Třídy L a NL

Logaritmické množství paměti

Jedním specifickým druhem algoritmů jsou algoritmy, které používají extrémně malé množství paměti — asymptoticky menší než n, kde n je velikost vstupu.

Speciálně se zde zaměříme na algoritmy s **logaritmickou prostorovou složitostí**, tj. s prostorovou složitostí $\mathcal{O}(\log n)$.

- Je zřejmé, že algoritmus, jehož paměťová složitost je menší než n, nemá dostatek paměti na to, aby měl v paměti uloženou celou vstupní instanci.
- U algoritmů, které pracují s takto malým množstvím paměti, se proto velikost vstupu a velikost výstupu **nezapočítává** do množství použité paměti.

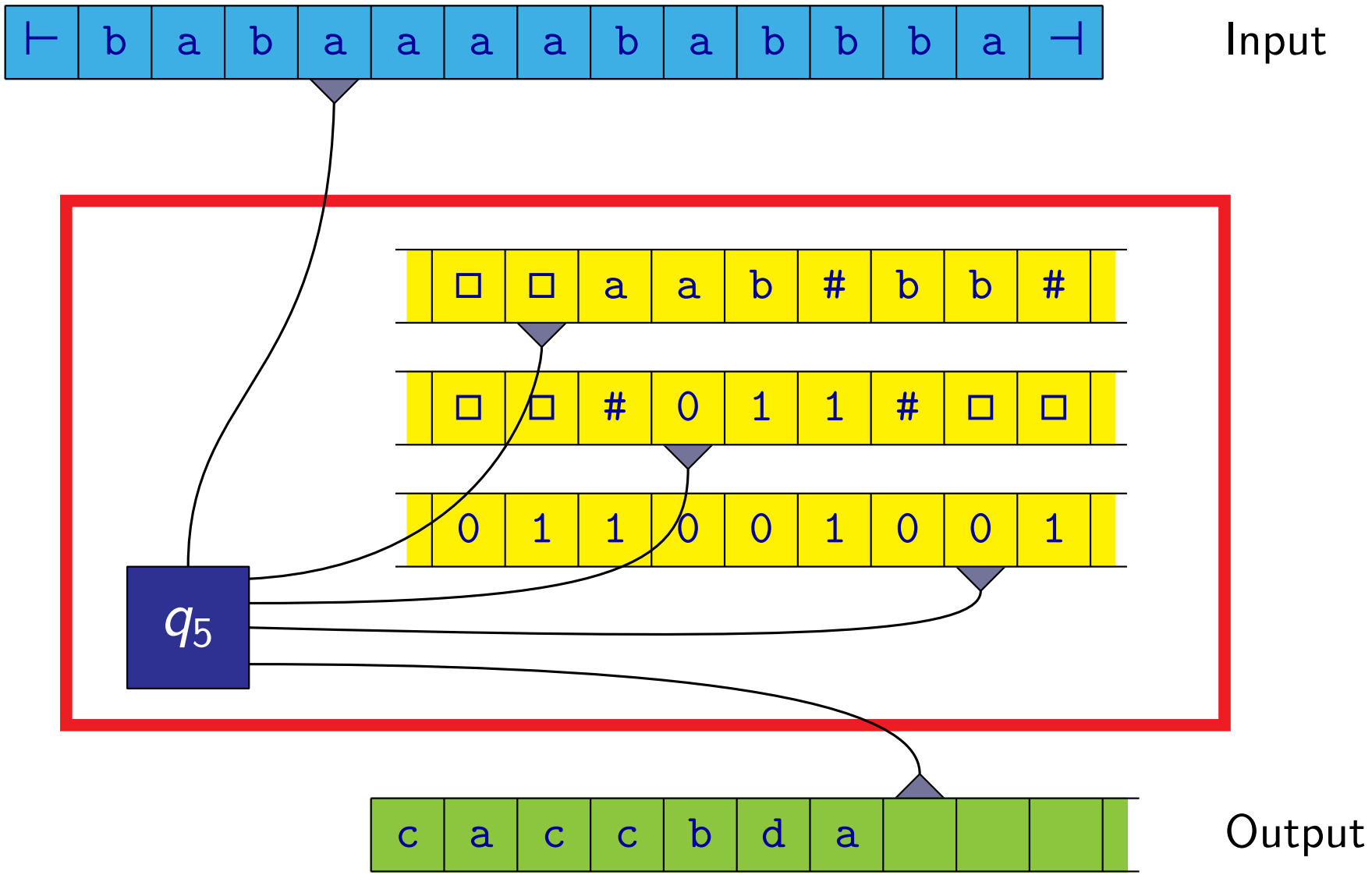
Logaritmické množství paměti

U takových algoritmů se předpokládá, že jsou vykonávány nějakým druhem stroje (např. Turingovým strojem), který má:

- **Vstupní pásku** — obsahuje vstupní slovo, které je ohraničeno zleva a zprava speciálními zarážkami '$\vdash$' a '$\dashv$', není možné na ni zapisovat (je read-only), má jednu hlavu, která se může posouvat oběma směry
- **Výstupní pásku** — je na ni možné pouze zapisovat (je write-only), není z ní možné číst, na začátku výpočtu je prázdná, pohyb hlavy je možný jen zleva doprava
- **Pracovní paměť** — je možné do ní zapisovat i z ní číst, např. u Turingových strojů má opět podobu jedné nebo více pásek

Množství použité paměti je dáno počtem bitů, které postačují pro uložení obsahu **pracovní paměti** během výpočtu.

Logaritmické množství paměti



Logaritmické množství paměti

Pokud je velikost vstupu n, $\mathcal{O}(\log n)$ bitů paměti v zásadě postačuje pouze na uložení nějakého fixního konečného počtu hodnot, kde každá z těchto hodnot zabírá maximálně $\mathcal{O}(\log n)$ bitů.

Pomocí k bitů je možné reprezentovat čísla v intervalu 0 až $2^k - 1$.

