může tento zvolený proces informovat o svém zvolení rozesláním příslušných zpráv.

Leader election

Zaměřme se nejprve na jednodušší případ, kdy má síť podobu (jednosměrného) **kruhu**:



Leader election

- Vrcholy kruhu označme čísly $1, 2, \ldots, n$.
- Při počítání s indexy vrcholů budeme ztotožňovat vrcholy s indexy, které se rovnají modulo n.

  Například $i + 1$ bude v případě, že $i = n$, označovat vrchol 1.
  Podobně, $i - 1$ bude pro $i = 1$ označovat vrchol n.
- Předpokládejme ovšem, že jednotlivé procesy neznají svou pozici na kruhu, tj. neví, na kterém vrcholu se nachází, ani neznají celkový počet procesů n.
- Na druhou stranu předpokládejme, že každý proces ví:
  - kam má poslat zprávu, kterou chce poslat svému následníkovi na kruhu
  - odkud má přijímat zprávy od svého předchůdce na kruhu

  Tj. že každý proces má nějak lokálně pojmenované hrany, které do něj a z něj vedou, nezná ale čísla vrcholů, ze kterých a kam tyto hrany vedou.

Leader election

Není těžké si rozmyslet, že pokud by všechny procesy byly naprosto identické a začínaly by všechny v tomtéž počátečním stavu, tak deterministickým distribuovaným algoritmem není možné tento problém řešit:

- Indukcí podle počtu provedených kol posílání zpráv můžeme ukázat, že pro každé $r \in \mathbb{N}$ platí, že po provedení r kol by všechny procesy byly ve stejném stavu.

  (Deterministické procesy, které jsou ve stejném stavu a dostanou stejné zprávy, přejdou do téhož stavu.)

Potřebujeme tedy nějaký způsob, jak **rozbít symetrii** (**symmetry breaking**).

Leader election

Budeme předpokládat, že každý proces má přiděleno **unikátní ID** (**UID**):

- Hodnoty UID jsou prvky z nějaké dostatečně velké **lineárně uspořádané** množiny, např. z množiny všech přirozených čísel $\mathbb{N}$.

  Tj. pro libovolná dvě UID je možné určit, které z nich je větší a které menší, nebo případně, že se rovnají.

- Tato UID jsou unikátní v tom smyslu, že dva různé procesy nikdy nebudou mít přiděleno totéž UID.

- Hodnoty UID nejsou v žádném vztahu k indexům vrcholů na kruhu a nemusí ani tvořit posloupnost po sobě jdoucích čísel.

- Každý proces zná své UID.

- S hodnotami UID mohou procesy pracovat stejně jako s jakýmikoli jinými hodnotami (např. ukládat je do paměti, posílat ve zprávách, apod.)

Leader election — algoritmus LCR

První algoritmus je jednoduché přímočaré řešení — označme tento algoritmus jako **algoritmus LCR** podle jmen autorů (Le Lann, Chang, Roberts).

Neformální popis:

- Každý proces pošle své UID podél kruhu.
- Když proces přijme zprávu s nějakým UID, porovná toto UID se svým UID:
  - Pokud je toto UID větší než jeho vlastní, přepošle jej dál.
  - Pokud je toto UID menší než jeho vlastní, nepřeposílá ho dál.
  - Pokud je toto UID stejné jako jeho vlastní, prohlásí se daný proces zvoleným leaderem.

Leader election — algoritmus LCR

Formální popis:

- Množina zpráv M: množina všech UID
- Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jsou stavy z množiny $States_i$ dány hodnotami následujících tří proměnných:
  - u — typu UID
  - $send$ — bude obsahovat hodnoty typu UID nebo $null$
  - $status$ — bude nabývat hodnot z množiny $\{\text{UNKNOWN}, \text{LEADER}\}$
- Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ množina $Init_i$ obsahuje jediný počáteční stav, daný následujícími počátečními hodnotami proměnných:
  - u — hodnota UID procesu na vrcholu i
  - $send$ — stejná hodnota, jako je počáteční hodnota proměnné u, tj. UID procesu na vrcholu i
  - $status$ — na začátku inicializováno na hodnotu UNKNOWN

Leader election — algoritmus LCR

- Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je funkce $msgs_i$ popisující generování zpráv dána následovně:
  - pošli aktuální hodnotu proměnné *send* procesu $i + 1$
- Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je funkce $trans_i$ popisující změny stavu procesu dána následujícím pseudokódem:

---

send := *null*
if přišla zpráva obsahující UID v **then**
  case
    $v > u$: *send* := v
    $v = u$: *status* := LEADER
    $v < u$: nedělej nic

Leader election — algoritmus LCR

Řekněme, že i_{max} je index procesu s největším UID.

Není těžké ověřit, že:

- Po n kolech nastaví proces i_{max} hodnotu své proměnné *status* na LEADER.

  (Jedině zprávám s UID procesu i_{max} se podaří „obkroužit“ celý kruh.)

- Žádný jiný proces nebude mít nastavenu hodnotu proměnné *status* na LEADER.

Po n kolech tedy bude vybrán leader.

Následně by mohl tento vybraný proces poslat zprávu s touto informací všem procesům.

Časová složitost algoritmu LCR je tedy $\Theta(n)$.

Leader election — algoritmus LCR

Je také zřejmé, že celkový počet poslaných zpráv je $\mathcal{O}(n^2)$.

V nejhorším případě může být počet poslaných zpráv $\Omega(n^2)$.

Komunikační složitost je tedy $\Theta(n^2)$.

Algoritmus LCR má časovou složitost $\Theta(n)$ a komunikační složitost $\Theta(n^2)$.

Leader election — algoritmus HS

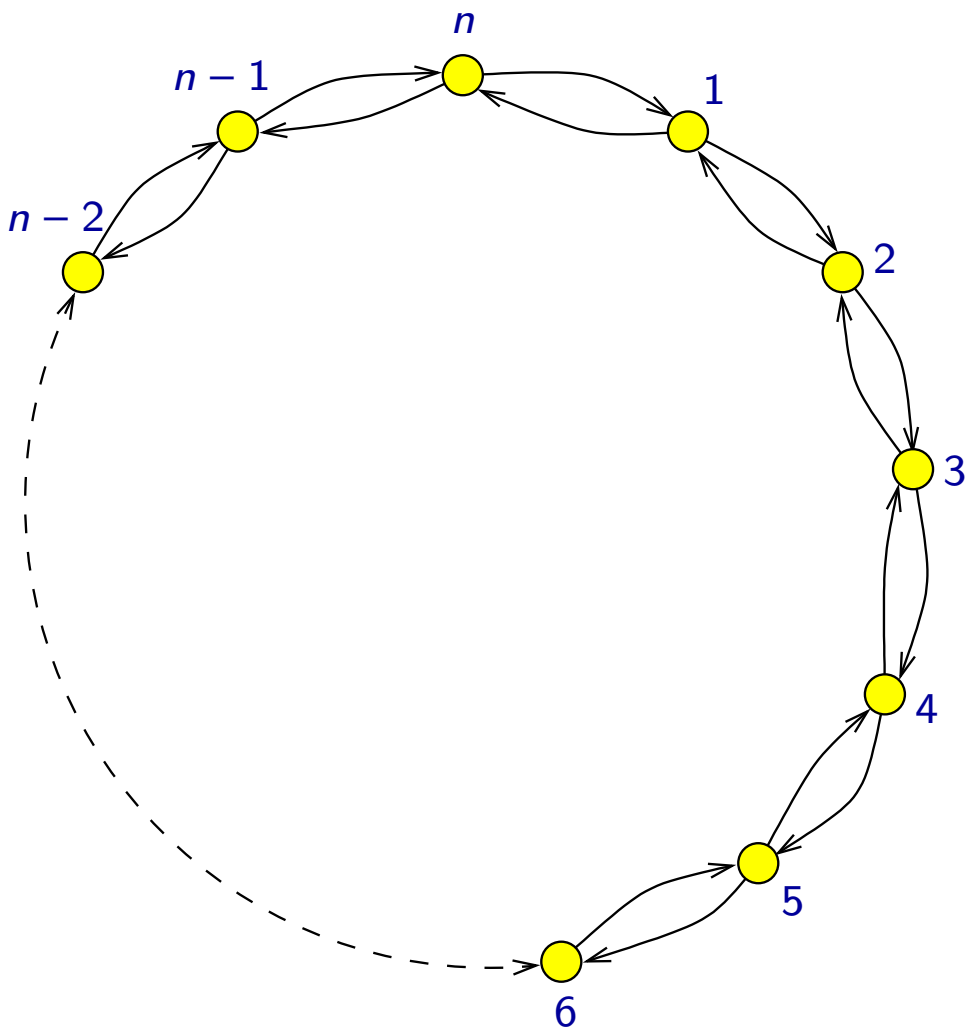
Ukážeme si algoritmus řešící problém leader election s asymptoticky stejnou časovou složitostí jako algoritmus LCR (tj. $\Theta(n)$), ale s komunikační složitostí $\mathcal{O}(n \log n)$.

Označme tento algoritmus podle jmen autorů jako **algoritmus HS** (Hirschberg, Sinclair).

- Algoritmus HS, podobně jako algoritmus LCR, předpokládá, že struktura sítě má podobu **kruhu**.
- Na rozdíl od algoritmu LCR tento kruh ale není jednosměrný, nýbrž **obousměrný**.
- Proces s indexem i tedy může posílat zprávy i přijímat zprávy od procesů s indexy $i - 1$ a $i + 1$.

Leader election — algoritmus HS

Obousměrný kruh:

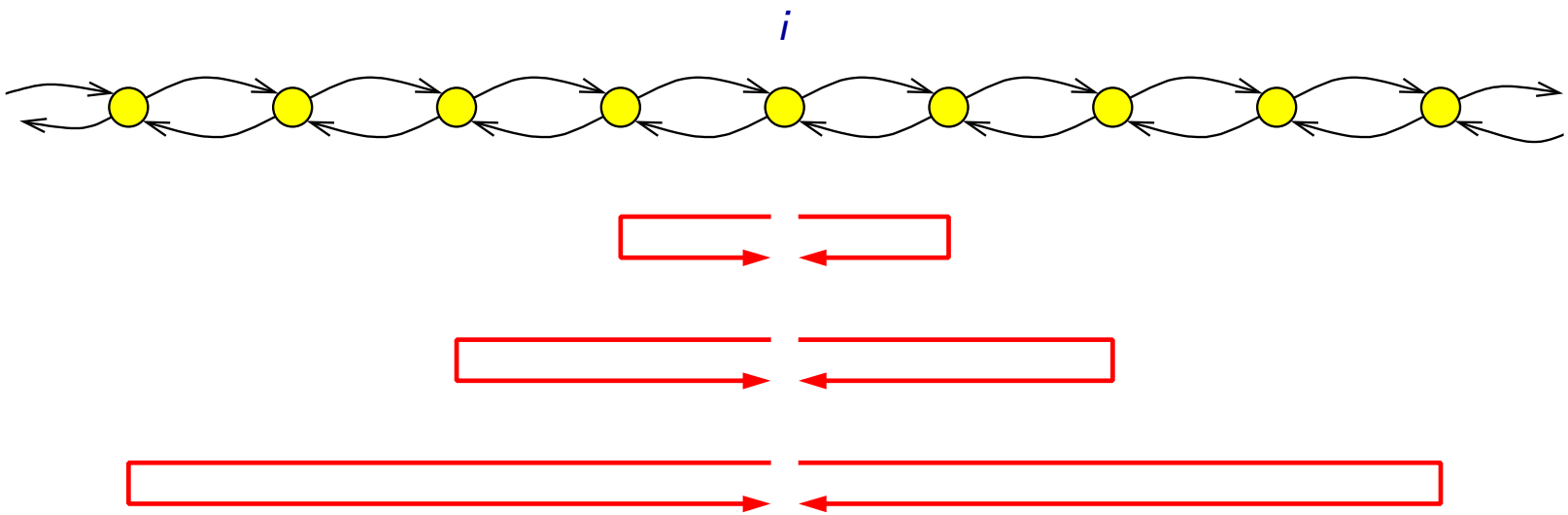


Leader election — algoritmus HS

Neformální popis algoritmu:

- Všechny procesy pracují ve „fázích“ $0, 1, 2, 3, \ldots$
- Ve fázi ℓ vyšle proces i do obou směrů „tokeny“ obsahující jeho UID.

  Tyto tokeny by měly cestovat do vzdálenosti 2^ℓ a pak se vrátit zpět k procesu i.



Leader election — algoritmus HS

- Pokud se oba tokeny úspěšně vrátí, pokračuje proces i další fází, tj. fází $\ell + 1$.
- Token se ovšem nemusí vrátit.

  Každý proces j, který leží na cestě tokenu, porovná své UID u_j s UID u_i v daném tokenu:

  - Pokud $u_i < u_j$, proces j daný token „zahodí“ a nebude ho přeposílat dál.
  - Pokud $u_i > u_j$, proces j daný token přepošle dál.
  - Pokud $u_i = u_j$, znamená to, že daný token stihl „obkroužit“ celý kruh ještě předtím, než se obrátil na cestu zpět.

    V tomto případě je proces j vybrán jako leader.

