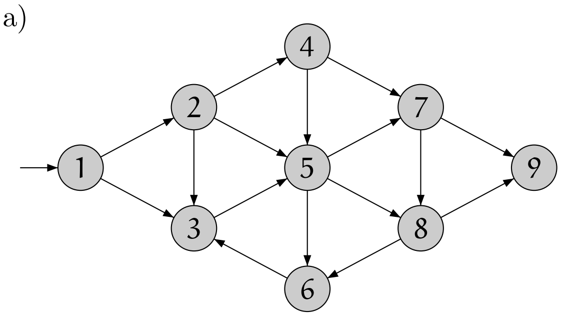
Cvičení 8

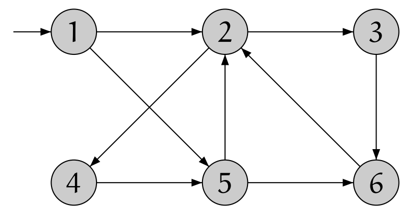
Příklad 1: Připomeňte si problém Generalized Geography.

Pro následující dvě instance problému Generalized Geography určete, který z hráčů má v dané hře vyhrávající strategii:

a)



b)



Příklad 2: Zdůvodněte, proč je každý PSPACE-těžký problém zároveň NP-těžký.

Příklad 3: Uvažujme posloupnosti slov $w_1, w_2, \ldots, w_k$, kde jsou všechna slova stejné délky a každá dvě po sobě jdoucí slova se liší právě v jednom znaku.

Příklad:

head, hear, near, fear, bear, beer, deer, deed, feed, feet, fret, free

Ukažte, že následující problém je v PSPACE:

VSTUP: Deterministický konečný automat $\mathcal{A}$ a dvojice slov u a v stejné délky.

OTÁZKA: Existuje posloupnost výše uvedeného typu začínající slovem u a končící slovem v taková, že každé slovo v této posloupnosti je přijímáno automatem $\mathcal{A}$?

Příklad 4: Booleovské formule φ a ψ jsou ***ekvivalentní***, jestliže při každém ohodnocení nabývají stejných pravdivostních hodnot.

Zápisem $|\varphi|$ označme velikost formule φ, tj. počet znaků v zápisu této formule.

O formuli φ řekneme, že je ***minimální***, jestliže pro každou formuli ψ, která je ekvivalentní formuli φ, platí $|\psi| \geq |\varphi|$.

Ukažte, že následující problém je v PSPACE:

VSTUP: Booleovská formule φ.

OTÁZKA: Je formule φ minimální?

Patří tento problém do třídy NP nebo co-NP?

Příklad 5: Uvažujme následující hru, kterou hrají dva hráči na neorientovaném grafu G. Jeden z hráčů má figurku představující kočku a druhý figurku představující myš. Tyto figurky stojí na vrcholech grafu. Hráči se střídají v tazích. Hráč, který je tahu, vezme svou figurku a přesune ji na některý ze sousedních vrcholů. Jeden z vrcholů grafu je označen jako „myší díra“. Do tohoto vrcholu nesmí hráč hrající s figurkou kočky táhnout. Hráč hrající s figurkou kočky vyhrává, jestliže se figurky kočky i myši ocitnou na stejném vrcholu grafu. Hráč hrající s figurkou myši vyhrává, jestliže se mu podaří dostat svou figurku na vrchol představující „myší díru“.

Ukažte, že následující problém je ve třídě P:

VSTUP: Neorientovaný graf G s vyznačením toho, na kterých vrcholech se nachází figurky kočky a myši a který vrchol představuje myší díru, a informace, který z hráčů je na tahu.

OTÁZKA: Má v dané pozici hráč hrající s figurkou kočky vyhrávající strategii?

Příklad 6: Ukažte, že následující problémy je možné řešit deterministickým algoritmem s logaritmickou prostorovou složitostí (tj. s prostorovou složitostí $\mathcal{O}(\log n)$, kde n je velikost vstupu).

Poznámka: Předpokládejte, že všechna čísla ve vstupech i výstupech jsou reprezentována binárně, tj. jako sekvence bitů.

a) VSTUP: Dvojice přirozených čísel x a y.
VÝSTUP: Hodnota součtu $x + y$.

b) VSTUP: Posloupnost přirozených čísel $x_1, x_2, \ldots, x_k$.
VÝSTUP: Hodnota součtu $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$.

Poznámka: Jako velikost vstupu uvažujte celkový počet bitů nutných k zápisu všech čísel posloupnosti $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

c) VSTUP: Dvojice přirozených čísel x a y.
VÝSTUP: Hodnota součinu $x \cdot y$.

d) VSTUP: Slovo w tvořené různými druhy závorek ($[_1$, $]_1$, $[_2$, $]_2$, $\ldots$, $[_r$, $]_r$).
OTÁZKA: Jedná se o správně uzávorkovanou posloupnost?

Poznámka: Správně uzávorkovanou posloupností se zde myslí posloupnost patřící do jazyka generovaného následující bezkontextovou gramatikou:

$$A \longrightarrow \varepsilon \mid AA \mid [_1 A\,]_1 \mid [_2 A\,]_2 \mid \cdots \mid [_r A\,]_r$$

Příklad 7: Ukažte, že následující problémy jsou NL-úplné:

a) VSTUP: Nedeterministický konečný automat $\mathcal{A}$ a slovo w.
OTÁZKA: Přijímá automat $\mathcal{A}$ slovo w (tj. platí $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$)?

b) VSTUP: Deterministický konečný automat $\mathcal{A}$.
OTÁZKA: Je $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \emptyset$?

c) VSTUP: Deterministický konečný automat $\mathcal{A}$.
OTÁZKA: Je $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \Sigma^*$?

d) VSTUP: Deterministické konečné automaty $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_2$.
OTÁZKA: Je $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$?

e) VSTUP: Orientovaný graf G.
OTÁZKA: Je graf G silně souvislý?