Logaritmický počet bitů tedy postačuje na reprezentaci čísla, jehož hodnota je omezena polynomem (tj. číslo, jehož maximální hodnota je $\mathcal{O}(n^c)$, kde c je nějaká konstanta).

Pomocí takových čísel je možné reprezentovat např:

- index políčka na vstupní pásce — de facto ukazatel do vstupních dat
- čítač, jehož hodnota je omezena polynomem
- u grafových algoritmů např. index vrcholu či hrany
- u algoritmů pracujících s maticemi např. číslo řádku či číslo sloupce

Logaritmické množství paměti

Naopak $\mathcal{O}(\log n)$ bitů paměti nepostačuje pro uložení věcí jako třeba:

- Pokud je vstup tvořen posloupností n prvků, uložit si pro každý z těchto prvků alespoň 1 bit informace (např. nějaký příznak).
- U grafových algoritmů si např. pamatovat, které vrcholy byly navštíveny.

Logaritmické množství paměti

Příklad: Uvažujme problémy, kde vstup vypadá následovně:

> Vstup: Dvojice čísel x a y, kde tato čísla jsou reprezentována binárně jako sekvence n bitů.

Algoritmy s logaritmickou prostorovou složitostí je možné počítat například následující věci:

- součet a rozdíl hodnot x a y (tj. hodnoty $x + y$ a $x - y$)
- součin hodnot x a y (tj. hodnotu $x \cdot y$)
- zjištění toho, zda platí $x = y$, $x < y$, $x \leq y$
- maximum či minimum (tj. hodnoty $\max(x, y)$ a $\min(x, y)$)

Logaritmické množství paměti

Příklad: Uvažujme problémy, kde vstup vypadá následovně:

Vstup: Posloupnost čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Řekněme, že n je celkový počet bitů nutný k zápisu čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Algoritmy s prostorovou složitostí $\mathcal{O}(\log n)$ je možné spočítat například následující:

- setřídit prvky od nejmenšího po největší
- součet $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$

Poznámka: Všimněte si, že spočítání součtu čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ v prostoru $\mathcal{O}(\log n)$ není úplně triviální úloha, protože některá z čísel mohou mít více než $\mathcal{O}(\log n)$ bitů — vezměme si třeba případ, kdy počet čísel je $\sqrt{n}$ a každé z nich má $\sqrt{n}$ bitů.

Logaritmické množství paměti

Příklad: Také následující problém je možné řešit s prostorovou složitostí $\mathcal{O}(\log n)$:

Násobení matic

Vstup: Matice A a B, jejichž prvky jsou přirozená čísla.

Výstup: Matice $A \cdot B$.

Poznámka: Podobně jako v předchozím případě vezměme jako velikost vstupu n celkový počet bitů nutných k zápisu matic A a B (tj. k zápisu všech jejich prvků).

Může se stát, že některé prvky těchto matic mají více než $\mathcal{O}(\log n)$ bitů.

Úloha tedy opět není tak jednoduchá, jak může na první pohled vypadat.

Logaritmické množství paměti

Také následující problém je možné snadno řešit deterministickým algoritmem s prostorovou složitostí $\mathcal{O}(\log n)$:

Vstup: Slovo w tvořené různými druhy závorek $([_1,]_1, [_2,]_2, \ldots, [_r,]_r)$.

Otázka: Jedná se o správně uzávorkovanou posloupnost?

Správně uzávorkovanou posloupností se zde myslí posloupnost patřící do jazyka generovaného následující bezkontextovou gramatikou:

$$A \to \varepsilon \mid AA \mid [_1\, A\,]_1 \mid [_2\, A\,]_2 \mid \cdots \mid [_r\, A\,]_r$$

Logspace redukce

Je zajímavé, že pro naprostou většinu polynomiálních redukcí použitých např. v důkazech NP-obtížnosti, PSPACE-obtížnosti, apod. různých problémů (jaké jsme si ukazovali v předchozích přednáškách či jaké jsou popsány v literatuře) platí, že příslušnou redukci je možné implementovat jako (deterministický) algoritmus pracující s logaritmickým množstvím paměti.

Takové redukce se označují jako **logspace redukce**.

Logspace redukce

Definice

Logspace redukce rozhodovacího problému A na rozhodovací problém B je deterministický algoritmus Alg s prostorovou složitostí $\mathcal{O}(\log n)$, který:

- Dostane jako vstup instanci x problému A.
- Vyprodukuje jako výstup instanci y problému B.
- V problému B bude pro vstup y odpověď ANO právě tehdy, když v problému A bude pro vstup x odpověď ANO.

Logspace redukce

Věta

Jestliže existuje:

- logspace redukce problému A na problém B a
- logspace redukce problému B na problém C

tak existuje i:

- logspace redukce problému A na problém C.

Důkaz: Předpokládejme, že:

- Alg_1 je logspace redukce problému A na problém B
- Alg_2 je logspace redukce problému B na problém C

Následující jednoduchá konstrukce, která funguje pro polynomiální redukce, zde nefunguje:

- na instanci x problému A aplikovat redukci Alg_1, kterou dostaneme instanci y problému B, a na tu pak aplikovat redukci Alg_2

Logspace redukce

Problém je v tom, že takový algoritmus by sice byl redukce, ale ne logspace redukce:

- Instance y problému B vytvořená redukcí Alg_1 může být až polynomiálně velká vzhledem k velikosti původní instance x problému A
  — pracovní paměť logaritmické velikosti nebude stačit na uložení této instance y

Logspace redukce

Je třeba postupovat odlišně — algoritmus převádějící instanci problému A na instanci problému C bude pracovat následovně:

- Bude simulovat činnost algoritmu Alg_2.
- Bude si pamatovat pozici jeho hlavy na vstupní pásce — tato pozice bude reprezentována binárně (stačí na ni $\mathcal{O}(\log n)$ bitů).
- Kdykoli algoritmus Alg_2 potřebuje přečíst symbol ze vstupu:
  - Spustí od začátku simulaci algoritmu Alg_1.
  - V krocích, kde by Alg_1 zapsal symbol na výstup, není tento výstup nikam zapisován, je pouze inkrementováno počítadlo zapsaných symbolů.
  - V okamžiku, kdy by Alg_1 zapsal symbol na pozici, kterou potřebuje Alg_2 číst, je simulace Alg_1 ukončena, algoritmu Alg_2 je předán příslušný symbol a pokračuje se v simulaci činnosti algoritmu Alg_2.