Poznámka: Stejně jako v případě algoritmu LCR je vybrán jako leader proces s největším UID.

Leader election — algoritmus HS

Formální popis:

- Množina zpráv M je tvořena trojicemi tvaru

  $$(u, \mathit{flag}, \mathit{hop\text{-}count})$$

  kde:

  - u — UID
  - flag — hodnota z množiny $\{\,\text{OUT}, \text{IN}\,\}$
  - $\mathit{hop\text{-}count}$ — kladné celé číslo

- Pro každé i je množina stavů $States_i$ tvořena stavy určenými hodnotami následujících proměnných:

  - u — typu UID
  - $send_+$, $send_-$ — obsahují buď prvek z množiny M nebo $null$
  - $status$ — bude obsahovat hodnoty z množiny

    $$\{\text{UNKNOWN}, \text{LEADER}\}$$

  - $phase$ — bude obsahovat přirozené číslo

Leader election — algoritmus HS

- Pro každé i bude množina počátečních stavů $Init_i$ obsahovat jediný stav daný následujícími počátečními hodnotami proměnných:
  - u — UID procesu ve vrcholu i
  - $send_+$ — trojice $(u, \text{OUT}, 1)$, kde u je UID procesu ve vrcholu i
  - $send_-$ — trojice $(u, \text{OUT}, 1)$, kde u je UID procesu ve vrcholu i
  - $status$ — hodnota UNKNOWN
  - $phase$ — hodnota 0

- Pro každé i je funkce $msgs_i$, popisující generování zpráv, definovaná následovně:
  - pošli aktuální hodnotu proměnné $send_+$ procesu $i + 1$
  - pošli aktuální hodnotu proměnné $send_-$ procesu $i - 1$

Leader election — algoritmus HS

- Pro každé i je přechodová funkce $trans_i$ dána následujícím pseudokódem:

$send_+ := null$
$send_- := null$
if od procesu $i-1$ přišla zpráva (v, OUT, h) **then**
  case
    $v > u$ **and** $h > 1$: $send_+ := (v, \text{OUT}, h-1)$
    $v > u$ **and** $h = 1$: $send_- := (v, \text{IN}, 1)$
    $v = u$: $status := \text{LEADER}$
if od procesu $i+1$ přišla zpráva (v, OUT, h) **then**
  case
    $v > u$ **and** $h > 1$: $send_- := (v, \text{OUT}, h-1)$
    $v > u$ **and** $h = 1$: $send_+ := (v, \text{IN}, 1)$
    $v = u$: $status := \text{LEADER}$

$\vdots$

Leader election — algoritmus HS

$\vdots$

if od procesu $i-1$ přišla zpráva $(v, \text{IN}, 1)$ **and** $v \neq u$ **then**
  $send_+ := (v, \text{IN}, 1)$

if od procesu $i+1$ přišla zpráva $(v, \text{IN}, 1)$ **and** $v \neq u$ **then**
  $send_- := (v, \text{IN}, 1)$

if od procesů $i-1$ a $i+1$ přišla od obou zpráva $(u, \text{IN}, 1)$ **then**
  $phase := phase + 1$
  $send_+ := (u, \text{OUT}, 2^{phase})$
  $send_- := (u, \text{OUT}, 2^{phase})$

Leader election — algoritmus HS

Analýza komunikační složitosti:

- Ve fázi 0 posílají token všechny procesy — celkem je to $4n$ zpráv.
- Ve fázi $\ell > 0$ posílá proces token právě tehdy, když se mu úspěšně vrátily oba tokeny ve fázi $\ell - 1$.

  To nastává právě tehdy, když v obou směrech do vzdálenosti $2^{\ell-1}$ neexistoval žádný proces s vyšším UID.

  To znamená, že v každé skupině $2^{\ell-1} + 1$ po sobě jdoucích procesů bude vždy nejvýše jeden, který ve fázi ℓ začne vysílat tokeny.

  Počet procesů, které ve fázi ℓ začnou vysílat tokeny, je tedy nejvýše

$$\left\lfloor \frac{n}{2^{\ell-1} + 1} \right\rfloor$$

- Ve fázi ℓ putují tokeny nejvýše do vzdálenosti 2^{ℓ}.

Leader election — algoritmus HS

- Celkový počet zpráv poslaných ve fázi ℓ je tedy omezen hodnotou

$$4 \cdot \left(2^{\ell} \cdot \left\lfloor \frac{n}{2^{\ell-1}+1} \right\rfloor \right) \leq 8n$$

- Celkový počet fází předtím, než je zvolen leader, je nejvýše $1 + \lceil \log_2 n \rceil$ (včetně fáze 0).
- Celkový počet poslaných zpráv je tedy nejvýše $8n(1 + \lceil \log_2 n \rceil)$, což je $\mathcal{O}(n \log n)$.

Leader election — algoritmus HS

Analýza časové složitosti:

- Počet kol ve fázi ℓ je $2 \cdot 2^{\ell} = 2^{\ell+1}$.
- Poslední fáze trvá n kol — je to nedokončená fáze.
- Předposlední fáze je fáze $\ell = \lceil \log_2 n \rceil - 1$.
  Doba trvání této fáze je
  $$2^{\lceil \log_2 n \rceil}.$$
- Součet trvání všech fází kromě poslední je tedy nejvýše
  $$2 \cdot 2^{\lceil \log_2 n \rceil}.$$
- Pokud je n mocnina dvojky, bude celkový počet všech fází $3n$.
  Pokud n není mocnina dvojky, bude celkový počet všech fází $5n$.
- Časová složitost je tedy $\mathcal{O}(n)$.

Leader election — algoritmus HS

Algoritmus HS má časovou složitost $\mathcal{O}(n)$ a komunikační složitost $\mathcal{O}(n \log n)$.

Poznámka:

- Dá se dokázat, že jakýkoli algoritmus, který řeší problém leader election na obousměrném kruhu, a který má vlastnost, že s UID provádí pouze operaci porovnání, musí mít komunikační složitost minimálně $\Omega(n \log n)$.

Leader election

Uvažujme algoritmy, kde UID jsou kladná přirozená čísla, se kterými je možné provádět i libovolné jiné operace než jen porovnání.

Za cenu extrémního nárůstu časové složitosti je možné snížit komunikační složitost na $\mathcal{O}(n)$.

Leader election — algoritmus *TimeSlice*

Algoritmus TimeSlice:

- Tento algoritmus vede ke zvolení procesu s nejmenším UID.
- Předpokládá se, že všechny procesy znají celkový počet procesů n.
- Algoritmus pracuje ve fázích $1, 2, 3, \ldots$
- Každá fáze se skládá z n kol.
- Každá fáze v, skládající se z kol

  $$(v-1)n+1,\ (v-1)n+2,\ \ldots\ ,\ v \cdot n,$$

  je věnovaná tomu, že v ní může po kruhu obíhat pouze token s UID v.
- Pokud existuje proces i s UID v a až do kola $(v-1)n+1$ tomuto procesu nepřišla žádná zpráva, prohlásí se tento proces za leadera a nechá kolovat token, kterým informuje všechny ostatní procesy o této volbě.

Leader election — algoritmus *TimeSlice*

Časová složitost algoritmu *TimeSlice* je zhruba $u_{min} \cdot n$, kde u_{min} je hodnota minimálního UID mezi procesy.

Počet poslaných zpráv je n.

Poznámka:
Pokud bychom chtěli místo procesu s minimálním UID zvolit proces s maximálním UID, můžeme postupovat následovně:

- Podobně jako v předchozím případě necháme nejprve zvolit proces s nejmenším UID.
- Tento proces inicializuje kolování tokenu, kdy každý z procesů pošle v daném tokenu maximum z hodnoty UID obsaženém v přijatém tokenu a svého UID.
- Komunikační složitost tohoto algoritmu je stále $\mathcal{O}(n)$.

Leader election — algoritmus *VariableSpeeds*

Algoritmus *TimeSlice* vyžaduje, aby procesy předem znaly celkový počet procesů n.

Následující algoritmus, nazvaný *VariableSpeeds*, tuto informaci nepotřebuje, ale jeho časová složitost je ještě horší.

- Rozhodně se nejedná o algoritmus, který by byl použitelný v praxi.
- Role tohoto algoritmu je v tom, že slouží jako protipříklad toho, že by každý algoritmus řešící problém leader election na kruhu musel mít komunikační složitost nejméně $\Omega(n \log n)$.
- Komunikační složitost algoritmu *VariableSpeeds* je $\mathcal{O}(n)$.

Leader election — algoritmus *VariableSpeeds*

Algoritmus VariableSpeeds:

- Každý proces i inicializuje kolování tokenu, který ponese informaci o UID procesu i (označme toto UID u_i).
- Tokeny se budou pohybovat různou rychlostí.

  Token s UID v se bude pohybovat rychlostí 1 zpráva každých 2^v kol — tj. každý proces, který takový token dostane, bude čekat 2^v kol, než ho pošle dál.
- Mezitím si každý proces udržuje nejmenší UID, které zatím viděl, a zahazuje každý token, který má vyšší UID.
- Jestliže se nějaký token vrátí tomu procesu, který ho vypustil, prohlásí se tento proces za leadera.

Leader election — algoritmus *VariableSpeeds*

Analýza algoritmu VariableSpeeds:

- Označme u_{min} nejmenší UID mezi procesy.
- V okamžiku, kdy token s UID u_{min} oběhl celý kruh:
  - token s druhým nejmenším UID oběhl nejvýše polovinu kruhu
  - token s třetím nejmenším UID oběhl nejvýše čtvrtinu kruhu
  - token se čtvrtým nejmenším UID oběhl nejvýše osminu kruhu
  - ...

  Obecně token s k-tým nejmenším UID oběhl nejvýše část kruhu danou zlomkem

$$\frac{1}{2^{k-1}}$$

- Poslání tokenu s UID u_{min} vyžaduje n zpráv.
- Celkový počet všech poslaných zpráv bude menší než $2n$.

Leader election — algoritmus *VariableSpeeds*

- Cesta tokenu s UID u_{min} vyžaduje poslání n zpráv.
  Poslání každé zprávy trvá $2^{u_{min}}$ kroků.
  Celková doba běhu algoritmu je tedy $n \cdot 2^{u_{min}}$ kol.

Časová složitost algoritmu *VariableSpeeds* je $\mathcal{O}(n \cdot 2^{u_{min}})$ a jeho komunikační složitost je $\mathcal{O}(n)$.

Leader election — algoritmus *FloodMax*

Uvažujme nyní problém leader election na **obecném grafu** $G = (V, E)$.

Budeme předpokládat, že:

- Graf G je silně souvislý — tj. existuje v něm cesta z každého vrcholu u do každého vrcholu v.
- Všechny procesy znají hodnotu *diam*, což je horní odhad pro **průměr** grafu G, tj. takovou hodnotu, že pro každé dva vrcholy $u, v \in V$ platí, že:
  - délka nejkratší cesty z u do v je menší nebo rovna *diam*.

Algoritmus FloodMax — neformální popis:

- Každý proces udržuje informaci o největším UID, které zatím viděl.
- V každém kole toto největší UID posílá všem svým sousedům.
- Po *diam* kolech se proces, jehož UID je stejné jako maximální UID, které zatím viděl, prohlásí za leadera.

Leader election — algoritmus *FloodMax*

Formální popis:

- Množina zpráv M: množina všech UID
- Pro každé i je množina stavů $States_i$ tvořena stavy danými hodnotami následujících proměnných:
  - u — UID procesu i
  - *max-uid* — maximální UID, které proces i zatím viděl
  - *status* — prvek z množiny $\{\text{UNKNOWN}, \text{LEADER}, \text{NON-LEADER}\}$
  - *round* — číslo kola (číslo z množiny $\mathbb{N}$)
- Pro každé i je množina počátečních stavů $Init_i$ tvořena jedním stavem daným následujícími počátečními hodnotami proměnných:
  - u — UID procesu i
  - *max-uid* — UID procesu i
  - *status* — hodnota UNKNOWN
  - *round* — hodnota 0

Leader election — algoritmus *FloodMax*

- Pro každé i je funkce $msgs_i$ specifikující posílané zprávy definována následovně:
  - Pokud $round < diam$, tak všem procesům $j \in V$ takovým, že $(i, j) \in E$, pošli zprávu s UID $max\text{-}uid$.
- Pro každé i je přechodová funkce $trans_i$ popsána následujícím pseudokódem:

$round := round + 1$
nechť U je množina všech UID, které přišly od procesů j, kde $(j, i) \in E$
$max\text{-}uid := \max(\{max\text{-}uid\} \cup U)$
if $round = diam$ **then**
  if $max\text{-}uid = u$ **then** $status :=$ LEADER
  else $status :=$ NON-LEADER

Leader election — algoritmus *FloodMax*

Časová složitost algoritmu *FloodMax* je $\mathcal{O}(diam)$ a jeho komunikační složitost je $\mathcal{O}(diam \cdot |E|)$.

Poznámky:

- Počet posílaných zpráv je možné o něco snížit (i když ne asymptoticky v nejhorším případě) tím, že každý proces bude posílat danou hodnotu *max-id* jen v kolech, kdy se změnila, tj. kdy se o příslušném UID poprvé dozvěděl.
- Existují algoritmy řešící problém leader election bez toho, aby procesy musely znát hodnotu *diam*.