Poznámka: Graf je silně souvislý, jestliže pro každou dvojici jeho vrcholů u a v existuje cesta z u do v.

f) VSTUP: Konečná množina X, asociativní binární operace $\circ$ na množině X (zadaná tabulkou specifikující hodnotu $x \circ y$ pro každou dvojici $x, y \in X$), podmnožina $S \subseteq X$ a prvek $t \in X$.
OTÁZKA: Je možné prvek t vygenerovat z prvků množiny S ?

Poznámka: Prvek t je možné vygenerovat z prvků množiny S, jestliže existuje posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_k$ prvků z množiny S taková, že

$$t = x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_k$$

Příklad 8: Ukažte, že následující problémy jsou P-úplné.

Nápověda: P-obtížnost těchto problémů můžete ukázat například pomocí logspace redukcí z problému Monotone Circuit Value Problem (MCVP).

a) VSTUP: Kombinatorická hra dvou hráčů, jejíž graf je explicitně dán, tj. jsou explicitně vyjmenovány jednotlivé pozice a možné tahy. U každé pozice je uvedeno, který z hráčů je na tahu. Je uvedena počáteční pozice α.
OTÁZKA: Má *Hráč I* v dané hře, která začne v pozici α, vyhrávající strategii?

b) VSTUP: Bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$ a slovo $w \in \Sigma^*$.
OTÁZKA: Patří slovo w do jazyka generovaného gramatikou $\mathcal{G}$ (tj. platí $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$) ?

c) VSTUP: Bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$.
OTÁZKA: Platí $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \emptyset$?

d) VSTUP: Bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$.

Otázka: Je $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ nekonečný?

e) Vstup: Konečná množina X, binární operace $\circ$ na množině X (zadaná tabulkou specifikující hodnotu $x \circ y$ pro každou dvojici $x, y \in X$), podmnožina $S \subseteq X$ a prvek $t \in X$.

Otázka: Je možné prvek t vygenerovat z prvků množiny S?

Poznámka: Prvek t je možné vygenerovat z prvků množiny S, jestliže existuje nějaký výraz skládající se z konstant reprezentujících prvky z množiny S, na které je libovolným způsobem aplikována operace $\circ$, a hodnota tohoto výrazu je t.

Jiným způsobem se to dá říct také tak, že prvek t patří do nejmenší množiny Y (kde $Y \subseteq X$), která splňuje dvě následující podmínky:

- $S \subseteq Y$
- pro každé dva prvky $x, y \in Y$ platí, že $x \circ y \in Y$.

Příklad 9: Uvažujme následující problém:

Vstup: Dvě n-bitová přirozená čísla x a y.

Výstup: Hodnota součtu $x + y$ reprezentovaná binárně.

a) Navrhněte paralelní algoritmus pro stroj PRAM typu EREW řešící tento problém s časovou složitostí $\mathcal{O}(\log n)$ při použití $\mathcal{O}(n)$ procesorů.

b) Navrhněte paralelní algoritmus pro stroj PRAM typu CRCW COMMON řešící tento problém v čase $\mathcal{O}(1)$ s polynomiálním počtem procesorů.

   Kolik procesorů bude vámi navržený algoritmus potřebovat?

Příklad 10: Navrhněte paralelní algoritmus pro stroj PRAM typu CREW řešící následující problém s časovou složitostí $\mathcal{O}(\log n)$ při použití $\mathcal{O}(n^2)$ procesorů:

Vstup: Dvě n-bitová přirozená čísla x a y.

Výstup: Hodnota součinu $x \cdot y$ reprezentovaná binárně.

Příklad 11: Předpokládejme, že máme dán nějaký fixní deterministický konečný automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Uvažujme následující problém:

Vstup: Slovo $w \in \Sigma^*$.

Otázka: Je slovo w přijímáno automatem $\mathcal{A}$ (tj. platí $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$)?

Popište, jak pro daný automat $\mathcal{A}$ vytvořit paralelní algoritmus pro stroj PRAM typu EREW řešící tento problém s časovou složitostí $\mathcal{O}(\log n)$ při použití $\mathcal{O}(n)$ procesorů (kde n je délka slova w).

Příklad 12: Uvažujme jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{\mathtt{[}, \mathtt{]}\}$ generovaný následující bezkontextovou gramatikou:

$$A \longrightarrow \varepsilon \mid AA \mid \mathtt{[}\,A\,\mathtt{]}$$

Navrhněte efektivní paralelní algoritmus pro stroj PRAM řešící následující problém:

VSTUP: Slovo $w \in \Sigma^*$.

VÝSTUP: Zjistit, zda slovo w patří do jazyka L a pokud ano, tak ke každé levé závorce najít pozici jí odpovídající pravé závorky, a podobně ke každé pravé závorce najít pozici jí odpovídající levé závorky.

Jaká je časová složitost vámi navrženého algoritmu a kolik procesorů potřebuje?