Logspace redukce

Není těžké si rozmyslet následující:

- Předpokládejme, že problém A je logspace převoditelný na problém B.
- Pokud bude existovat algoritmus s logaritmickou prostorovou složitostí řešící problém B, bude existovat i algoritmus s logaritmickou prostorovou složitostí řešící problém A.
- Pokud by tedy neexistoval algoritmus s logaritmickou prostorovou složitostí řešící problém A, nebude existovat ani algoritmus s logaritmickou prostorovou složitostí řešící problém B.

Logaritmické množství paměti

Pro následující problém není znám žádný **deterministický** algoritmus s logaritmickou prostorovou složitostí:

Dosažitelnost v grafu (Graph Reachability)

Vstup: Orientovaný graf $G = (V, E)$ se dvěma vyznačenými vrcholy s a t.

Otázka: Existuje v grafu G cesta z vrcholu s do vrcholu t?

Očividně však existuje velmi jednoduchý **nedeterministický** algoritmus s prostorovou složitostí $\mathcal{O}(\log n)$ řešící tento problém:

- Pamatuje si vždy jen aktuální vrchol v a hodnotu čítače c.
- Inicializuje $v := s$ a $c := m - 1$, kde m je počet vrcholů grafu G.
- Nedeterministicky hádá cestu a s každým krokem snižuje čítač o 1.

Třídy L a NL

Připomeňme definice následujících tříd složitosti:

Třída LOGSPACE (zkráceně L)

Třída LOGSPACE (či zkráceně L) je tvořena právě těmi rozhodovacími problémy, pro které existuje **deterministický** algoritmus s prostorovou složitostí $\mathcal{O}(\log n)$.

Třída NLOGSPACE (zkráceně NL)

Třída NLOGSPACE (či zkráceně NL) je tvořena právě těmi rozhodovacími problémy, pro které existuje **nedeterministický** algoritmus s prostorovou složitostí $\mathcal{O}(\log n)$.

Třídy L a NL

- Je zjevné, že $\mathsf{L} \subseteq \mathsf{NL}$.
- Podobně jako v případě tříd P a NP se neví, jestli $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, také pro třídy L a NL se neví, zda $\mathsf{L} = \mathsf{NL}$.

  (Zdá se spíše pravděpodobné, že tato rovnost neplatí, není to ale dokázáno.)

Příklad: Viděli jsme, že platí následující:

Problém „*Dosažitelnost v grafu*“ je ve třídě NL.

Vypadá to, že tento problém zřejmě není ve třídě L, není to ale jisté.

NL-úplné problémy

Definice

- Problém A je NL-**těžký**, jestliže každý problém z NL je logspace převeditelný na problém A.
- Problém A je NL-**úplný**, jestliže je NL-těžký a zároveň sám patří do třídy NL.

- Pokud by tedy libovolný NL-úplný problém byl řešitelný deterministickým algoritmem s logaritmickou prostorovou složitostí, znamenalo by to, že L = NL.
- Pokud bude existovat alespoň jeden problém, který je v NL, ale není v L, tak určitě nemůže existovat deterministický algoritmus s logaritmickou prostorovou složitostí pro žádný NL-těžký problém.

NL-úplné problémy

Věta

„Dosažitelnost v grafu“ je NL-úplný problém.

Myšlenka důkazu:

To, že tento problém patří do třídy NL jsme už viděli.

Je třeba ukázat, že každý problém A z NL je logspace převeditelný na problém dosažitelnosti v grafu.

Protože problém A patří do třídy NL, existuje nedeterministický stroj $\mathcal{M}$ (např. Turingův stroj nebo jiný typ stroje) s logaritmickou prostorovou složitostí, který ho řeší.

Počet všech možných konfigurací stroje $\mathcal{M}$ nad daným vstupem x velikosti x bude polynomiální.

V logaritmickém prostoru je možné vygenerovat graf, kde:

- **vrcholy** — konfigurace stroje $\mathcal{M}$
- **hrany** — přechody mezi těmito konfiguracemi

NL-úplné problémy

Pomocí logspace redukcí z tohoto problému se dá ukázat NL-obtížnost řady dalších problémů.

Příklady některých NL-úplných problémů:

2-UNSAT

Vstup: Booleovská formule φ v konjunktivní normální formě, kde každá klauzule obsahuje právě 2 literály.

Otázka: Je formule φ nesplnitelná (tj. je to kontradikce)?

NL-úplné problémy

Přijímaní slova NKA

Vstup: Nedeterministický konečný automat $\mathcal{A}$ a slovo w.

Otázka: Přijímá automat $\mathcal{A}$ slovo w (tj. platí $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$)?

Dosažitelné neterminály v bezkontextové gramatice

Vstup: Bezkontextová gramatika $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, S, P)$
a neterminál $B \in \Pi$.

Otázka: Existují nějaká $\alpha, \beta \in (\Pi \cup \Sigma)^*$ taková, že $S \Rightarrow^* \alpha B \beta$?

NL-úplné problémy

Prázdnost jazyka přijímaného DKA

Vstup: Deterministický konečný automat $\mathcal{A}$.

Otázka: Je $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \varnothing$?

Univerzalita DKA

Vstup: Deterministický konečný automat $\mathcal{A}$.

Otázka: Je $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \Sigma^*$?

Ekvivalence DKA

Vstup: Deterministické konečné automaty $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_2$.

Otázka: Je $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$?

NL-úplné problémy

Generování prvku asociativní operací

Vstup: Konečná množina X, asociativní binární operace $\circ$ na množině X (zadaná tabulkou specifikující hodnotu $x \circ y$ pro každou dvojici $x, y \in X$), podmnožina $S \subseteq X$ a prvek $t \in X$.