Řešení výpočetně náročných problémů

Řešení výpočetně náročných problémů

- Pro mnoho důležitých problémů nejsou známy efektivní algoritmy. Řada těchto problémů je například NP-úplných.
- Je možné, že pro tyto problémy ani polynomiální algoritmy neexistují a my to zatím jenom neumíme dokázat.
- Přesto potřebujeme tyto problémy řešit.

Řešení výpočetně náročných problémů

Pokud chceme řešit nějaký problém, tak v ideálním případě chceme použít k jeho řešení algoritmus, který:

- Bude **polynomiální**, tj. rychle skončí pro libovolnou vstupní instanci.
- Bude **korektní**, tj. pro libovolnou vstupní instanci najde správnou odpověď.

Pokud nevíme, jak takový algoritmus najít, musíme trochu slevit ze svých požadavků.

Řešení výpočetně náročných problémů

- **Obtížné instance versus typické instance**

  Při studiu složitosti problémů zkoumáme většinou složitost v nejhorším případě.

  Instance, kvůli kterým je problém těžký, mohou být dost odlišné od „typických“ instancí, pro které chceme problém řešit.

  Při podrobnějším zkoumání problému můžeme nalézt určitou podmnožinu instancí, pro které je možné problém rychle řešit.

Problém batohu

Vstup: Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_m$ a číslo s.

Otázka: Existuje podmnožina množiny čísel $a_1, a_2, \ldots, a_m$ taková, že součet čísel v této podmnožině je s?

Poznámka: Jako velikost instance bereme celkový počet bitů v zápisu čísel $a_1, a_2, \ldots, a_m$ a s.

Tento problém je NP-úplný. Neumíme ho v rozumném čase řešit, pokud čísla v instanci budou „velká“ (např. 1000-bitová).

Pokud je však hodnota s malá (např. do 1000000, tj. asi 20 bitů), je možné tento problém vyřešit během několika sekund i pro relativně velké hodnoty m (např. $m = 10000$).

Problém „HORN-SAT“

Vstup: Booleovská formule φ v KNF obsahující pouze Hornovy klauzule.

Otázka: Je φ splnitelná?

Problém HORN-SAT se dá (narozdíl od obecného problému SAT) řešit v polynomiálním čase.

Poznámka: Hornova klauzule je klauzule, ve které se nachází nejvýše jeden pozitivní literál.

Například $(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$ je Hornova klauzule.

Všimněte si, že tato klauzule je ekvivalentní formuli

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \Longrightarrow x_5$$

Řešení výpočetně náročných problémů

Následující problém je rovněž možné řešit v polynomiálním čase:

Problém „2-SAT“

Vstup: Booleovská formule φ v KNF, kde každá klauzule obsahuje nejvýše 2 literály.

Otázka: Je φ splnitelná?

Příklad:

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4)$$

Exponenciální algoritmy

I exponenciální algoritmus může být prakticky použitelný, pokud:

- Instance, pro které problém chceme řešit, jsou poměrně malé.
- Složitost je sice exponenciální, ale roste pomaleji než 2^n.
- Algoritmus je co nejoptimálněji naprogramován.

Příklad:

- $f(n) = (1.2)^n$ pro $n = 100$ je $f(n) \approx 86 \cdot 10^6$.
- $f(n) = 10 \cdot 2^{\sqrt{n}}$ pro $n = 300$ je $f(n) \approx 1.64 \cdot 10^6$.

Menší požadavky na korektnost

- **Randomizované algoritmy** – algoritmy, které využívají při výpočtu generátor náhodných čísel.

  Existuje určitá nenulová pravděpodobnost, že algoritmus vrátí chybný výsledek.

  Pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ jsme však schopni zaručit, že pravděpodobnost chyby není větší než ε.

- **Aproximační algoritmy** – používají se pro řešení optimalizačních problémů.

  U těchto algoritmů není zaručeno, že naleznou optimální řešení, ale je zaručeno, že naleznou řešení, které nebude o moc horší než optimální řešení (např. nanejvýš $2\times$ horší).

Randomizované algoritmy

Testování prvočíselnosti

Prvočíselnost

Vstup: Přirozené číslo p.

Otázka: Je p prvočíslo?

Pro „malá“ p (např. do 10^{12}) stačí vyzkoušet čísla od 2 do $\lfloor \sqrt{p} \rfloor$, zda některé z nich dělí p.

Tento problém má velký význam v kryptografii, kde ho potřebujeme řešit pro čísla, která mají délku několik tisíc bitů.

Testování prvočíselnosti

To, zda je možné testovat prvočíselnost v polynomiálním čase, byl dlouho otevřený problém.

Teprve od roku 2003 je znám polynomiální algoritmus. Původní verze algoritmu měla složitost $\mathcal{O}(n^{12+\varepsilon})$, později o něco zlepšen ($\mathcal{O}(n^{7.5})$). Aktuálně má nejrychlejší známý algoritmus složitost $\mathcal{O}(n^6)$.

V praxi se používají **randomizované** algoritmy se složitostí $\mathcal{O}(n^3)$:

- Solovay-Strassen
- Miller-Rabin

Poznámka: n zde označuje počet bitů čísla p.

Testování prvočíselnosti

S problémem testování prvočíselnosti úzce souvisí následující problém.

Faktorizace

Vstup: Přirozené číslo p.

Výstup: Rozklad čísla p na prvočísla.

Na rozdíl od prvočíselnosti není pro problém faktorizace znám žádný efektivní algoritmus, a to ani randomizovaný.

Jedna z používaných šifer je tzv. RSA kryptosystém, který je založen na tom, že:

- Umíme rychle najít velká prvočísla (a rychle je mezi sebou vynásobit).
- Není známo, jak v rozumném čase z tohoto součinu zjistit původní prvočísla.

Testování prvočíselnosti

Poznámka: Pokud umíme rychle testovat, zda je dané číslo prvočíslem, není problém velké prvočíslo náhodně vygenerovat, neboť je známo, že prvočísla jsou mezi ostatními čísly rozmístěna poměrně „hustě“.

$\pi(n)$ – počet prvočísel v intervalu $1, 2, \ldots, n$

Je dokázáno, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\ln n} = 1$$

neboli jinak řečeno, mezi čísly od 1 do n je zhruba $n/\ln n$ prvočísel.

Pokud tedy chceme náhodně vygenerovat k-bitové prvočíslo, stačí zhruba k pokusů.

Randomizované algoritmy

Randomizovaný algoritmus:

- používá během výpočtu generátor náhodných čísel
- může pro tentýž vstup skončit s různým výsledkem
- existuje určitá pravděpodobnost, že vrátí chybný výsledek

Aby měl randomizovaný algoritmus praktický smysl, musíme mít možnost regulovat pravděpodobnost chyby:

> *Pro libovolně malé* $\varepsilon > 0$ *musíme být schopni zaručit, že pravděpodobnost chyby nebude větší než* ε.

Randomizované algoritmy

Vezměme si například algoritmus Miller-Rabin pro testování prvočíselnosti.

Pro libovolné n vrací buď odpověď „`Prvočíslo`“ nebo odpověď „`Složené`“.

- Pokud n je prvočíslo, vrátí vždy odpověď „`Prvočíslo`“.
- Pokud n je číslo složené, je pravděpodobnost toho, že vrátí odpověď „`Složené`“ nejméně 50%.

  Může však vrátit (chybnou) odpověď „`Prvočíslo`“.

Algoritmus můžeme spouštět opakovaně. Výsledek při dalším spuštění je nezávislý na výsledcích z předchozích spuštění.

Randomizované algoritmy

Řekněme, že algoritmus spustíme m krát (pro tentýž vstup n).

- Pokud alespoň jednou dostaneme odpověď „`Složené`“, pak víme s jistotou, že n je číslo složené.
- Pokud pokaždé dostaneme odpověď „`Prvočíslo`“, pak pravděpodobnost toho, že n není prvočíslo je maximálně

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m = 2^{-m}$$

Například pro $m = 100$ je pravděpodobnost chyby zanedbatelně malá.

Poznámka: Lze například odvodit, že pravděpodobnost toho, že počítač bude zasažen během dané mikrosekundy meteoritem, je nejméně 2^{-100} za předpokladu, že každých 1000 let je meteoritem zničeno alespoň $100\,\mathrm{m}^2$ zemského povrchu.

Randomizované algoritmy

Randomizované algoritmy jsou typicky založeny na hledání **svědků** (witness), kteří „dosvědčí“ určitou odpověď vydanou algoritmem.

Tyto svědky vybíráme z množiny **potenciálních svědků**:

- Náhodně vybereme nějakého potenciálního svědka.
- Ověříme, zda se jedná o skutečného svědka, a podle toho vydáme odpověď.

Například v algoritmu Miller-Rabin hledáme svědky složenosti čísla n.

Vybíráme je z množiny čísel $\{2, 3, \ldots, n-1\}$:

- Pokud n je prvočíslo, žádní svědci složenosti neexistují.
- Pokud n není prvočíslo, je zaručeno, že alespoň polovina čísel v množině $\{2, 3, \ldots, n-1\}$ jsou svědci složenosti n.

Testování prvočíselnosti

Malá Fermatova věta:

Pokud n je prvočíslo, pak pro každé a z množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ platí

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

Malou Fermatovu větu lze použít k testování prvočíselnosti (tzv. Fermatův test):

- Pro dané n zvolíme nějaké $a \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$.
- Pokud $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$, pak n určitě není prvočíslo.
- Pokud $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, pak n je možná prvočíslo.

Testování prvočíselnosti

Je překvapivé, že tato procedura vrací chybný výsledek jen poměrně zřídka:

- Pro $a = 2$ a $n < 10000$ je jen 22 hodnot, pro které dostaneme chybnou odpověď.
- Pro $a = 2$ a $n \to \infty$ se pravděpodobnost toho, že pro náhodně vybrané n dostaneme chybnou odpověď, blíží nule.

Testování prvočíselnosti

Fermatův test není 100% spolehlivý. Existují složená čísla, která splňují podmínku $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ pro všechna $a \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ nesoudělná s n.

Tato čísla se nazývají **Carmichaelova čísla** a jsou extrémně vzácná.

Například mezi čísly do 10^8 existuje jen 255 Carmichaelových čísel.

Prvních 15 Carmichaelových čísel:

561, 1105, 1729, 2465, 2821, 6601, 8911, 10585, 15841, 29341, 41041, 46657, 52633, 62745, 63973

Umocňování v modulární aritmetice

Problém

Vstup: Přirozená čísla a, b, n.

Výstup: Hodnota $a^b \bmod n$.

Využijeme toho, že $a^{2i} = a^i \cdot a^i$ a $a^{2i+1} = a^i \cdot a^i \cdot a$.

MODULAR-EXPONENTIATION (a, b, n):

```
d := 1
// ⟨b_k, b_{k−1}, ..., b_0⟩ je binární reprezentace b
for i := k downto 0 do
    d := (d · d) mod n
    if b_i = 1 then  d := (d · a) mod n
return d
```

Testování prvočíselnosti (Miller-Rabin)

Na umocňování je založen i následující algoritmus pro testování prvočíselnosti:

MILLER-RABIN (n, s):

```
for j := 1 to s do
    a := RANDOM(2, n − 1)
    if WITNESS(a, n) then
        return "Složené"   // n je zcela jistě složené
return "Prvočíslo"   // n je s velkou pravděpodobností prvočíslo
```

Využívá malou Fermatovu větu a toho, že platí následující tvrzení:

Jestliže p je liché prvočíslo, pak rovnice $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ má právě dvě řešení: $x = 1$ a $x = p - 1$.

Testování prvočíselnosti (Miller-Rabin)

```
WITNESS (a, n):
    d := 1
    // ⟨b_k, b_{k−1}, ..., b_0⟩ je binární reprezentace n − 1
    for i := k downto 0 do
        x := d
        d := (d · d) mod n
        if d = 1 and x ≠ 1 and x ≠ n − 1 then return TRUE
        if b_i = 1 then d := (d · a) mod n
    if d ≠ 1 then return TRUE
    return FALSE
```

Randomizované algoritmy

- Množina potenciálních svědků bývá obrovská – většinou exponenciálně velká

  Poznámka: Kdyby byla polynomiálně velká mohli bychom systematicky projít všechny potenciální svědky a nepotřebovali bychom randomizovaný algoritmus.

- Musí být zaručeno, že pokud nějací skuteční svědci existují, pak jich je dostatečně mnoho, čímž je zaručeno, že pravděpodobnost, že na nějakého svědka narazíme, je dostatečně vysoká.

Randomizované algoritmy

Formálně můžeme definovat randomizované algoritmy dvěma různými způsoby.

- Obě tyto varianty jsou vzájemně ekvivalentní.
- U obou jde o to, definovat stroj $\mathcal{M}$ tak, aby byla pro každý vstup x definována **pravděpodobnost** toho, že vstup x bude strojem $\mathcal{M}$ přijat.
- O jaký konkrétní druh stroje se jedná, není příliš podstatné — může to být Turingův stroj, stroj RAM, apod.

