Cvičení 7

Příklad 1: Uvažujme problém

> NÁZEV: ILP (*problém celočíselného lineárního programování*)
>
> VSTUP: Matice A typu $m \times n$ a sloupcový vektor b velikosti m, jejichž prvky jsou celá čísla.
>
> OTÁZKA: Existuje celočíselný sloupcový vektor x (velikosti n) takový, že $Ax \leq b$?

Ukažte nejprve nějakou malou (ale ne úplně triviální) instanci (tedy vstup) uvedeného problému ILP, pro niž je odpověď ANO, a instanci, pro niž je odpověď NE.

Vysvětlete přesně, co bychom museli udělat, kdybychom chtěli ukázat, že 3-SAT je polynomiálně převeditelný na ILP.

Uveďte, co bychom mohli říci o složitosti problému ILP poté, co bychom prokázali, že 3−SAT je polynomiálně převeditelný na ILP.

Zkuste tuto převeditelnost dokázat.

Dále pouvažujte o tom, zda ILP patří do NP.

Je to tak, ale je to příklad problému, jehož příslušnost k NP není ihned zřejmá – na rozdíl od dřívějších příkladů problémů v NP.

(Spokojíme se zde jen s odkazem na fakt, že se dá ukázat, že existuje-li řešení nerovnosti $Ax \leq b$, pak existuje i řešení „dostatečně malé“ – jeho zápis je polynomiální vzhledem k zápisu A a b; řešení se tedy dá v polynomiálním čase „uhodnout“ a ověřit.)

Příklad 2: Ukažte, že pokud platí $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, tak každý problém z P, s výjimkou triviálních problémů, kde je vždy odpověď ANO nebo vždy odpověď NE, bude NP-úplný.

Příklad 3: Ukažte, že pokud by problém SAT bylo možné řešit s časovou složitostí $\mathcal{O}(f(n))$, kde $f(n)$ by byl nějaký polynom, tak by bylo možné v polynomiálním čase řešit i následující problém:

> VSTUP: Formule výrokové logiky φ.
>
> VÝSTUP: Pravdivostní ohodnocení ν, při kterém je formule φ pravdivá, nebo informace, že žádné takové pravdivostní ohodnocení neexistuje.

Jaká by byla časová složitost algoritmu, který by tento problém řešil?

Příklad 4: Ukažte, že následující problém je NP-úplný:

> VSTUP: Formule výrokové logiky φ.
>
> OTÁZKA: Existují alespoň dvě pravdivostní ohodnocení, při kterých je formule φ pravdivá?

Příklad 5: Ukažte, že následující problém je NP-úplný:

VSTUP: Formule výrokové logiky φ v konjunktivní normální formě.

OTÁZKA: Existuje pravdivostní ohodnocení ν, při kterém každá klauzule formule φ obsahuje alespoň jeden literál, který má při ohodnocení ν hodnotu 1, a alespoň jeden literál, který má při ohodnocení ν hodnotu 0?

Nápověda: Uvažujte redukci z problému 3-SAT, kde každá klauzule

$$(\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3)$$

bude nahrazena dvojicí klauzulí

$$(\ell_1 \vee \ell_2 \vee y_i) \qquad \text{a} \qquad (\neg y_i \vee \ell_3 \vee b)$$

kde y_i bude nová proměnná pro každou klauzuli C_i a b bude nová proměnná společná pro celou formuli.

Zdůvodněte korektnost této redukce.

Příklad 6: Ukažte, že problém 2-SAT je v PTIME:

VSTUP: Formule výrokové logiky φ v konjunktivní normální formě, kde každá klauzule obsahuje nejvýše 2 literály.

OTÁZKA: Je formule φ splnitelná?

Příklad 7: Ukažte, že varianta problému SAT, kde jsou vstupní instance omezeny na tzv. Hornovy formule, je řešitelná v polynomiálním čase.

Hornovy formule jsou takové formule výrokové logiky, které jsou v konjunktivní normální formě, kde navíc platí, že každá klauzule obsahuje nejvýše jeden pozitivní literál.

Cílem je tedy ukázat, že následující problém je v PTIME:

VSTUP: Hornova formule φ.

OTÁZKA: Je formule φ splnitelná?