Otázka: Je možné prvek t vygenerovat z prvků množiny S?

Prvek t je možné vygenerovat z prvků množiny S, jestliže existuje posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_k$ prvků z množiny S taková, že

$$t = x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_k$$

Třída co-NL

Podobně jako se ke třídě NP zavádí třída co-NP, je ke třídě NL možné zavést třídu co-NL.

Definice

Třída co-NL je tvořena doplňkovými problémy k problémům ze třídy NL.

Zatímco v případě tříd NP a co-NP se neví, jestli platí NP = co-NP (a spíše se zdá, že NP ≠ co-NP), v případě tříd NL a co-NL se ví, že platí následující poměrně překvapující výsledek:

$$\text{NL} = \text{co-NL}$$

Nedosažitelnost v grafu v NL

Věta — Immerman-Szelepcsényi (1987)

Doplňkový problém k problému „*Dosažitelnost v grafu*“ je ve třídě NL.

Myšlenka důkazu: Pro daný orientovaný graf $G = (V, E)$ a dvojici vrcholů s a t je třeba nedeterministickým algoritmem s logaritmickou prostorovou složitostí ověřit, že **neexistuje** cesta z s do t.

Označme S množinu všech vrcholů dosažitelných z s:

$$S = \{v \in V \mid \text{v } G \text{ existuje cesta z } s \text{ do } v\}$$

Je třeba ověřit, že $t \notin S$.

Množinu S určitě není možné držet v paměti — $\mathcal{O}(\log n)$ bitů by na to nestačilo.

Nedosažitelnost v grafu v NL

Řekněme, že bychom však znali přesnou velikost množiny S.
To by bylo jedno číslo $m = |S|$, na jehož uložení by $\mathcal{O}(\log n)$ bitů stačilo.

Nedeterministický algoritmus, který by toto číslo znal, by ověřil, že $t \notin S$, následujícím způsobem:

- Postupně by pro všechny vrcholy $v \in V - \{t\}$ hádal, zda pro daný vrchol v platí $s \in S$ nebo ne.

  Pro ty vrcholy v, pro které by hádal, že $v \in S$ platí, by ověřil, že tomu tak skutečně je — hádal by příslušnou cestu z s do v.
  Pokud by při tomto ověřování byl neúspěšný, skončí neúspěchem (dá odpověď NE).

- Zároveň by počítal počet těch vrcholů, u kterých hádal, že patří do množiny S.

- Nakonec by zkontroloval, zda je tento počet roven m, a dal odpověď ANO právě tehdy, když tomu tak je.

Nedosažitelnost v grafu v NL

Zbývá tedy vyřešit, jak spočítat velikost množiny S.

Pokud by na množství paměti nezáleželo, mohli bychom počítat množinu S postupem, kdy bychom postupně počítali následující posloupnost množin

$$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{n-2}, S_{n-1}$$

kde pro $i = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$S_i = \{v \in V \mid \text{v } G \text{ existuje cesta z } s \text{ do } v \text{ délky nejvýše } i\}$$

Zjevně platí:

- $S_0 = \{s\}$
- $S_{i+1} = S_i \cup \{ v \in V \mid \exists u \in S_i : (u, v) \in E \}$
- $S = S_{n-1}$

Nedosažitelnost v grafu v NL

Algoritmus bude postupně pro $i = 0, 1, \ldots, n-1$ počítat velikosti množin S_i, tj. hodnoty

$$m_0,\ m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{n-2},\ m_{n-1}$$

kde $m_i = |S_i|$.

V každém okamžiku si bude pamatovat jen aktuální hodnotu m_i.

Začne s hodnotou $m_0 = 1$.

Pro $i = 0, 1, \ldots, n-2$ spočítá hodnotu m_{i+1} z m_i následovně:

- Bude probírat všechny vrcholy $v \in V - \{s\}$.
- Pro každý z těchto vrcholů v zjistí, zda $v \in S_{i+1}$, následovně:
  Vyzkouší všechny $u \in V$ takové, že $(u, v) \in E$.
  Pro každý z nich zjistí, zda $u \in S_i$ (viz dále).
  Pokud najde alespoň jeden vrchol u, pro který platí $(u, v) \in E$ a $u \in S_i$, zvýší počítadlo vrcholů v S_{i+1} o 1.

Nedosažitelnost v grafu v NL

Se znalostí hodnoty m_i je možné testovat, zda $u \in S_i$, následujícím způsobem:

- Pro všechny vrcholy $w \in V$ postupně hádat, zda $w \in S_i$ (tj. zda existuje cesta z s do w délky nejvýše i).
  U těch w, kde algoritmus uhodne, že platí $w \in S_i$, to musí ověřit nedeterministickým uhodnutím příslušné cesty délky nejvýše i.
  (Pokud není při ověření úspěšný, končí celkovým neúspěchem.)
- Pro daný vrchol u si pamatuje, co pro něj uhodl, zda $u \in S_i$ nebo $u \notin S_i$.
- Počítat vrcholy, u kterých bylo uhodnuto, že patří S_i.
- Nakonec se ověří, zda je tento počet roven m_i.
  Pokud ne, skončí se neúspěchem.

Nedosažitelnost v grafu v NL

Stejnou myšlenku je možné použít pro libovolný nedeterministický algoritmus, který řeší nějaký rozhodovací problém A a má prostorovou složitost $S(n)$ (kde $S(n) \in \Omega(\log n)$).

Pro takový algoritmus můžeme uvažovat graf jeho konfigurací a výše uvedeným způsobem k němu vytvořit nedeterministický algoritmus s prostorovou složitostí $\mathcal{O}(S(n))$, který bude ověřovat, že v původním grafu není žádná přijímající konfigurace dosažitelná z počáteční konfigurace.

Tento nedeterministický algoritmus tak bude řešit doplňkový problém k problému A s prostorovou složitostí $\mathcal{O}(S(n))$.

Dostáváme tak následující:

Důsledek

Pro každou funkci $S(n) \geq \log n$ platí

$$\text{NSPACE}(S(n)) = \text{co-NSPACE}(S(n))$$

NL-úplné problémy

Z předchozího je zřejmé, že každý NL-úplný problém je zároveň co-NL-úplný a naopak.