Randomizované algoritmy

První varianta definice stroje $\mathcal{M}$ implementujícího pravděpodobnostní algoritmus:

- Tato varianta je podobná jako v případě **nedeterministických** strojů, ale s tím, že v definici přechodové funkce je při výběru mezi více možnými přechody určeno **pravděpodobnostní rozdělení** na těchto možnostech.
- Uvažujme strom všech možných výpočtů pro daný vstup x.
- Pro každou větev výpočtu můžeme spočítat pravděpodobnost toho, že tato větev nastane — stačí vynásobit pravděpodobnosti přechodů na této větvi.
- Celková pravděpodobnost toho, že daný stroj $\mathcal{M}$ přijme daný vstup x, je dána jako součet pravděpodobností všech přijímajících výpočtů (tj. pravděpodobnost všech větví, které končí odpovědí $\textsc{Ano}$).

Randomizované algoritmy

Druhá varianta definice stroje $\mathcal{M}$ implementujícího pravděpodobnostní algoritmus:

- V této variantě popíšeme **deterministický** stroj $\mathcal{M}$, který má ale dvě vstupní pásky, ze kterých může pouze číst:
  - vstupní pásku, na které je zapsána instance problému x

    — tato páska je konečná, hlava se na ní může pohybovat oběma směry
  - jednosměrnou nekonečnou pásku, na které je zapsaná nekonečná náhodná posloupnost symbolů z nějaké abecedy (typicky např. $\{0, 1\}$)

    — hlava se na ní může pohybovat pouze směrem zleva doprava
- Typicky se předpokládá, že všechny obsahy pásky s náhodnými daty jsou stejně pravděpodobné.
- Pravděpodobnost přijetí daného slova x je dána jako střední hodnota pravděpodobnosti toho, že výpočet stroje $\mathcal{M}$ bude přijímající.

Randomizované algoritmy

Předpokládejme, že máme dán nějaký randomizovaný algoritmus implementovaný strojem $\mathcal{M}$, u kterého je pro každý vstup x určeno, jaká je pravděpodobnost toho, že daný stroj $\mathcal{M}$ přijímá vstup x.

(Je jedno, jestli bereme první nebo druhou výše uvedenou variantu definice takového stroje.)

Řekněme, že máme dán nějaký rozhodovací problém A.

Definovat, kdy je randomizovaný algoritmus implementovaný strojem $\mathcal{M}$ řešením problému A je možné několika způsoby:

- Tyto možnosti definice toho, kdy randomizovaný algoritmus řeší problém, nejsou vzájemně ekvivalentní (resp. není dokázáno, že by byly).
- Různým možnostem odpovídají různé třídy složitosti týkající se randomizovaných algoritmů.

Randomizované algoritmy

Verze první:

- Pro vstupy, kde je správná odpověď ANO, musí stroj $\mathcal{M}$ dávat odpověď ANO s pravděpodobností alespoň $1/2$.
- Pro vstupy, kde je správná odpověď NE, musí stroj $\mathcal{M}$ vždy dávat odpověď NE.

Poznámka: Hodnota $1/2$ zde není příliš podstatná, stejně dobře by to mohla být jakákoli jiná konstanta c z intervalu $(0, 1)$
(tj. splňující podmínku $0 < c < 1$).

Třída RP (**randomized polynomial time**) je tvořena právě těmi rozhodovacími problémy, pro které existuje randomizovaný algoritmus výše uvedeného typu, který má polynomiální časovou složitost.

Poznámka: Analogicky je možné definovat třídu co-RP tvořenou doplňkovými problémy k problémům ze třídy RP.

Randomizované algoritmy

Verze druhá:

- Pro vstupy, kde je správná odpověď ANO, musí stroj $\mathcal{M}$ dávat odpověď ANO s pravděpodobností alespoň $2/3$.
- Pro vstupy, kde je správná odpověď NE, musí stroj $\mathcal{M}$ dávat odpověď NE s pravděpodobností alespoň $2/3$.

Poznámka: Hodnota $2/3$ zde není příliš podstatná, stejně dobře by to mohla být jakákoli jiná konstanta c z intervalu $(0.5, 1)$
(tj. splňující podmínku $0.5 < c < 1$).

Třída BPP (**bounded-error probabilistic polynomial time**) je tvořena právě těmi rozhodovacími problémy, pro které existuje randomizovaný algoritmus výše uvedeného typu, který má polynomiální časovou složitost.

Randomizované algoritmy

Verze třetí:

- Stroj vrací tři možné odpovědi:
  - Ano
  - Ne
  - Nevím
- Pokud se stroj $\mathcal{M}$ vrátí odpověď Ano nebo Ne, je tato odpověď vždy správně.
- Pravděpodobnost toho, že vrátí odpověď Nevím, může být nejvýše $1/2$.

Třída ZPP (**zero-error probabilistic polynomial time**) je tvořena právě těmi rozhodovacími problémy, pro které existuje randomizovaný algoritmus výše uvedeného typu, který má polynomiální časovou složitost.

Randomizované algoritmy

Pokud budeme dostávat odpověď Nevím, můžeme výpočet opakovat tak dlouho, dokud nedostaneme odpověď Ano nebo Ne:

- Náhodná tak bude doba výpočtu.
- Potenciálně může existovat i nekonečný výpočet — jeho pravděpodobnost je ale nulová.
- S rostoucím počtem kroků se pravděpodobnost toho, že se stroj během daného počtu kroků nezastaví, limitně blíží nule.

Randomizovaný komunikační protokol

Máme dvojici počítačů C_1 a C_2, které jsou velmi daleko od sebe (např. jeden v Evropě a druhý v Americe).

Oba počítače obsahují tutéž databázi, která by měla obsahovat přesně tatáž data.

Naším cílem je navrhnout vhodný komunikační protokol, pomocí kterého ověříme, že obě databáze obsahují přesně tatáž data.

Označme n počet bitů dat v databázi. Řekněme, že $n = 10^{16}$, a že tedy není možné přenášet celý obsah databáze, nebo by to bylo příliš časově náročné.

Poznámka: Není těžké ukázat, že každý deterministický protokol řešící tento problém musí přenést minimálně n bitů.

Randomizovaný komunikační protokol

Počáteční situace:

C_1 má n-bitovou sekvenci $x = x_1 \cdots x_n$,
C_2 má n-bitovou sekvenci $y = y_1 \cdots y_n$.

Cíl: Zjistit, zda $x = y$.

1. C_1 zvolí náhodně prvočíslo p z množiny $\{2, 3, \ldots, n^2\}$.
2. C_1 spočte číslo $s = Num(x) \bmod p$ a pošle C_2 dvojici (s, p).
3. C_2 přijme (s, p) a spočte číslo $t = Num(y) \bmod p$.
   Pokud $s \neq t$, vydá odpověď „$x \neq y$“, jinak vydá odpověď „$x = y$“.

Poznámka: $Num(x)$ zde označuje číslo, jehož zápisem ve dvojkové soustavě je sekvence bitů x.

Randomizovaný komunikační protokol

Objem přenášených dat: s i p mají maximálně $2 \cdot \lceil \log_2 n \rceil$ bitů, takže se celkem přenáší maximálně $4 \cdot \lceil \log_2 n \rceil$ bitů.

Příklad: Pro $n = 10^{16}$ se bude přenášet maximálně $4 \cdot 16 \cdot \lceil \log_2 10 \rceil = 256$ bitů.

Pravděpodobnost chyby:

- Pokud $x = y$, pak pro libovolné p platí

$$Num(x) \bmod p = Num(y) \bmod p$$

takže dostaneme vždy odpověď „$x = y$“ (pravděpodobnost chyby je 0).

Randomizovaný komunikační protokol

- Pokud $x \neq y$ a dostaneme chybnou odpověď „$x = y$“, znamená to, že

$$z = Num(x) \bmod p = Num(y) \bmod p$$

neboli existují čísla x', y' taková, že

$$Num(x) = x' \cdot p + z \qquad Num(y) = y' \cdot p + z$$

takže p je dělitelem čísla $w = |Num(x) - Num(y)|$, neboť

$$Num(x) - Num(y) = x' \cdot p - y' \cdot p = (x' - y') \cdot p$$

Prvočíslo p bylo vybíráno náhodně z množiny $\{2, 3, \ldots, n^2\}$, která obsahuje

$$\pi(n^2) \approx \frac{n^2}{\ln n^2}$$

prvočísel. Musíme zjistit, kolik z těchto prvočísel je dělitelem w.

Randomizovaný komunikační protokol

Zjevně je $w = |Num(x) - Num(y)| < 2^n$. Číslo w můžeme rozložit na prvočísla

$$w = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_k^{i_k}$$

Chceme ukázat, že $k \leq n - 1$.

Předpokládejme, že $k \geq n$. Pak

$$w = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_k^{i_k} \geq p_1 p_2 \cdots p_n > 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = n! > 2^n$$

což je spor s tím, že $w < 2^n$.

Pravděpodobnost, že z množiny $\{2, 3, \cdots, n^2\}$ vybereme náhodně prvočíslo, které je dělitelem w je maximálně

$$\frac{n-1}{\pi(n^2)} \leq \frac{n-1}{n^2 / \ln n^2} \leq \frac{\ln n^2}{n}$$

Například pro $n = 10^{16}$ je to maximálně $0.36892 \cdot 10^{-14}$.

Randomizovaný komunikační protokol

Modifikace protokolu:

- C_1 vygeneruje náhodně 10 prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ a pošle

$$p_1, s_1, p_2, s_2, \ldots, p_{10}, s_{10}$$

  kde $s_i = Num(x) \bmod p_i$.

- C_2 spočítá $t_i = Num(y) \bmod p_i$ pro $i \in \{1, \ldots, 10\}$.

  Pokud $s_i \neq t_i$ pro nějaké i, vydá odpověď „$x \neq y$“, jinak vydá odpověď „$x = y$“.

Pro $n = 10^{16}$ je třeba přenést maximálně 2560 bitů.

Randomizovaný komunikační protokol

Protože 10 prvočísel je vybíráno náhodně, je pravděpodobnost chyby maximálně

$$\left(\frac{n-1}{\pi(n^2)}\right)^{10} \leq \left(\frac{\ln n^2}{n}\right)^{10} = \frac{2^{10} \cdot (\ln n)^{10}}{n^{10}}$$

Pro $n = 10^{16}$ je pravděpodobnost chyby menší než $0.4717 \cdot 10^{-141}$.

Aproximační algoritmy

Aproximační algoritmy

Mnoho důležitých problémů je NP-úplných. U optimalizačních problémů často nepotřebujeme nalézt nejoptimálnější řešení, ale stačí nám řešení, které je „dostatečně dobré“.

Algoritmům, které vrací takováto „dostatečně dobrá“ řešení, se říká **aproximační algoritmy**.

Poznámka: **Optimalizační problém** je problém, kde pro každý vstup w máme definovánu množinu S_w všech **přípustných řešení** a funkci $c : S_w \to \mathbb{R}$.

Úkolem je najít takové $x \in S_w$, pro které je hodnota $c(x)$ minimální (resp. maximální).

Příklady: Hledání nejkratší cesty v grafu, určování maximálního toku v síti.

Aproximační algoritmy

Řekněme, že řešíme problém, kde je úkolem hodnotu $c(x)$ minimalizovat.

Řekněme, že pro vstup w vydá algoritmus řešení x, přičemž optimálním řešením je x^*. Zjevně platí $c(x) \geq c(x^*)$.

Jako **aproximační poměr** daného algoritmu označujeme funkci $\rho(n)$, která každému n přiřazuje maximální hodnotu poměru $c(x)/c(x^*)$ pro všechny vstupy velikosti n.

Poznámka: Naopak u algoritmu, kde je cílem hodnotu $c(x)$ maximalizovat, bychom uvažovali poměr $c(x^*)/c(x)$.

Aproximační algoritmy

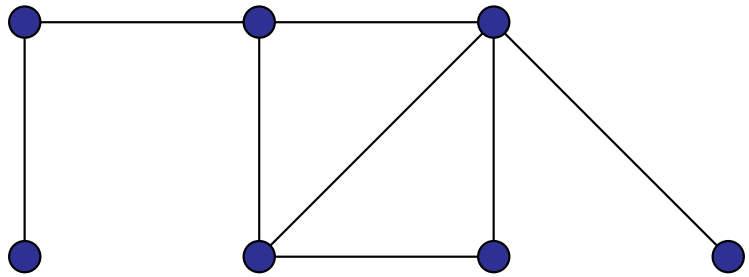
O algoritmu, který dosahuje aproximačního poměru $\rho(n)$, říkáme, že je to $\rho(n)$-**aproximační algoritmus**.

Pro řadu problémů jsou známy polynomiální algoritmy, kde je hodnota $\rho(n)$ omezena:

- malou konstantou, např. 2-aproximační algoritmy, nebo
- pomalu rostoucí funkcí, např. $\Theta(\log n)$-aproximační algoritmy.

