Cvičení 6

Příklad 1: Připomeňte si definici třídy PTIME. Uveďte příklady alespoň tří problémů z PTIME. U každého z těchto problémů:

a) Přesně definujte, co je vstupem a jaká je otázka.

b) Uveďte příklady instancí, pro které je odpověď Ano a pro které je odpověď Ne.

c) Prokažte, že daný problém je skutečně v PTIME, tj. popište polynomiální algoritmus řešící daný problém.

Příklad 2: Ukažte, že následující problém patří do třídy PTIME:

> Vstup: Přirozená čísla a, b, c, m, kde $m > 1$, reprezentovaná binárně.
>
> Otázka: Platí $a^b \equiv c \pmod{m}$?

Příklad 3: Permutace na množině $S = \{1, 2, \dots, k\}$ je libovolné bijektivní zobrazení $p : S \to S$. Zápisem p^t, kde $t \in \mathbb{N}$, označme funkci, kterou dostaneme složením funkce p samu se sebou t krát.

Ukažte, že následující problém patří do třídy PTIME:

> Vstup: Dvojice permutací p a q na množině $\{1, 2, \dots, k\}$ a přirozené číslo t reprezentované binárně.
>
> Otázka: Platí $p^t = q$?

Příklad 4: Definujte pojem ***polynomiální převeditelnosti*** jako speciální případ dříve uvedené (algoritmické) převeditelnosti mezi problémy.

Vysvětlete nejdříve přesně, co máme udělat, chceme-li prokázat polynomiální převeditelnost problému HC (hamiltonovský cyklus v orientovaném grafu) na problém HK (hamiltonovská kružnice v neorientovaném grafu).

Pak to udělejte.

Příklad 5: Vysvětlete pojem „NP-úplný problém".

Definujte problémy SAT, 3-SAT, HC, HK, 3-CG a IS (s příklady pozitivních a negativních instancí). Tyto problémy jsou NP-úplné. U každého z nich popište algoritmus, prokazující příslušnost k NP.

Příklad 6: Připomeňte si definici problémů kliky (CLIQUE) a vrcholového pokrytí (VC — vertex cover).

Ukažte, jak převést problém nezávislé množiny (IS) pomocí polynomiálních redukcí na tyto problémy.

Příklad 7: Uvažujme následující problém (jeden z často uváděných NP-úplných problémů).

NÁZEV: TSP (*problém obchodního cestujícího (* ANO/NE *verze)*)

VSTUP: Množina „měst“ $\{1, 2, \ldots, n\}$, přirozená čísla („vzdálenosti“) d_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$) a dále číslo ℓ („limit“).

OTÁZKA: Existuje „okružní jízda“ dlouhá nejvýše ℓ, tj. existuje permutace $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že

$$d(i_1, i_2) + d(i_2, i_3) + \cdots + d(i_{n-1}, i_n) + d(i_n, i_1) \leq \ell\,?$$

Je to rozhodovací (neboli ANO/NE) verze optimalizačního problému. Odvoďte nejdříve, jak vypadá onen optimalizační problém (tedy co je jeho vstupem a co odpovídajícím výstupem).

Dále ukažte nějakou malou (ale ne úplně triviální) instanci (tedy vstup) uvedeného problému TSP, pro niž je odpověď ANO, a instanci, pro niž je odpověď NE.

Pak prokažte (návrhem konkrétního nedeterministického algoritmu), že TSP je v NP.

Nakonec zkuste vymyslet důkaz NP-obtížnosti problému TSP.

Nápověda: Můžete využít faktu, že problém hamiltonovské kružnice (HK) je NP-úplný.

Příklad 8: Promyslete si, jakým způsobem je možné problém 3-SAT převést polynomiální redukcí na problém Hamiltonovské cesty v grafu.

Tento důkaz je popsán například v knize M. Sipser: *Introduction to the Theory of Computation*, 2nd edition, Course Technology, 2006, v sekci 7.5 (*Additional NP-complete Problems*).