Je také zřejmé, že pro každý problém A platí, že A je NL-úplný problém právě tehdy, když doplňkový problém problému A je NL-úplný.

Pro všechny dříve uvedené NL-úplné problémy tedy platí, že i jejich doplňkové problémy jsou NL-úplné.

Například z NL-úplnosti problému 2-UNSAT plyne NL-úplnost problému 2-SAT:

2-SAT

Vstup: Booleovská formule φ v konjunktivní normální formě, kde každá klauzule obsahuje právě 2 literály.

Otázka: Je formule φ splnitelná?

P-úplné problémy

P-úplné problémy

Připomeňme, že P (resp. PTIME) je třída rozhodovacích problémů řešitelných algoritmem s **polynomiální** časovou složitostí.

Definice

- Problém A je P-**těžký**, jestliže každý problém z P je logspace převeditelný na problém A.
- Problém A je P-**úplný**, jestliže je P-těžký a zároveň sám patří do třídy P.

- Je jasné, že $\mathsf{NL} \subseteq \mathsf{P}$.
- Zda platí $\mathsf{NL} = \mathsf{P}$, není známo. (Zdá se, že spíše platí $\mathsf{NL} \neq \mathsf{P}$)
- Pokud by libovolný P-úplný problém byl v NL, tak by každý problém z P byl v NL, a platilo by $\mathsf{NL} = \mathsf{P}$.
- Pokud by naopak alespoň jeden problém z P nebyl v NL, pak žádný z P-úplných problémů nebude v NL.

P-úplné problémy

P-úplné problémy hrají také důležitou roli jako problémy, které:

- Jsou řešitelné v polynomiálním čase.
- Jsou však **špatně paralelizovatelné** v tom smyslu, že se zdá, že pro ně neexistují **efektivní paralelní** algoritmy, tj. algoritmy, které:
  - používají polynomiální počet procesorů
  - pracují v polylogaritmickém čase
    (tj. v čase $\mathcal{O}(\log^k n)$ pro nějakou konstantu k)

Poznámka: Třída problémů, které se dají řešit takovými efektivními paralelními algoritmy se označuje NC.

Třídou NC (a paralelními algoritmy obecně) se budeme zabývat později.

Obvody

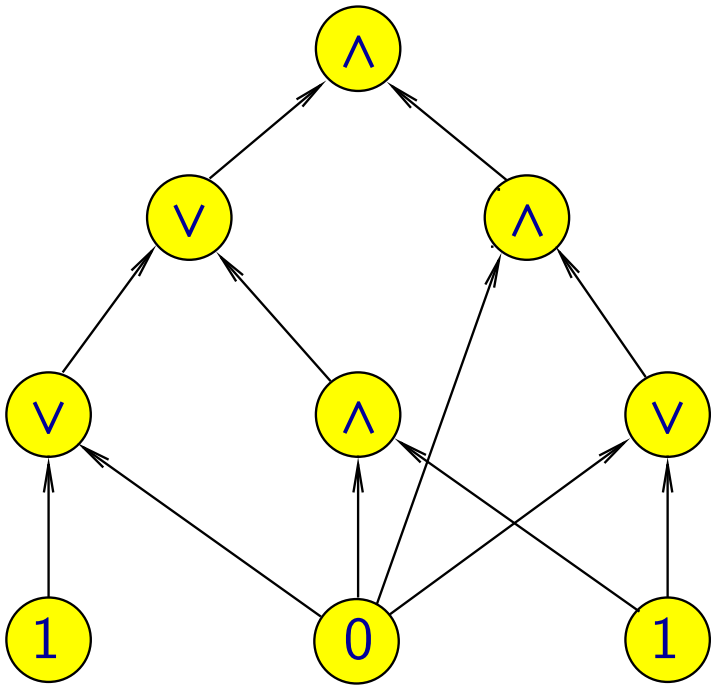
Booleovský obvod je orientovaný acyklický graf tvořený vrcholy dvou typů — **vstupy** (**inputs**) a **hradly** (**gates**), a hranami, které představují **vodiče** (**wires**):

- **Vstupy** — nevedou do nich žádné hrany, jsou označeny jmény booleovských proměnných (každý vstup jiným jménem)
  — hodnota daného vstupu je dána přiřazením booleovské hodnoty příslušné proměnné
- **Hradla** — jsou tří různých typů:
  - NOT — negace; vede do něj vždy právě jedna hrana
  - AND — konjunkce; vedou do něj vždy alespoň dvě hrany
  - OR — disjunkce; vedou do něj vždy alespoň dvě hrany
- Jeden z vrcholů je označen jako výstupní.

Circuit Value Problem (CVP)

Vstup: Popis booleovského obvodu G a pravdivostní ohodnocení ν reprezentující hodnoty přiřazené jeho vstupům.

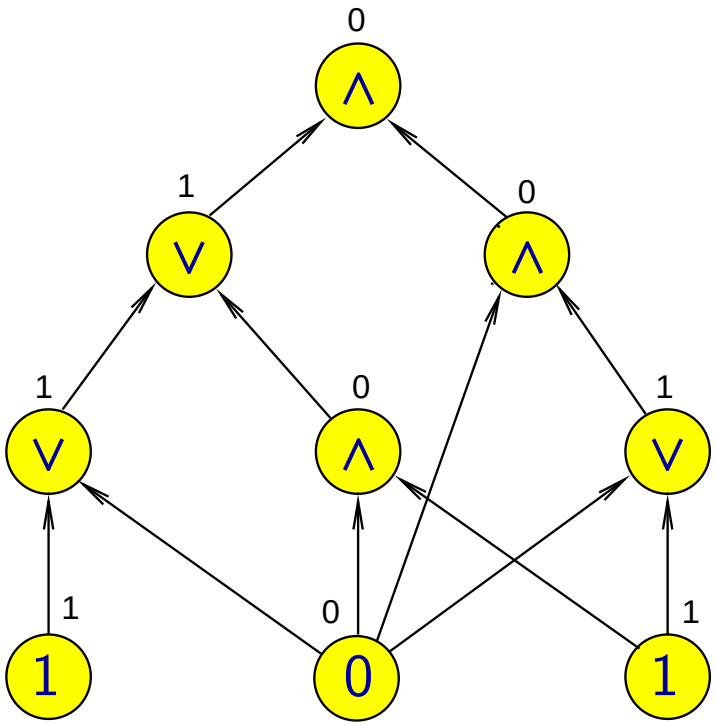
Otázka: Je při daném přiřazení hodnot vstupů ν na výstupu obvodu G hodnota 1 ?