Vrcholové pokrytí grafu

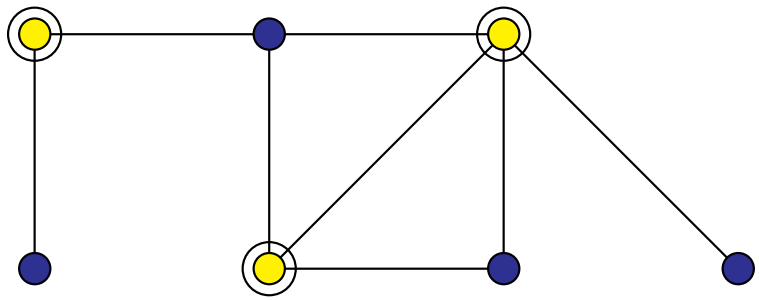
Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$. **Vrcholové pokrytí** (vertex-cover) grafu G je množina $C \subseteq V$ taková, že pro každou hranu $(u, v) \in E$ platí, že buď $u \in C$ nebo $v \in C$.



Úkolem je najít pro zadaný graf minimální vrcholové pokrytí.

Vrcholové pokrytí grafu

Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$. **Vrcholové pokrytí** (vertex-cover) grafu G je množina $C \subseteq V$ taková, že pro každou hranu $(u, v) \in E$ platí, že buď $u \in C$ nebo $v \in C$.



Úkolem je najít pro zadaný graf minimální vrcholové pokrytí.

Vrcholové pokrytí grafu

Máme tedy vyřešit následující problém:

Minimální vrcholové pokrytí grafu (vertex cover)

Vstup: Neorientovaný graf $G = (V, E)$.

Výstup: Minimalní množina C ($C \subseteq V$) tvořící vrcholové pokrytí grafu G.

Vrcholové pokrytí grafu

Máme tedy vyřešit následující problém:

Minimální vrcholové pokrytí grafu (vertex cover)

Vstup: Neorientovaný graf $G = (V, E)$.

Výstup: Minimalní množina C ($C \subseteq V$) tvořící vrcholové pokrytí grafu G.

Následující (rozhodovací) varianta tohoto problému je NP-úplná:

Vrcholové pokrytí (vertex cover)

Vstup: Neorientovaný graf $G = (V, E)$ a přirozené číslo k.

Otázka: Existuje vrcholové pokrytí grafu G tvořené k vrcholy?

Tento problém tedy není možné řešit v polynomiálním čase (leda by platilo P = NP).

Vrcholové pokrytí grafu

Máme tedy vyřešit následující problém:

Minimální vrcholové pokrytí grafu (vertex cover)

Vstup: Neorientovaný graf $G = (V, E)$.

Výstup: Minimalní množina C ($C \subseteq V$) tvořící vrcholové pokrytí grafu G.

Existuje však 2-aproximační algoritmus řešící tento problém:

- Algoritmus najde pro zadaný graf G vrcholové pokrytí C takové, že

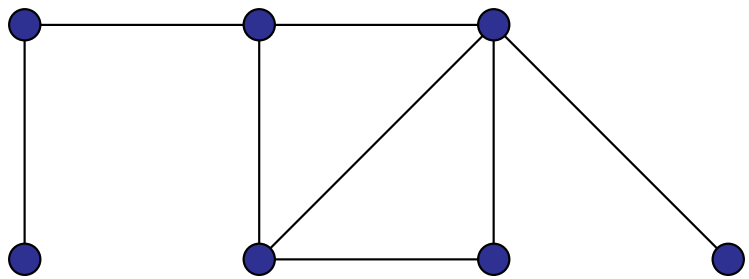
$$|C| \leq 2k$$

kde k je velikost minimálního vrcholového pokrytí grafu G.

Vrcholové pokrytí grafu

APPROX-VERTEX-COVER (G):

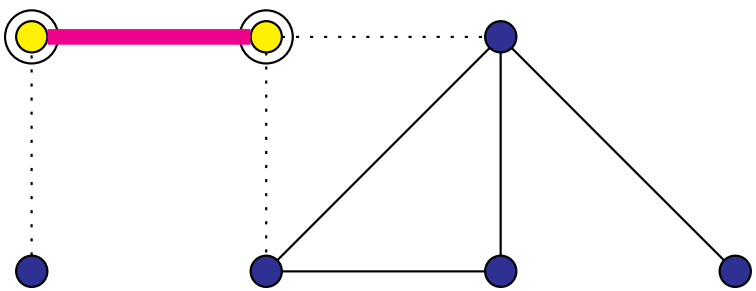
- $C := \emptyset$
- $E' := E$
- **while** $E' \neq \emptyset$ **do**
  - vyber libovolnou hranu (u, v) z E'
  - $C := C \cup \{u, v\}$
  - odstraň z E' hrany incidentní s u nebo v
- **return** C



Vrcholové pokrytí grafu

APPROX-VERTEX-COVER (G):

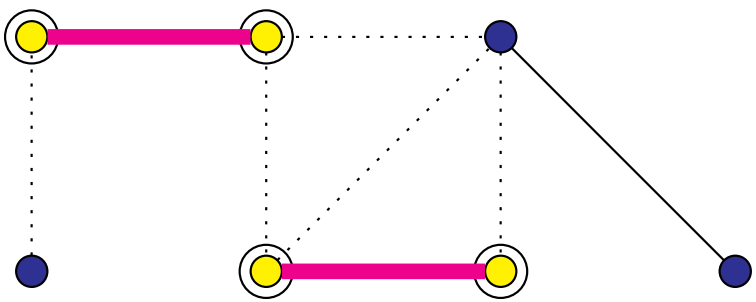
- $C := \emptyset$
- $E' := E$
- **while** $E' \neq \emptyset$ **do**
  - vyber libovolnou hranu (u, v) z E'
  - $C := C \cup \{u, v\}$
  - odstraň z E' hrany incidentní s u nebo v
- **return** C



Vrcholové pokrytí grafu

APPROX-VERTEX-COVER (G):

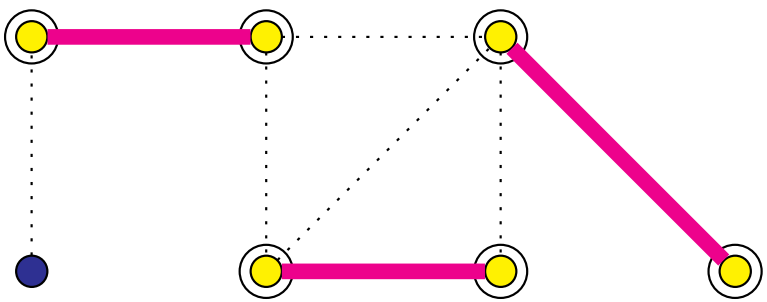
- $C := \emptyset$
- $E' := E$
- **while** $E' \neq \emptyset$ **do**
  - vyber libovolnou hranu (u, v) z E'
  - $C := C \cup \{u, v\}$
  - odstraň z E' hrany incidentní s u nebo v
- **return** C



Vrcholové pokrytí grafu

APPROX-VERTEX-COVER (G):

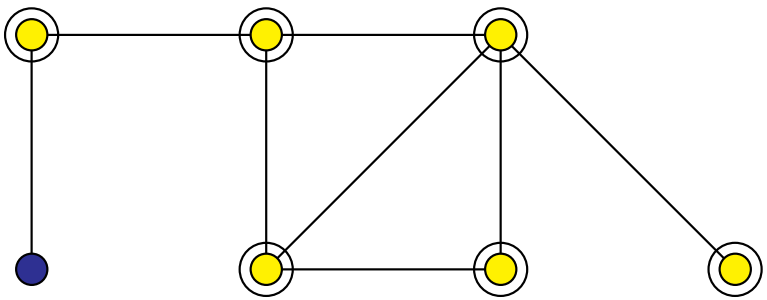
- $C := \emptyset$
- $E' := E$
- **while** $E' \neq \emptyset$ **do**
  - vyber libovolnou hranu (u, v) z E'
  - $C := C \cup \{u, v\}$
  - odstraň z E' hrany incidentní s u nebo v
- **return** C



Vrcholové pokrytí grafu

APPROX-VERTEX-COVER (G):

- $C := \emptyset$
- $E' := E$
- **while** $E' \neq \emptyset$ **do**
  - vyber libovolnou hranu (u, v) z E'
  - $C := C \cup \{u, v\}$
  - odstraň z E' hrany incidentní s u nebo v
- **return** C



Vrcholové pokrytí grafu

Tvrzení

APPROX-VERTEX-COVER je polynomiální 2-aproximační algoritmus.

Důkaz: Označme A množinu všech hran vybraných v kroku 4, C vrcholové pokrytí nalezené algoritmem a C^* minimální vrcholové pokrytí grafu G.

Jakékoliv vrcholové pokrytí musí obsahovat alespoň jeden z koncových vrcholů každé hrany z A.

Pro libovolné vrcholové pokrytí C' tedy platí $|A| \leq |C'|$.

Speciálně pro C^* tedy také musí platit $|A| \leq |C^*|$.

Na druhou stranu, zjevně platí $|C| = 2 \cdot |A|$.
Dohromady tedy dostáváme $|C| \leq 2 \cdot |C^*|$.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Problém obchodního cestujícího (TSP)

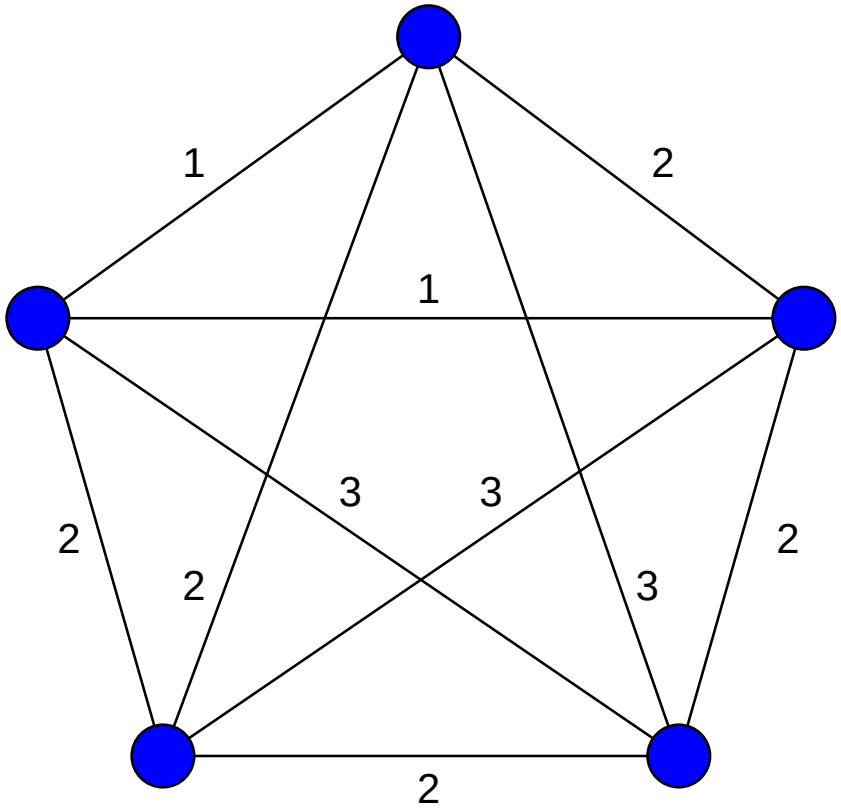
Vstup: Množina n měst a vzdálenosti mezi nimi.

Výstup: Nejkratší okružní cesta procházející všemi městy.

Poznámka: Slovem „okružní“ myslíme, že cesta končí ve stejném městě, kde začíná.

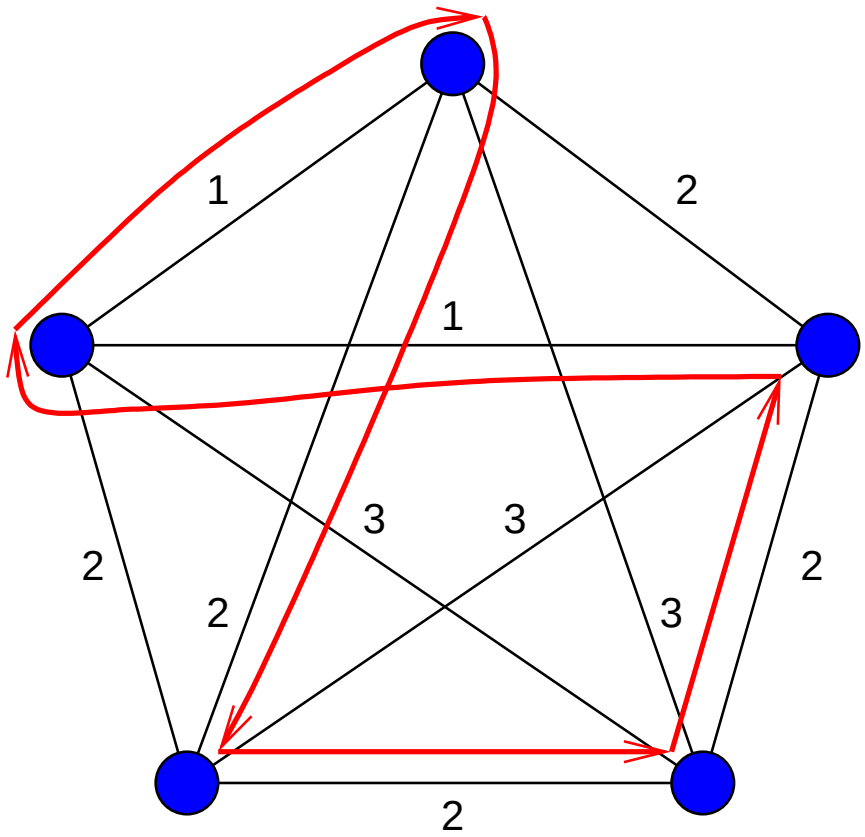
Problém obchodního cestujícího (TSP)

Příklad instance problému:



Problém obchodního cestujícího (TSP)

Příklad instance problému:



Nejkratší okružní cesta má délku 8.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Můžeme uvažovat dvě různé varianty tohoto problému:

- Každé město musí být navštíveno právě jednou.
- Města je možné navštěvovat opakovaně.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

V následujícím výkladu se nám bude hodit poněkud formálnější definice problému:

Na instanci problému (tj. množinu měst a vzdálenosti mezi nimi) se můžeme dívat jako na úplný neorientovaný graf $G = (V, E)$ s ohodnocením hran d (kde $d : E \to \mathbb{N}$).

