Cvičení 5

Příklad 1: Uvažujme následující problém:

> NÁZEV: UHP (*Uniform Halting Problem*)
>
> VSTUP: Turingův stroj $\mathcal{M}$.
>
> OTÁZKA: Zastaví se $\mathcal{M}$ pro každý vstup?

Zjistěte, zda je tento problém rozhodnutelný či nerozhodnutelný, a své zjištění prokažte. V případě rozhodnutelnosti problému ukažte algoritmus, který jej řeší; v případě nerozhodnutelnosti můžete vyjít z nerozhodnutelnosti problému zastavení a ukázat příslušnou převeditelnost.

Příklad 2: Připomeňme si problém ***kachličkování roviny***, který byl uveden na přednášce, kde byla ukázána jeho nerozhodnutelnost.

Tento problém může být definován následovně. Řekněme, že C je nějaká konečná množina *barev*. Množina $\{\mathtt{N}, \mathtt{S}, \mathtt{E}, \mathtt{W}\}$ představuje čtyři *směry* — sever, jih, východ, západ. *Typ kachličky* je dán jako přiřazení barev jednotlivým směrům, tj. jako funkce $\tau : \{\mathtt{N}, \mathtt{S}, \mathtt{E}, \mathtt{W}\} \to \mathsf{C}$.

Předpokládejme, že máme dánu množinu typů kachliček

$$\mathcal{T} = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}.$$

Pokrytí roviny kachličkami je funkce $p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathcal{T}$ splňující následující dvě podmínky pro každé $i, j \in \mathbb{Z}$:

- Pokud $p(i, j) = \tau$ a $p(i + 1, j) = \tau'$, tak $\tau(\mathtt{E}) = \tau'(\mathtt{W})$.
- Pokud $p(i, j) = \tau$ a $p(i, j + 1) = \tau'$, tak $\tau(\mathtt{N}) = \tau'(\mathtt{S})$.

Uvažujme nyní následující problém:

> VSTUP: Množina typů kachliček $\mathcal{T} = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$.
>
> OTÁZKA: Existuje nějaké pokrytí roviny p kachličkami z množiny $\mathcal{T}$?

O tomto problému je známo, že je algoritmicky nerozhodnutelný.

Bude nerozhodnutelná i varianta tohoto problému, kde bychom dodali omezení, že počet barev, tj. velikost množiny C nesmí být větší než nějaká pevně zadaná konstanta k (např. že není možné použít více než 100 barev)?

Vaši odpověď zdůvodněte.

Příklad 3: Ukažte, že následující problém není algoritmicky rozhodnutelný:

> VSTUP: Dva Turingovy stroje $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$.
>
> OTÁZKA: Je $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$?

Je tento problém nebo jeho doplňkový problém částečně rozhodnutelný?

Příklad 4: Ukažte, že následující problém není algoritmicky rozhodnutelný:

VSTUP: Bezkontextové gramatiky $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$.
OTÁZKA: Je $\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{G}_2) = \emptyset$?

Nápověda: Použijte redukci z Postova korespondenčního problému.

Je tento problém nebo jeho doplňkový problém částečně rozhodnutelný?

Příklad 5: Ukažte, že následující problém není algoritmicky rozhodnutelný:

VSTUP: Bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$.
OTÁZKA: Je $\mathcal{G}$ nejednoznačná?

Nápověda: Použijte redukci z Postova korespondenčního problému.

Je tento problém nebo jeho doplňkový problém částečně rozhodnutelný?

Příklad 6: Uvažujme dva následující problémy:

VSTUP: Bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$ generující jazyk nad abecedou Σ.
OTÁZKA: Je $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \Sigma^*$?

VSTUP: Bezkontextové gramatiky $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$.
OTÁZKA: Je $\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$?

a) Ukažte, že první z těchto problémů je převeditelný na druhý.
b) Ukažte, jak převést Halting problem na doplňkový problém prvního z těchto dvou problémů.
c) Uveďte, které z těchto dvou problémů či jejich doplňkových problémů jsou částečně rozhodnutelné.

Příklad 7: Připomeňte si, jak vypadají formule predikátové logiky prvního řádu, a co to znamená, že daná formule je uzavřená.
Připomeňte si také, co to znamená, že daná formule je *logicky platná*, tj. pravdivá v každé interpretaci.
Ukažte, že následující problém není algoritmicky rozhodnutelný:

VSTUP: Uzavřená formule φ predikátové logiky prvního řádu.
OTÁZKA: Je formule φ logicky platná?

Nápověda: Použijte redukci z Postova korespondenčního problému.

Příklad 8: ***Lineárně omezený automat*** je speciálním případem Turingova stroje s jednou páskou, kde tato páska ovšem není nekonečná, ale je omezena velikostí vstupního slova. Páska vypadá tak, že tvořena políčky, které obsahují vstupní slovo w, které je zleva a zprava ohraničeno speciálními „zarážkami“ $\vdash$ a $\dashv$. Na levé zarážce $\vdash$ se hlava nesmí pohnout doleva a na pravé zarážce $\dashv$ zase doprava. Tyto zarážky není možné přepsat, všechna ostatní políčka (která na začátku obsahují symboly vstupního slova) však ano.

Jazyk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ slov přijímaných daným lineárně omezeným automatem $\mathcal{M}$ je definován podobně jako v případě běžných Turingových strojů.

Uvažujme následující dva problémy:

> VSTUP: Lineárně omezený automat $\mathcal{M}$ a slovo w.
>
> OTÁZKA: Přijímá automat $\mathcal{M}$ slovo w, tj. platí $w \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$?

> VSTUP: Lineárně omezený automat $\mathcal{M}$.
>
> OTÁZKA: Existuje nějaké slovo w přijímané automatem $\mathcal{M}$, tj. platí $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$?

Určete, které z těchto problémů jsou rozhodnutelné a které ne.

U problémů, které nejsou rozhodnutelné, je daný problém nebo jeho doplňkový problém částečně rozhodnutelný?

Příklad 9: Uvažujme stroj s jedním čítačem, který čte vstup ze vstupní pásky. Tato vstupní páska je pouze pro čtení, její obsah tedy není možné měnit. S hlavou na vstupní pásce je však možné hýbat oběma směry, přičemž slovo na této pásce je zleva a zprava ohraničeno zarážkami $\vdash$ a $\dashv$.

Kromě této pásky je stroj vybaven jedním čítačem, jehož obsahem může být libovolně velké přirozené číslo. Hodnotu čítače je možné v jednom kroku zvýšit či snížit o jedna a je také možné testovat, zda je hodnota čítače rovna 0.

Definujte formálně tento druh stroje a definujte, co to znamená, že tento stroj přijímá dané slovo w.

Ukažte, že následující problém není algoritmicky rozhodnutelný:

> VSTUP: Stroj $\mathcal{M}$ s jedním čítačem.
>
> OTÁZKA: Existuje nějaké slovo w přijímané strojem $\mathcal{M}$, tj. platí $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$?

Příklad 10: Uveďte příklad nerozhodnutelného problému, který je převeditelný na svůj vlastní doplňkový problém.

Příklad 11: Uveďte alespoň tři vlastnosti Turingových strojů, pro něž plyne nerozhodnutelnost z Riceovy věty, a alespoň tři vlastnosti, pro něž nerozhodnutelnost z Riceovy věty neplyne.