Circuit Value Problem (CVP)

Vstup: Popis booleovského obvodu G a pravdivostní ohodnocení ν reprezentující hodnoty přiřazené jeho vstupům.

Otázka: Je při daném přiřazení hodnot vstupů ν na výstupu obvodu G hodnota 1 ?



Circuit Value Problem (CVP)

Věta

CVP je P-úplný problém.

Myšlenka důkazu:
To, že problém CVP patří do třídy P je očividné — přímočarý algoritmus vyhodnocující hodnoty jednotlivých hradel má očividně polynomiální časovou složitost.

Je třeba ukázat, že každý problém z P je logspace převeditelný na CVP.

Předpokládejme, že máme dán nějaký konkrétní problém A ze třídy P.
Pro problém A existuje polynomiální algoritmus, který ho řeší.
Tento algoritmus může být realizován nějakým strojem (např. Turingovým strojem) $\mathcal{M}$ s polynomiální časovou složitostí omezenou nějakým konkrétním polynomem $p(n)$.

Circuit Value Problem (CVP)

Délka výpočtu nad vstupem velikosti n je maximálně $p(n)$.

Jednotlivé konfigurace stroje $\mathcal{M}$ je možné kódovat jako sekvence $\mathcal{O}(p(n))$ bitů.

Ke vstupu x se vyrobí obvod:

- Bude se skládat z $p(n) + 1$ „úrovní“, které budou odpovídat konfiguracím $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p(n)}$, kterými stroj $\mathcal{M}$ projde při výpočtu nad vstupem x.
- Vstupy budou reprezentovat počáteční konfiguraci α_0.
- Mezi úrovně i a $i + 1$ (kde $0 \leq i < p(n)$) se přidá obvod, který z binární reprezentace konfigurace α_i spočítá binární reprezentaci konfigurace α_{i+1}.
- Za poslední úroveň (úroveň $p(n)$) se přidá obvod, který bude generovat výstup 1 právě tehdy, když hodnoty na této úrovni reprezentují přijímající konfiguraci.

Circuit Value Problem (CVP)

Definice

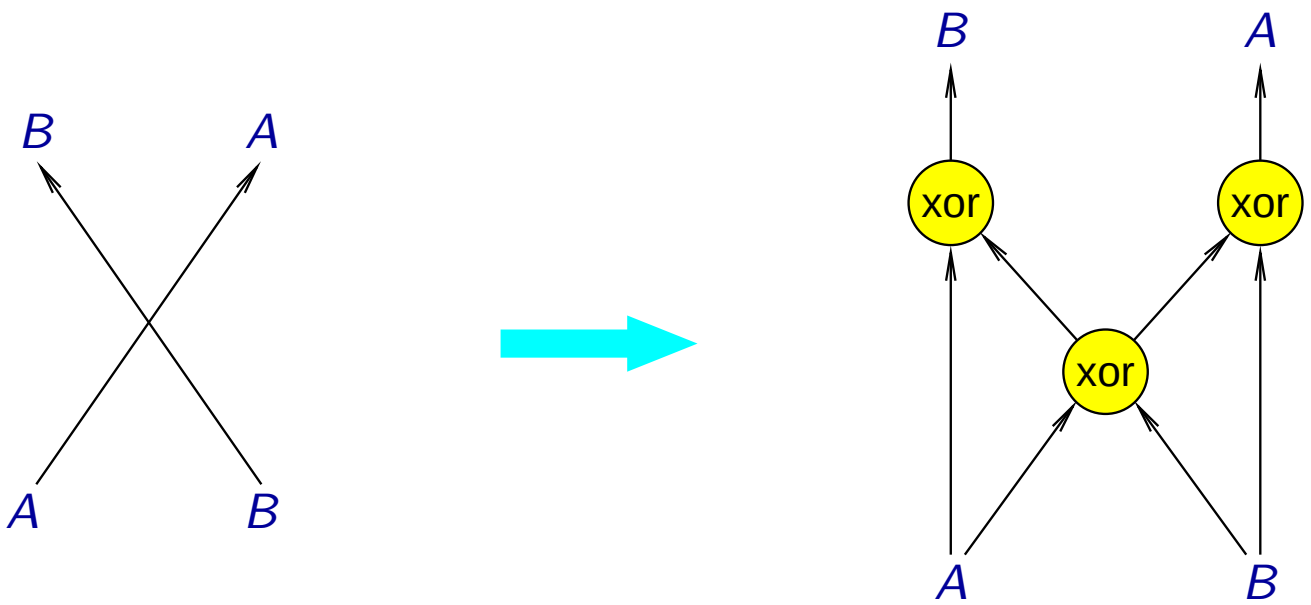
Orientovaný acyklický graf $G = (V, E)$ je **topologicky uspořádaný**, jestliže jsou jeho vrcholy očíslovány čísly $\{1,2,\ldots,n\}$ takovým způsobem, že pro každou hranu $(i,j) \in E$ platí $i < j$ (tj. hrany vedou pouze z vrcholů s nižším index do vrcholů s vyšším indexem.

- Není těžké si rozmyslet, že výše popsanou konstrukci v důkazu P-úplnosti problému CVP je možné provést tak, aby výsledný graf vytvořeného obvodu byl topologicky uspořádaný.
- Problém CVP tedy zůstává P-úplný i ve speciálním případě, kdy požadujeme, aby byl graf obvodu topologicky uspořádaný.