Pro libovolnou množinu hran $E' \subseteq E$ definujeme

$$d(E') = \sum_{e \in E'} d(e)$$

Pro libovolný cyklus H pak definujeme $d(H) = d(E')$, kde E' je množina hran ležících na cyklu H.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Problém TSP pak můžeme formulovat následovně:

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Vstup: Úplný neorientovaný graf $G = (V, E)$ s ohodnocením hran d.

Výstup: Cyklus H procházející všemi vrcholy grafu G takový, že hodnota $d(H)$ je minimální možná.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Následující problém je NP-úplný (ať už je či není povoleno navštěvovat vrcholy opakovaně):

Problém obchodního cestujícího (TSP) – rozhodovací varianta

Vstup: Úplný neorientovaný graf $G = (V, E)$ s ohodnocením hran d a číslo L.

Otázka: Existuje v grafu G cyklus H procházející všemi vrcholy takový, že $d(H) \leq L$?

Poznámka: Nemůžeme tedy očekávat, že by problém TSP (ať už v té či oné variantě) byl řešitelný v polynomiálním čase, leda že by platilo P = NP.

Problém obchodního cestujícího

Pro problém TSP, kde vyžadujeme aby byl každý vrchol navštíven právě jednou, se dá dokázat následující:

Věta

Pokud $P \neq NP$, pak pro žádnou konstantu $\rho \geq 1$ neexistuje polynomiální ρ-aproximační algoritmus řešící problém obchodního cestujícího.

Důkaz: Předpokládejme, že by pro nějaké ρ takový algoritmus existoval. Ukážeme, že pak by existoval polynomiální algoritmus pro problém Hamiltonovské kružnice.

Problém Hamiltonovské kružnice je NP-úplný, nalezení polynomiálního algoritmu by znamenalo, že $P = NP$.

Problém obchodního cestujícího

Nechť $G = (V, E)$ je instance problému Hamiltonovské kružnice.

Instanci problému obchodního cestujícího $G' = (V', E')$ sestrojíme tak, že $V' = V$ a E' obsahuje všechny možné hrany, kterým přiřadíme ohodnocení

$$d(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (u, v) \in E \\ \rho \cdot |V| + 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

Jestliže graf G obsahuje Hamiltonovskou kružnici, pak v G' existuje okružní cesta délky $|V|$.

Jakákoliv okružní cesta v G', která obsahuje hranu, která není v G, má délku větší než $\rho \cdot |V|$.

Pokud v G Hamiltonovská kružnice existuje, ρ-aproximační algoritmus musí nějakou takovou kružnici vrátit jako výslednou okružní cestu.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Není těžké si rozmyslet, že varianta TSP kde je povoleno opakovaně navštěvovat vrcholy se dá snadno převést na variantu, kde musí být každý vrchol navštíven právě jednou:

- Pro daný graf G s ohodnocením d sestrojíme nové ohodnocení d', kde $d'(u, v)$ je délka nejkratší cesty z u do v

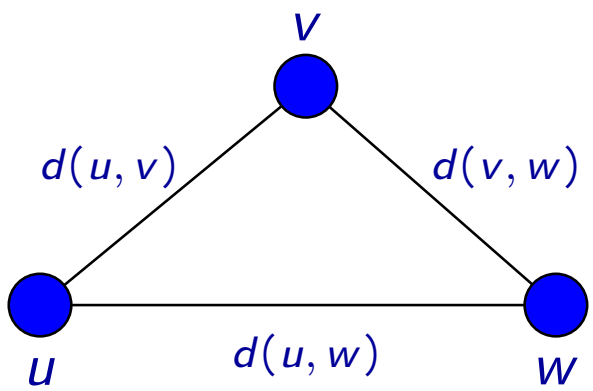
Poznámka: Pro nalezení nejkratších cest mezi dvojicemi vrcholů existují rychlé polynomiální algoritmy (např. Dijkstrův, Floydův-Warshallův apod.)

Graf s ohodnocením d' navíc splňuje tzv. **trojúhelníkovou nerovnost**.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

V grafu G s ohodnocením d je splněna **trojúhelníková nerovnost**, jestliže pro libovolnou trojici jeho vrcholů u, v, w platí

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$$



Tj. nejkratší cesta z u do w je vždy po hraně (u, w) a nemá cenu jít „oklikou“ přes nějaký jiný vrchol.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Variantu TSP, ve které se omezujeme pouze na instance, ve kterých je splněna trojúhelníková nerovnost (a kde musí být každý vrchol navštíven právě jednou), označujeme **Δ-TSP**.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Variantu TSP, ve které se omezujeme pouze na instance, ve kterých je splněna trojúhelníková nerovnost (a kde musí být každý vrchol navštíven právě jednou), označujeme **Δ-TSP**.

Pro problém Δ-TSP je znám 1.5-aproximační polynomiální algoritmus, tj. algoritmus, který pro daný graf G s ohodnocením d vrátí cyklus H procházející všemi vrcholy takový, že

$$d(H) \leq 1.5 \cdot d(H^*)$$

kde H^* optimální řešení (tj. cyklus s minimální hodnotou $d(H^*)$).

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Variantu TSP, ve které se omezujeme pouze na instance, ve kterých je splněna trojúhelníková nerovnost (a kde musí být každý vrchol navštíven právě jednou), označujeme Δ-**TSP**.

Pro problém Δ-TSP je znám 1.5-aproximační polynomiální algoritmus, tj. algoritmus, který pro daný graf G s ohodnocením d vrátí cyklus H procházející všemi vrcholy takový, že

$$d(H) \leq 1.5 \cdot d(H^*)$$

kde H^* optimální řešení (tj. cyklus s minimální hodnotou $d(H^*)$).

My si ukážeme poněkud jednodušší 2-aproximační polynomiální algoritmus pro problém Δ-TSP.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Před vlastním popisem algoritmu si připomeňme některé pojmy:

Kostra grafu $G = (V, E)$ je libovolný souvislý acyklický graf $T = (V', E')$, kde $V = V'$ a $E' \subseteq E$ (tj. T je souvislý podgraf grafu G obsahující všechny vrcholy z G).

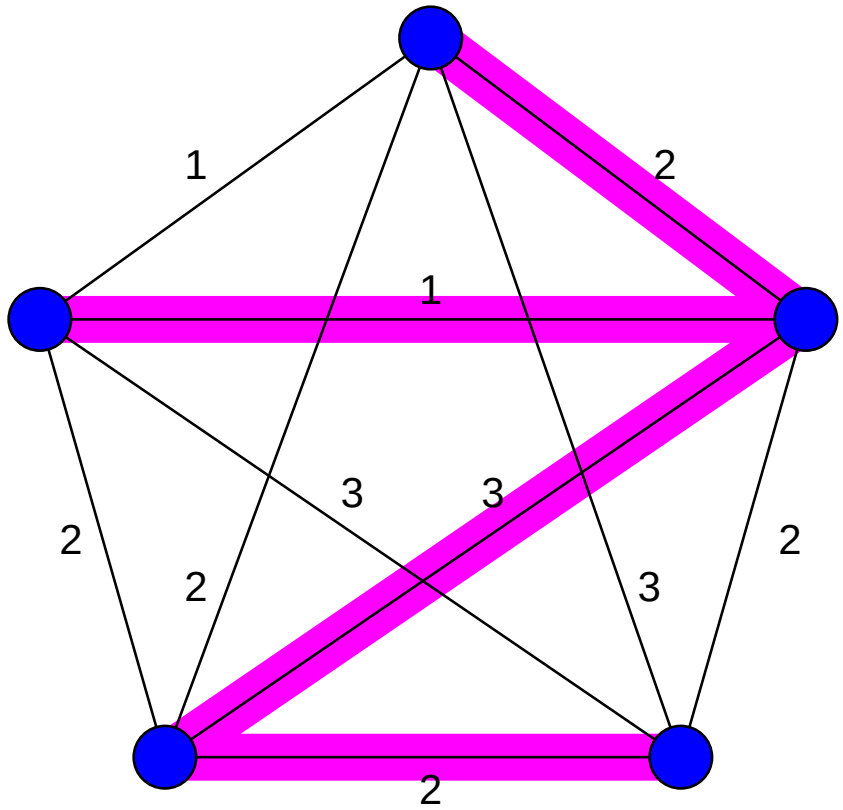
Hodnotu $d(T)$ definujeme jako součet hodnot hran v této kostře, tj. $d(T) = d(E')$.

Kostra T je **minimální**, jestliže pro libovolnou jinou kostru T' v grafu G platí $d(T) \leq d(T')$.

Pro problém nalezení minimální kostry v daném ohodnoceném grafu jsou známy rychlé polynomiální algoritmy (např. Kruskalův nebo Jarníkův (Primův)).

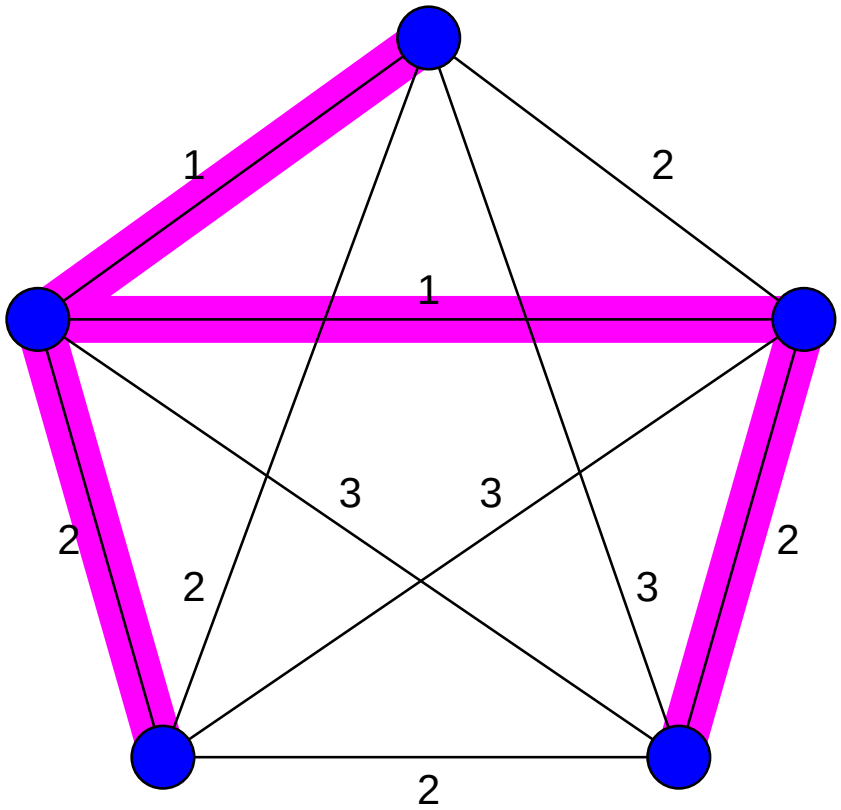
Problém obchodního cestujícího (TSP)

Příklad kostry T, kde $d(T) = 8$:



Problém obchodního cestujícího (TSP)

Příklad minimální kostry T, kde $d(T) = 6$:



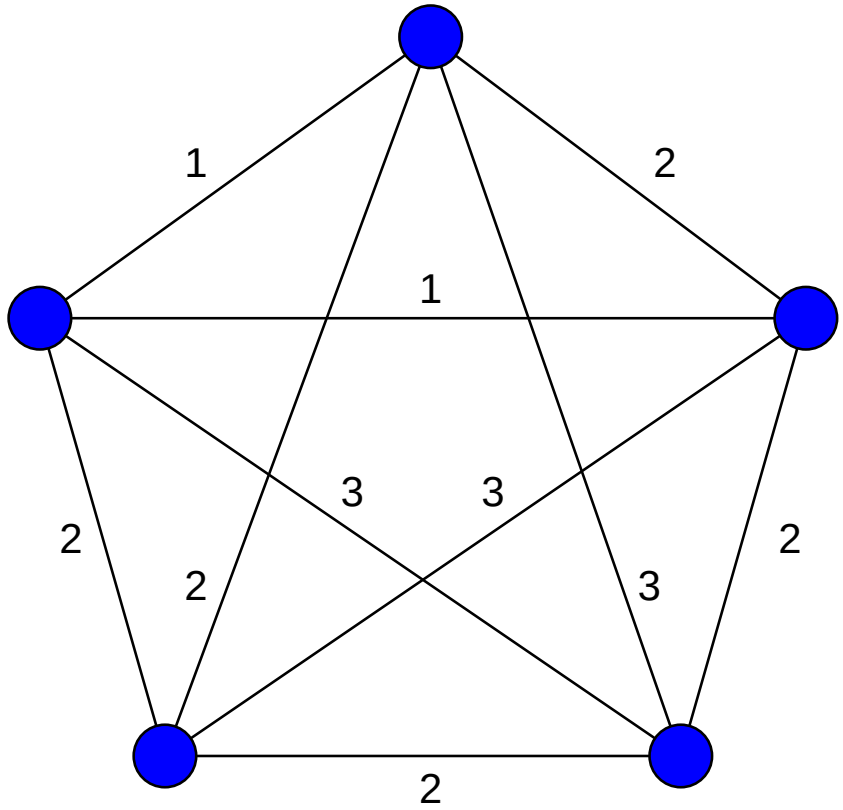
Problém obchodního cestujícího (TSP)

2-aproximační algoritmus pro Δ-TSP pracuje v následujících krocích:

- Najde minimální kostru grafu G.
- Vytvoří uzavřený tah podél této kostry.
- Z vytvořeného tahu odstraní opakující se vrcholy a výsledný cyklus vrátí jako výsledek.