Circuit Value Problem (CVP) — planární graf

Pomocí logspace redukce z CVP se dá ukázat P-úplnost CVP také ve speciálním případě, kdy požadujeme, aby graf obvodu byl **planární**.

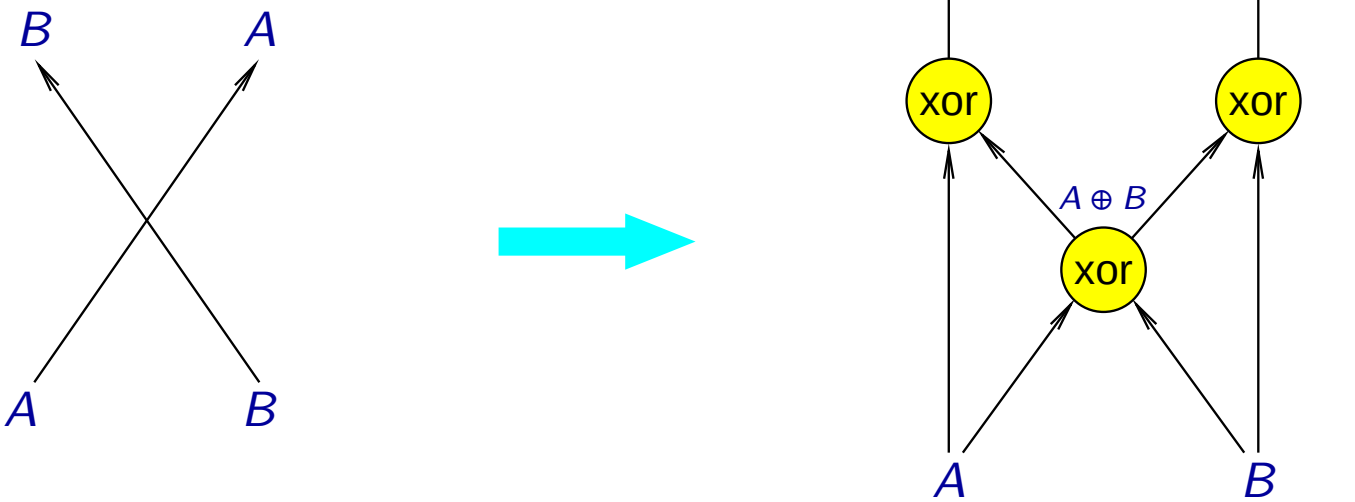
Myšlenka důkazu: Křížení vodičů je možné nahradit pomocí tří hradel typu XOR:



Circuit Value Problem (CVP) — planární graf

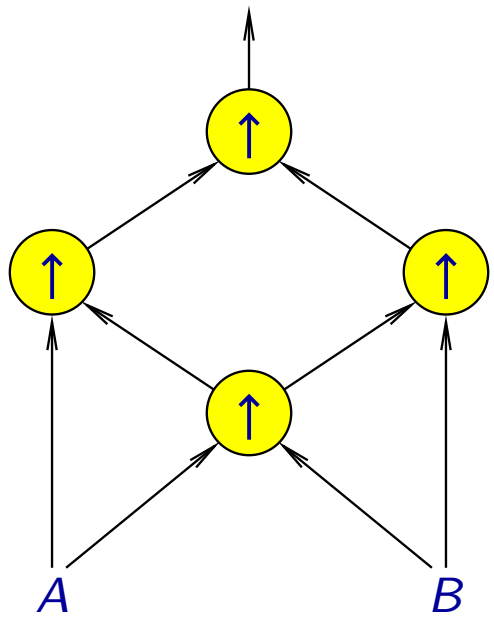
Pomocí logspace redukce z CVP se dá ukázat P-úplnost CVP také ve speciálním případě, kdy požadujeme, aby graf obvodu byl **planární**.

Myšlenka důkazu: Křížení vodičů je možné nahradit pomocí tří hradel typu XOR:



Circuit Value Problem (CVP) — planární graf

Hradlo typu XOR je možné zrealizovat pomocí čtyř hradel typu NAND tak, aby odpovídající graf byl planární:



$$(A \uparrow (A \uparrow B)) \uparrow ((A \uparrow B) \uparrow B) \iff \neg((A \uparrow (A \uparrow B)) \wedge ((A \uparrow B) \uparrow B))$$
$$\iff \neg(A \uparrow (A \uparrow B)) \vee \neg((A \uparrow B) \uparrow B) \iff (A \wedge (A \uparrow B)) \vee ((A \uparrow B) \wedge B)$$
$$\iff (A \wedge \neg(A \wedge B)) \vee (\neg(A \wedge B) \wedge B) \iff (A \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee ((\neg A \vee \neg B) \wedge B)$$
$$\iff (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \iff A \text{ xor } B$$

Monotone Circuit Value Problem (MCVP)

Booleovský obvod je **monotónní**, jestliže neobsahuje hradla typu NOT.

Monotone Circuit Value Problem (MCVP)

Vstup: Popis monotónního booleovského obvodu G, kde navíc do každého hradla typu AND a OR vstupují právě dva vodiče, a pravdivostní ohodnocení ν.

Otázka: Je při pravdivostním ohodnocení ν na výstupu obvodu G hodnota 1 ?

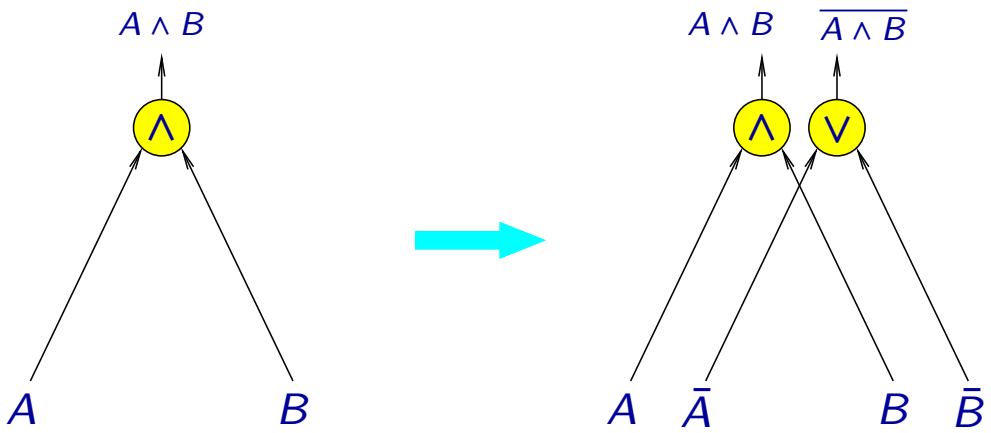
Logspace redukcí z problému CVP je možné ukázat následující:

Věta

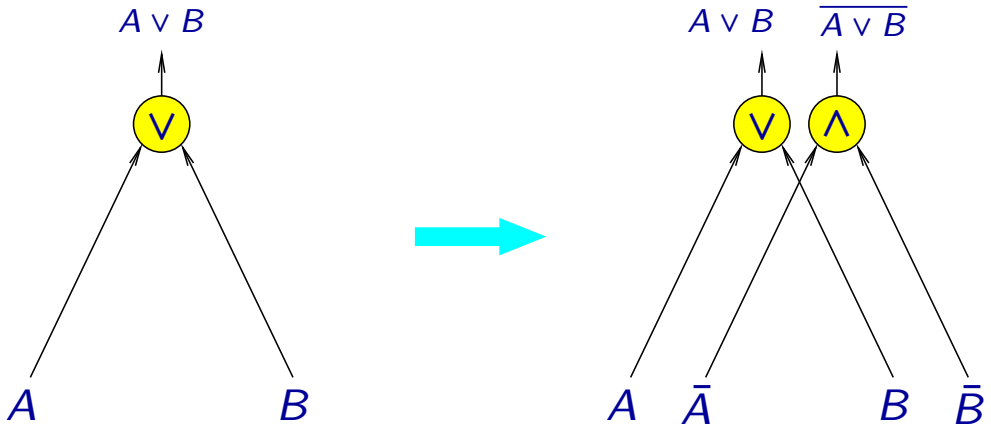
MCVP je P-úplný problém.

Monotone Circuit Value Problem (MCVP)

- Náhrada hradla typu AND:



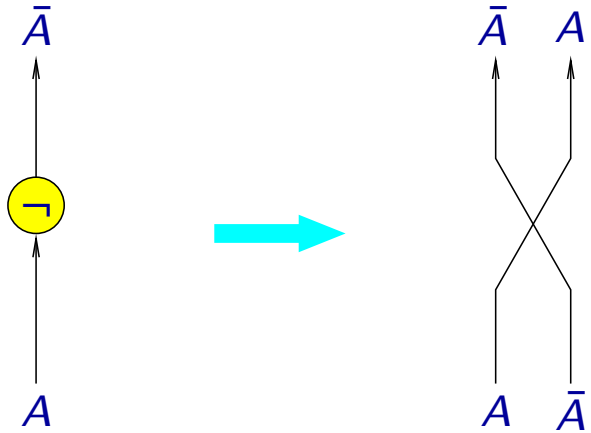
- Náhrada hradla typu OR:



Monotone Circuit Value Problem (MCVP)

- Náhrada vstupů:

- Náhrada hradla typu NOT:



Příklady P-úplných problémů

Pomocí logspace redukcí z MCVP se dá ukázat P-obtížnost celé řady dalších problémů.

Uvedeme si příklady některých P-úplných problémů.

Kombinatorická hra

Vstup: Kombinatorická hra dvou hráčů, jejíž graf je explicitně dán, tj. jsou explicitně vyjmenovány jednolivé pozice a možné tahy.

Otázka: Má *Hráč* I v dané hře vyhrávající strategii?

Příklady P-úplných problémů

Generování slova bezkontextovou gramatikou

Vstup: Bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$ a slovo $w \in \Sigma^*$.

Otázka: Patří slovo w do jazyka generovaného gramatikou $\mathcal{G}$ (tj. platí $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$)?

Prázdnost jazyka generovaného bezkontextovou gramatikou

Vstup: Bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$.

Otázka: Platí $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \varnothing$?

Nekonečnost jazyka generovaného bezkontextovou gramatikou

Vstup: Bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$.

Otázka: Je $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ nekonečný?

Příklady P-úplných problémů

Generování prvku binární operací

Vstup: Konečná množina X, binární operace $\circ$ na množině X (zadaná tabulkou specifikující hodnotu $x \circ y$ pro každou dvojici $x, y \in X$), podmnožina $S \subseteq X$ a prvek $t \in X$.

Otázka: Je možné prvek t vygenerovat z prvků množiny S?

Prvek t je možné vygenerovat z prvků množiny S, jestliže existuje nějaký výraz skládající se z konstant reprezentujících prvky z množiny S, na které je libovolným způsobem aplikována operace $\circ$, a hodnota tohoto výrazu je t.

Jiným způsobem se to dá říct také tak, že prvek t patří do nejmenší množiny Y (kde $Y \subseteq X$), která splňuje dvě následující podmínky:

- $S \subseteq Y$
- pro každé dva prvky $x, y \in Y$ platí, že $x \circ y \in Y$.

Příklady P-úplných problémů

Maximální tok v síti

Vstup: Síť G se stanovenými kapacitami hran, se zdrojem s a stokem t, a číslo k.

Otázka: Má k-tý bit čísla reprezentujícího maximální tok v síti G ze zdroje s do stoku t hodnotu 1 ?

Prohledávání do hloubky (depth-first search)

Vstup: Orientovaný graf $G = (V, E)$, kde je u každého vrcholu stanoveno explicitní pořadí hran, které z něj vedou, počáteční vrchol $s \in V$ a dvojice vrcholů $u, v \in V$.

Otázka: Bude při procházení grafu G do hloubky, které začne ve vrcholu s, a které bude procházet hrany vedoucí z každého vrcholu v uvedeném pořadí, vrchol u navštíven dříve než vrchol v ?