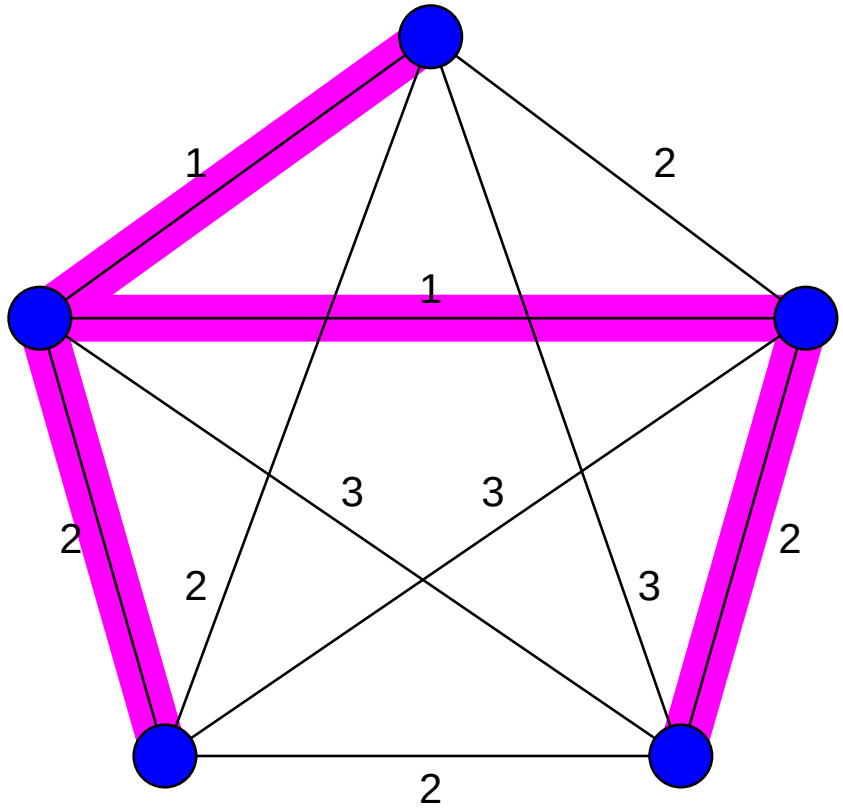
Problém obchodního cestujícího (TSP)

Vezměme si následující instanci Δ-TSP.



Problém obchodního cestujícího (TSP)

Krok 1: Nalezení minimální kostry T



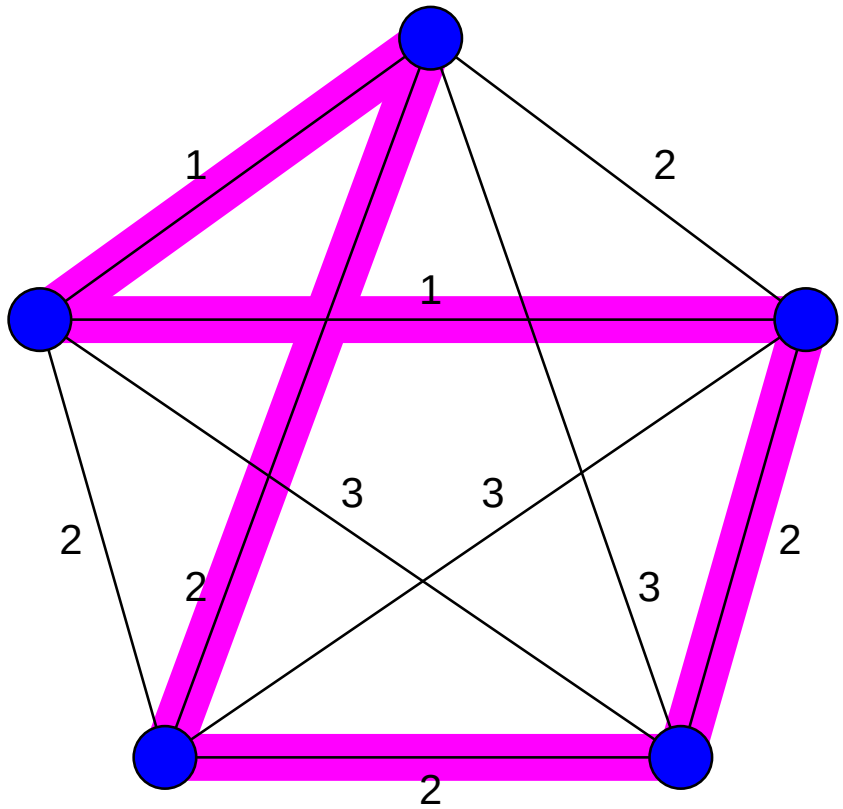
Problém obchodního cestujícího (TSP)

Všimněme si, že $d(T) < d(H^*)$:

- Pokud z H^* odstraníme libovolnou hranu, dostaneme kostru T'. Zjevně platí $d(T') < d(H^*)$.
- Pro libovolnou kostru T' platí $d(T) \leq d(T')$.

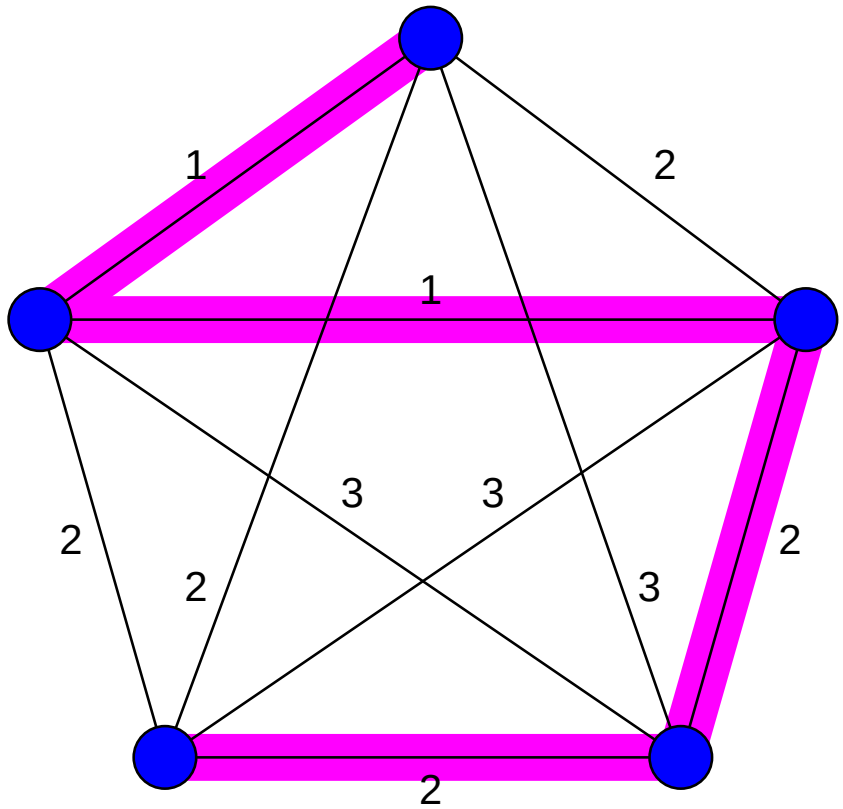
Problém obchodního cestujícího (TSP)

Příklad: Vezměme si optimální cyklus



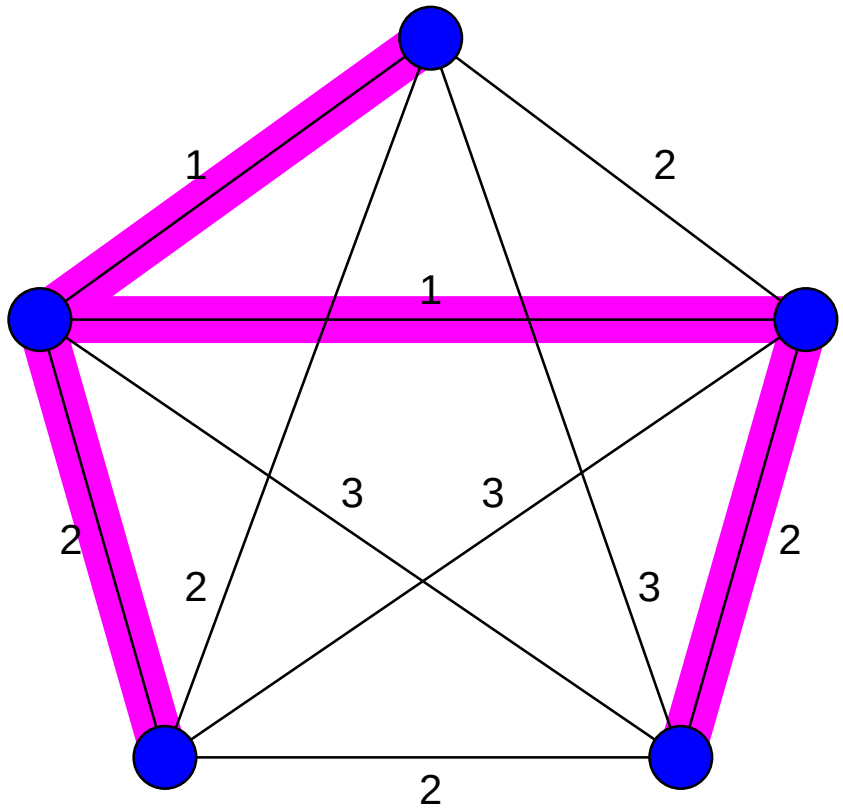
Problém obchodního cestujícího (TSP)

Příklad: Odstraněním jedné hrany vznikne kostra



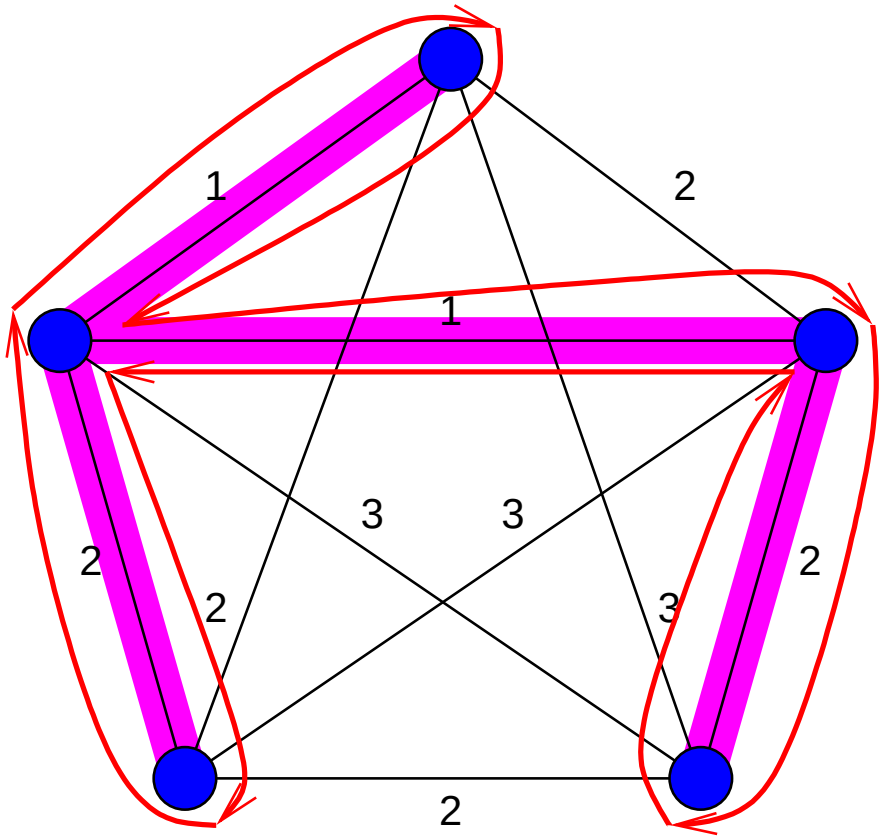
Problém obchodního cestujícího (TSP)

Krok 1: Nalezení minimální kostry



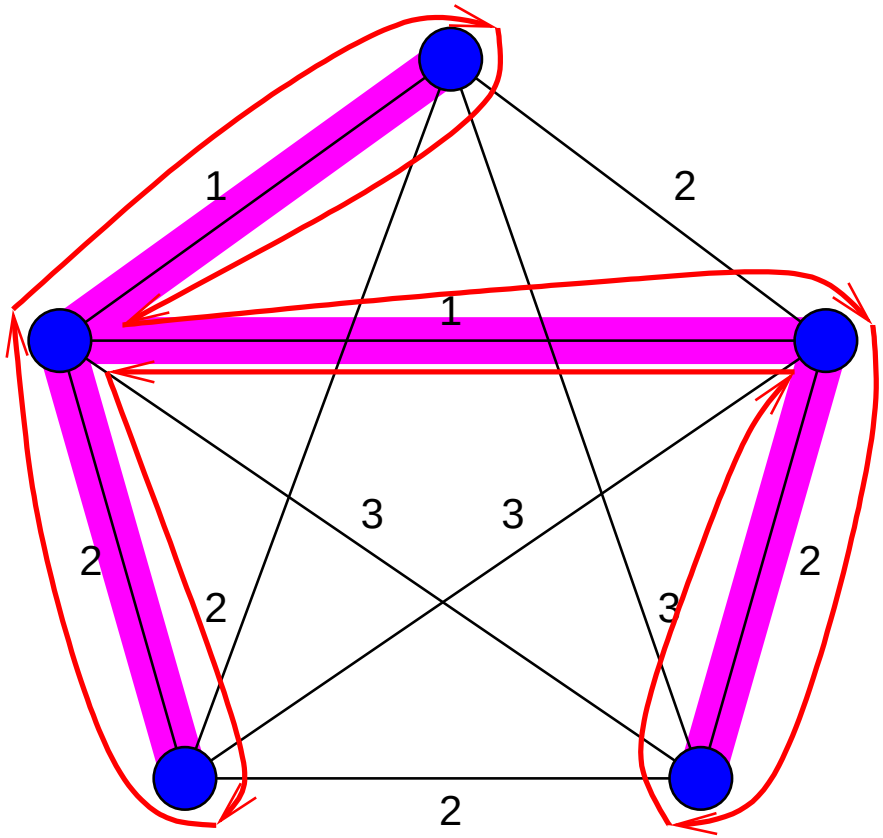
Problém obchodního cestujícího (TSP)

Krok 2: Vytvoření tahu H podél kostry



Problém obchodního cestujícího (TSP)

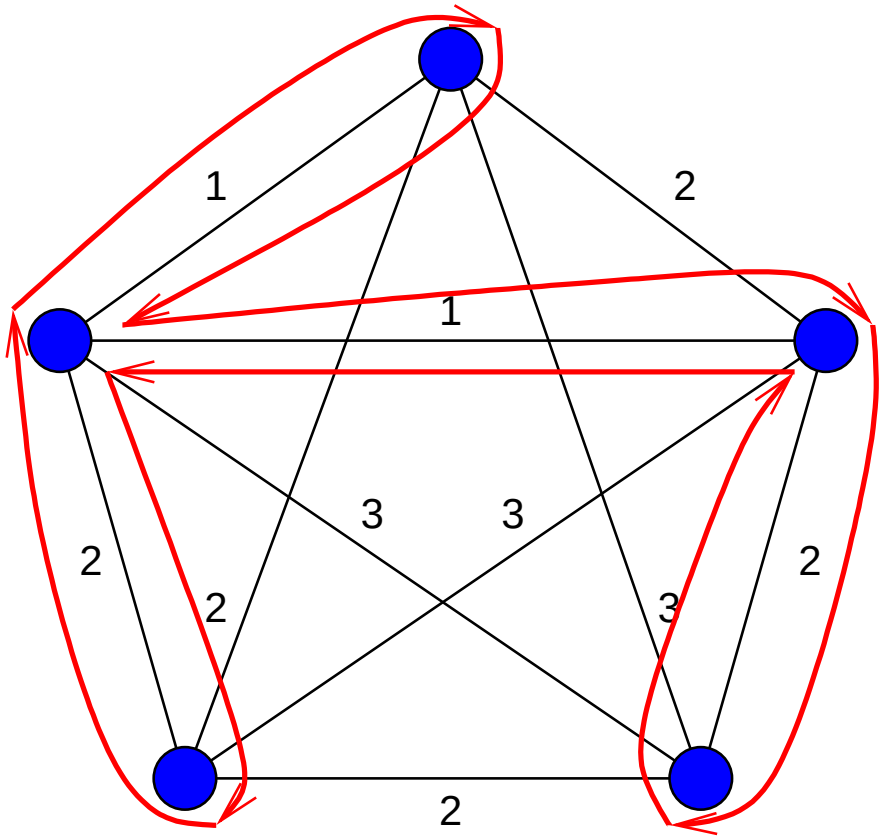
Krok 2: Vytvoření tahu H podél kostry



Každou hranu procházíme dvakrát, platí tedy $d(H) = 2d(T) < 2d(H^*)$.

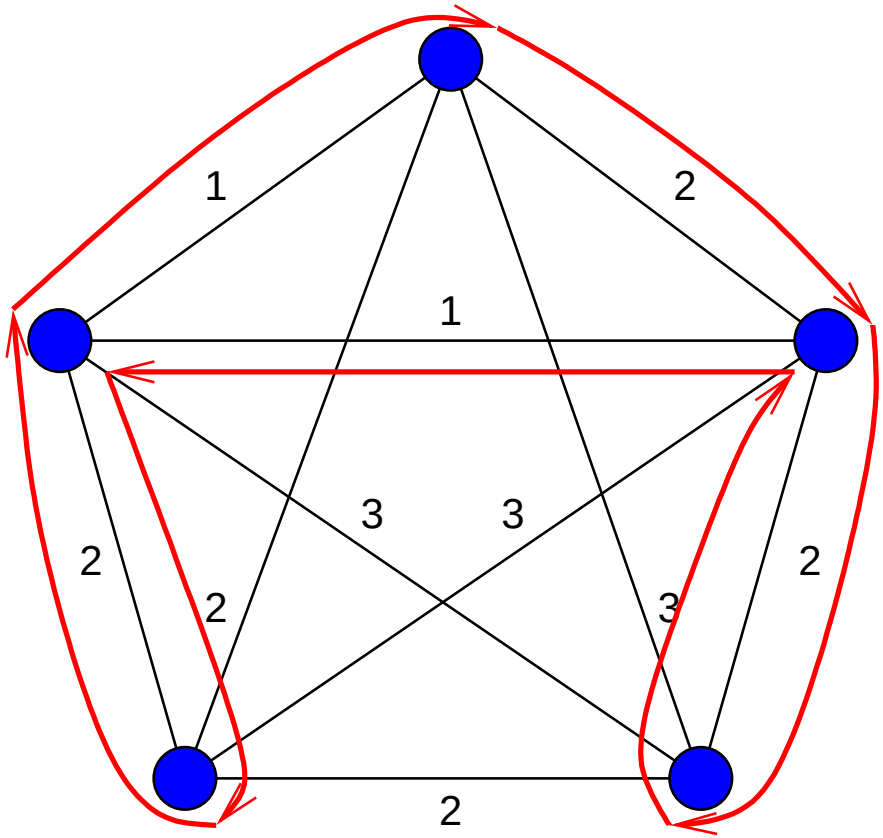
Problém obchodního cestujícího (TSP)

Krok 2: Vytvoření tahu H podél kostry



Problém obchodního cestujícího (TSP)

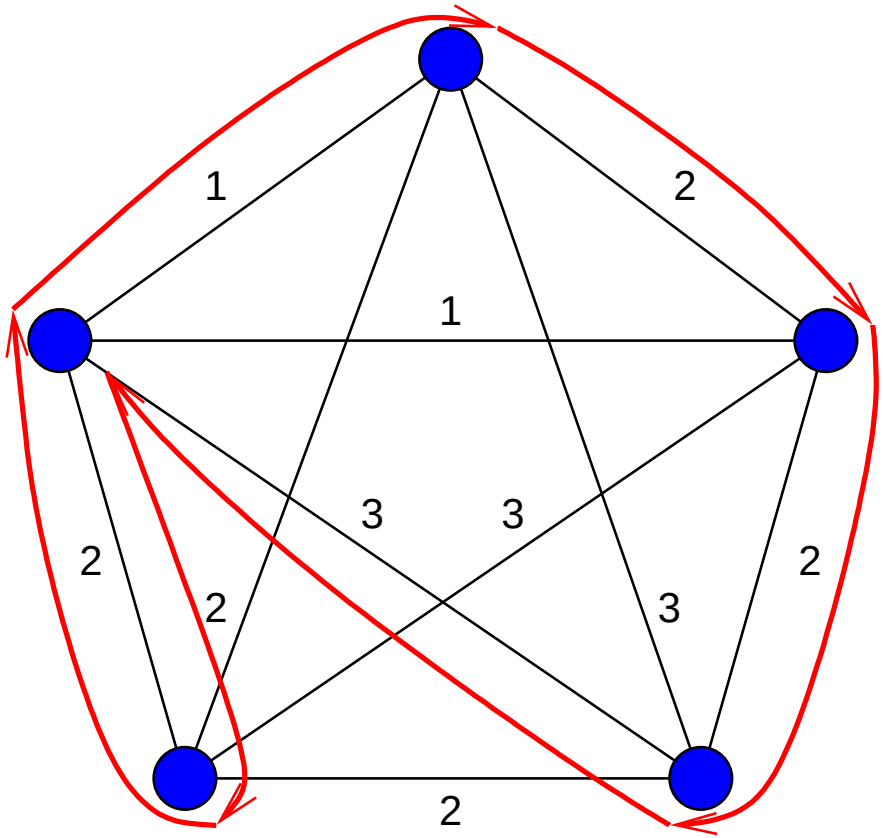
Krok 3: Postupné vypouštění opakujících se vrcholů z tahu H



Každé vypuštění vrcholu tah leda zkrátí.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

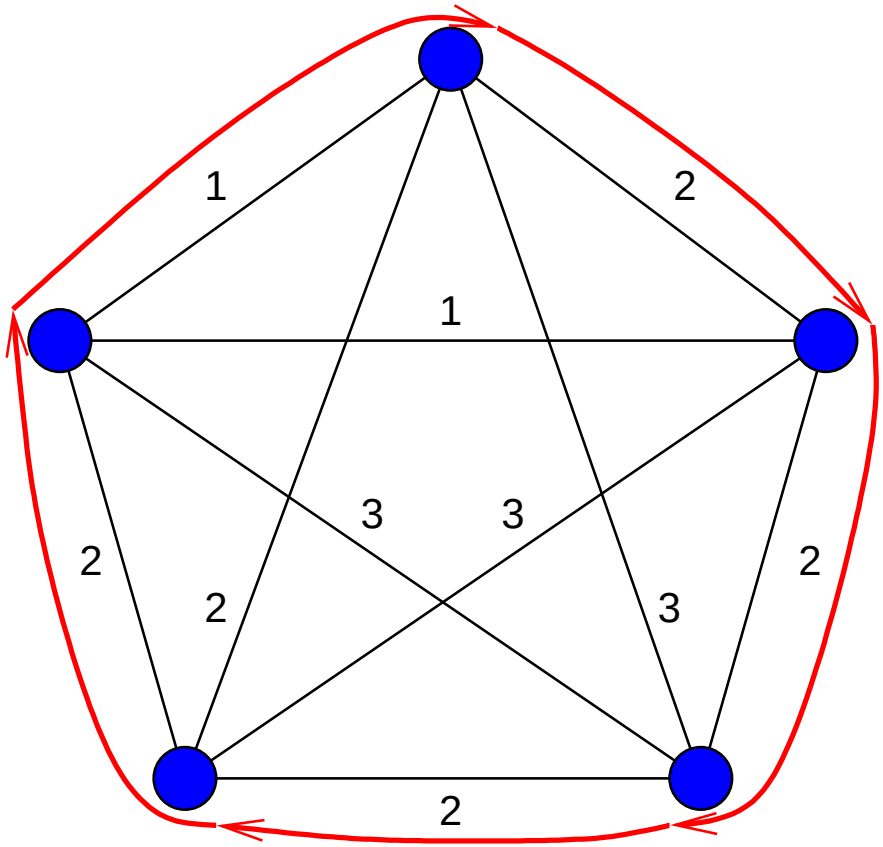
Krok 3: Postupné vypouštění opakujících se vrcholů z tahu H



Každé vypuštění vrcholu tah leda zkrátí.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Krok 3: Postupné vypouštění opakujících se vrcholů z tahu H



Každé vypuštění vrcholu tah leda zkrátí.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Nalezený cyklus: