NP-úplné problémy

NP-úplné problémy

Existuje velká skupina algoritmických problémů označovaných jako **NP-úplné** problémy, které:

- patří do třídy NPTIME, tj. jsou řešitelné v polynomiálním čase **nedeterministickým** algoritmem
- jsou tedy řešitelné v exponenciálním čase
- není pro ně znám žádný algoritmus s polynomiální časovou složitostí
- na druhou stranu není ani dokázáno, že daný pro daný problém nemůže algoritmus s polynomiální časovou složitostí existovat
- jsou všechny navzájem polynomiálně převeditelné

Poznámka: Toto není definice NP-úplných problémů. Ta bude uvedena později.

Polynomiální převody mezi problémy

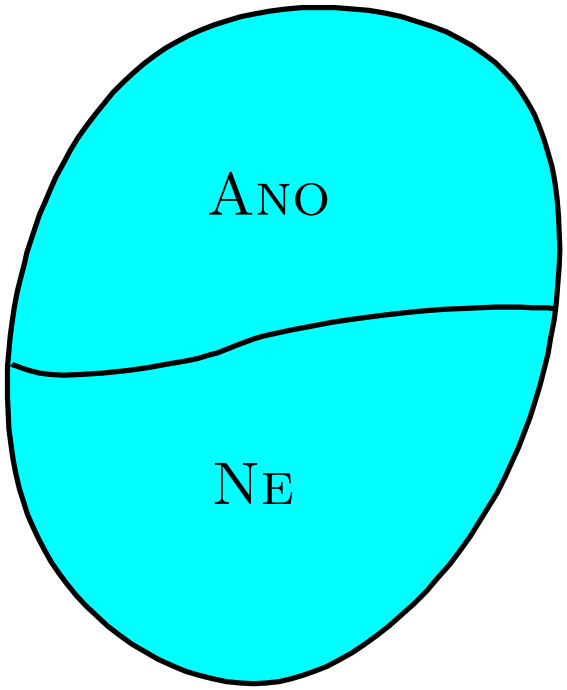
Problém P_1 je **polynomiálně převeditelný** na problém P_2, jestliže existuje algoritmus Alg s polynomiální časovou složitostí, který převádí problém P_1 na problém P_2.

Tento algoritmus Alg:

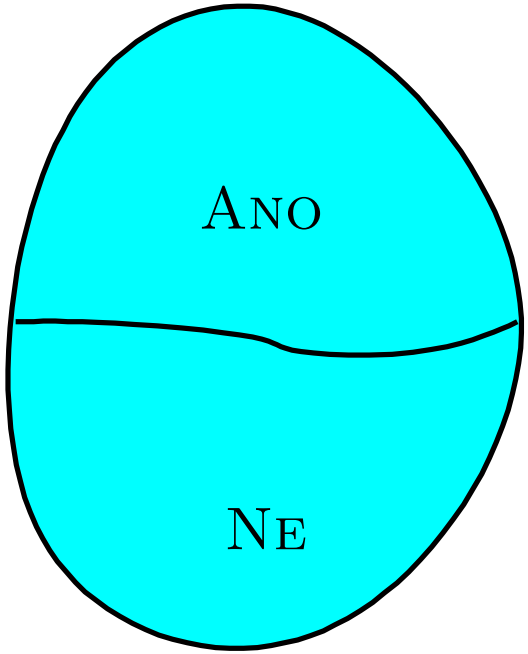
- Jako vstup může dostat libovolnou instanci problému P_1.
- K instanci problému P_1, kterou dostane jako vstup (označme ji x), vyprodukuje jako svůj výstup instanci problému P_2 (označme ji $Alg(x)$).
- Platí, že pro vstup x je v problému P_1 odpověď ANO právě tehdy, když pro vstup $Alg(x)$ je v problému P_2 odpověď ANO.

Polynomiální převody mezi problémy

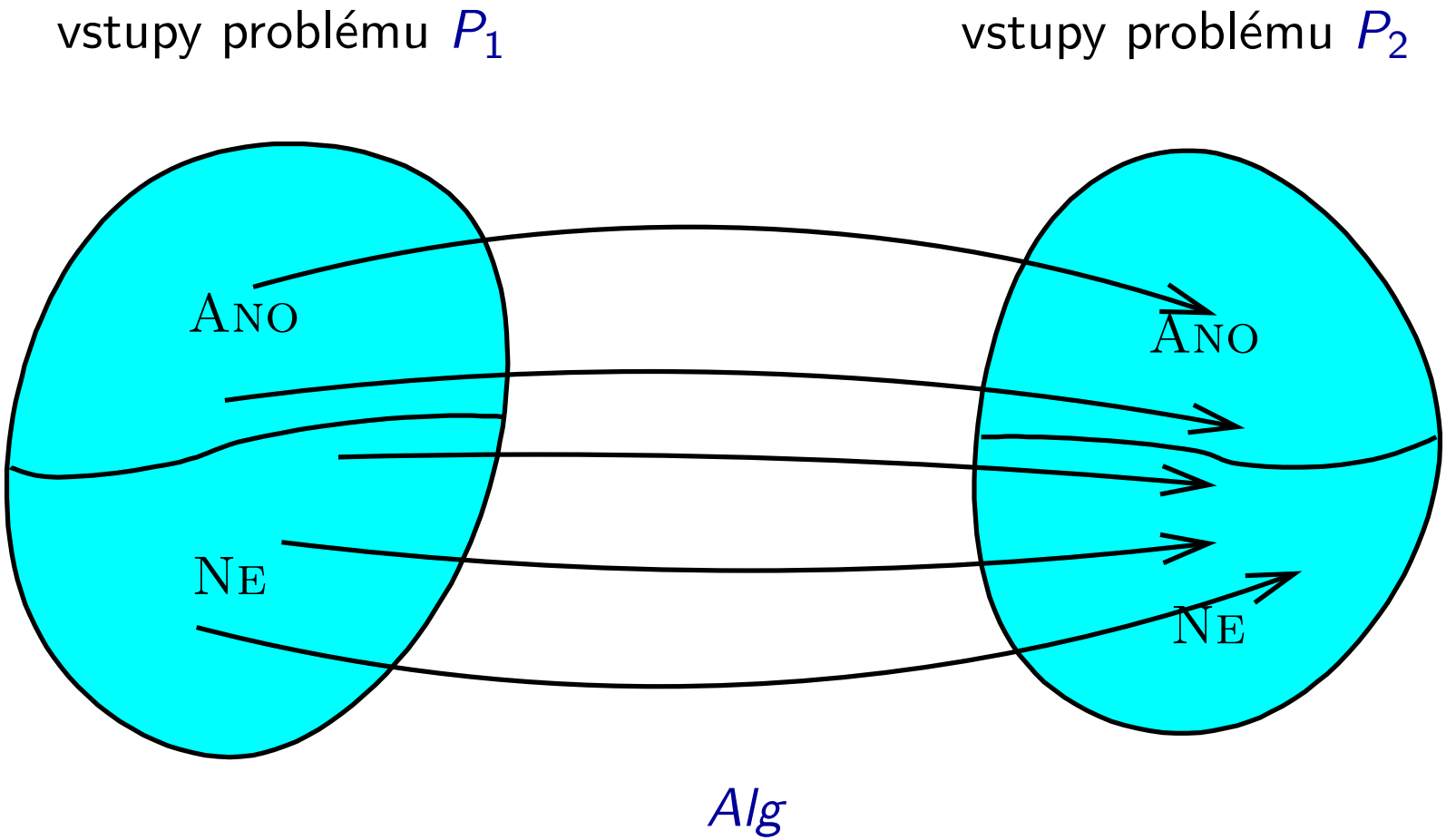
vstupy problému P_1



vstupy problému P_2



Polynomiální převody mezi problémy



Polynomiální převody mezi problémy

Řekněme, že problém P_1 je polynomiálně převeditelný na problém P_2, tj. existuje polynomiální algoritmus Alg realizující tento převod.

Pokud pro problém P_2 existuje polynomiální algoritmus, pak i pro problém P_1 existuje polynomiální algoritmus.

Řešení problému P_1 pro vstup x:

- Zavoláme Alg se vstupem x, vrátí nám hodnotu $Alg(x)$.
- Zavoláme algoritmus řešící problém P_2 se vstupem $Alg(x)$. Hodnotu, kterou nám vrátí, vypíšeme jako výsledek.

Z toho plyne:

Pokud neexistuje polynomiální algoritmus pro problém P_1, tak neexistuje ani polynomiální algoritmus pro problém P_2.

Polynomiální převody mezi problémy

Ukážeme si příklad polynomiálního převodu problému 3-SAT, což je jedna z variant problému SAT, na problém nezávislé množiny (IS).

Poznámka: Jak 3-SAT, tak IS jsou příklady NP-úplných problémů.

Problém 3-SAT

3-SAT je varianta problému SAT, ve které se omezujeme na formule určitého speciálního typu:

3-SAT

Vstup: Formule φ v konjunktivní normální formě, kde každá klauzule obsahuje právě 3 literály.

Otázka: Je φ splnitelná?

Problém 3-SAT

Připomenutí některých pojmů:

- **Literál** je formule tvaru x nebo $\neg x$, kde x je atomický výrok.
- **Klauzule** je disjunkce literálů.

  Příklady: $x_1 \vee \neg x_2$ $\neg x_5 \vee x_8 \vee \neg x_{15} \vee \neg x_{23}$ x_6
- Formule je v **konjunktivní normální formě (KNF)**, jestliže je konjunkcí klauzulí.

  Příklad: $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_5 \vee x_8 \vee \neg x_{15} \vee \neg x_{23}) \wedge x_6$

V případě problému 3-SAT tedy vyžadujeme, aby formule φ byla v KNF a navíc, aby každá klauzule obsahovala právě tři literály.

Příklad:

$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

Problém 3-SAT

Následující formule je splnitelná:

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

Je pravdivá např. při ohodnocení ν, kde

$$\nu(x_1) = 0$$
$$\nu(x_2) = 1$$
$$\nu(x_3) = 0$$
$$\nu(x_4) = 1$$

Naproti tomu následující formule není splnitelná:

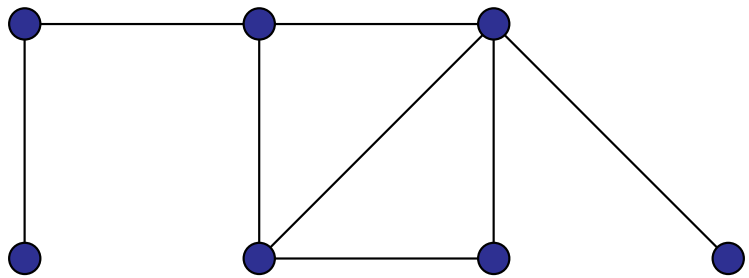
$$(x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_1)$$

Problém nezávislé množiny (IS)

Problém nezávislé množiny (IS)

Vstup: Neorientovaný graf G, číslo k.

Otázka: Existuje v grafu G nezávislá množina velikosti k?



$k = 4$

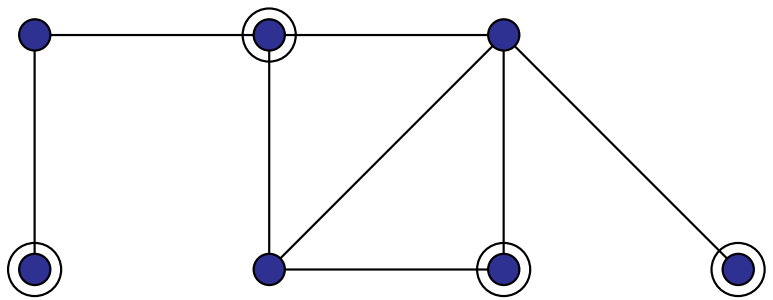
Poznámka: **Nezávislá množina** v grafu je podmnožina vrcholů grafu taková, že žádné dva vrcholy z této podmnožiny nejsou spojeny hranou.

Problém nezávislé množiny (IS)

Problém nezávislé množiny (IS)

Vstup: Neorientovaný graf G, číslo k.

Otázka: Existuje v grafu G nezávislá množina velikosti k?

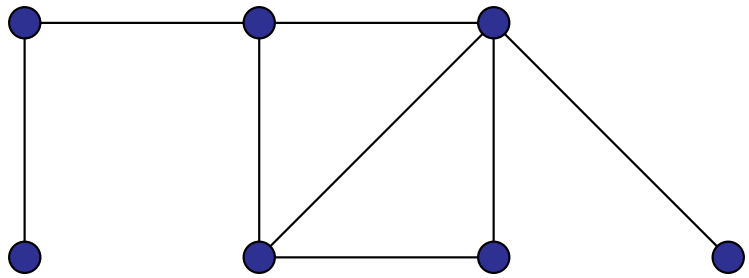


$k = 4$

Poznámka: **Nezávislá množina** v grafu je podmnožina vrcholů grafu taková, že žádné dva vrcholy z této podmnožiny nejsou spojeny hranou.

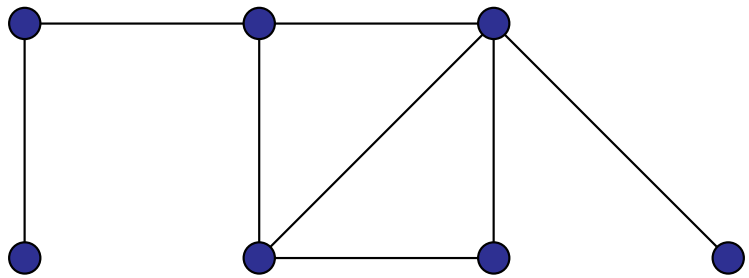
Problém nezávislé množiny (IS)

Příklad instance, kde je odpověď Ano:



$k = 4$

Příklad instance, kde je odpověď Ne:



$k = 5$

Převod 3-SAT na IS

Popíšeme (polynomiální) algoritmus, který bude mít následující vlastnosti:

- **Vstup:** Libovolná instance problému 3-SAT, tj. formule φ v konjunktivní normální formě, kde každá klauzule obsahuje právě tři literály.
- **Výstup:** Instance problému IS, tj. neorientovaný graf G a číslo k.
- Navíc bude pro libovolný vstup (tj. pro libovolnou formuli φ ve výše uvedeném tvaru) zaručeno následující:

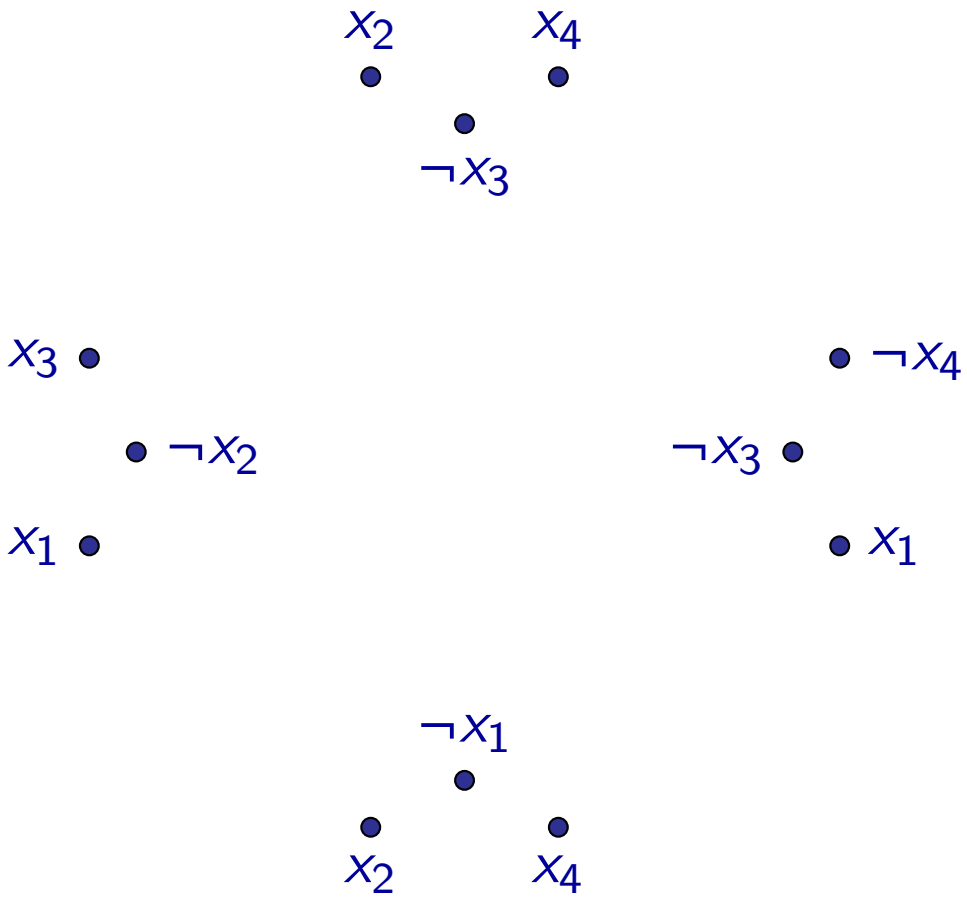
  V grafu G bude existovat nezávislá množina velikosti k právě tehdy, když formule φ bude splnitelná.

Převod 3-SAT na IS

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$$

Převod 3-SAT na IS

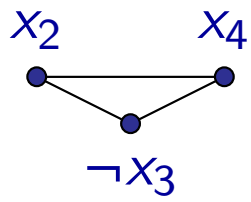
$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$$

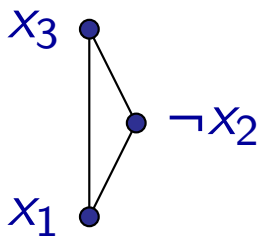


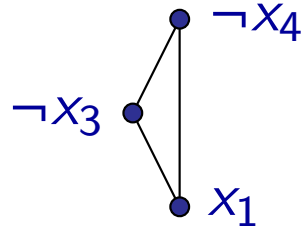
Pro každý výskyt literálu přidáme do grafu jeden vrchol.

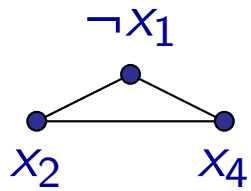
Převod 3-SAT na IS

$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$





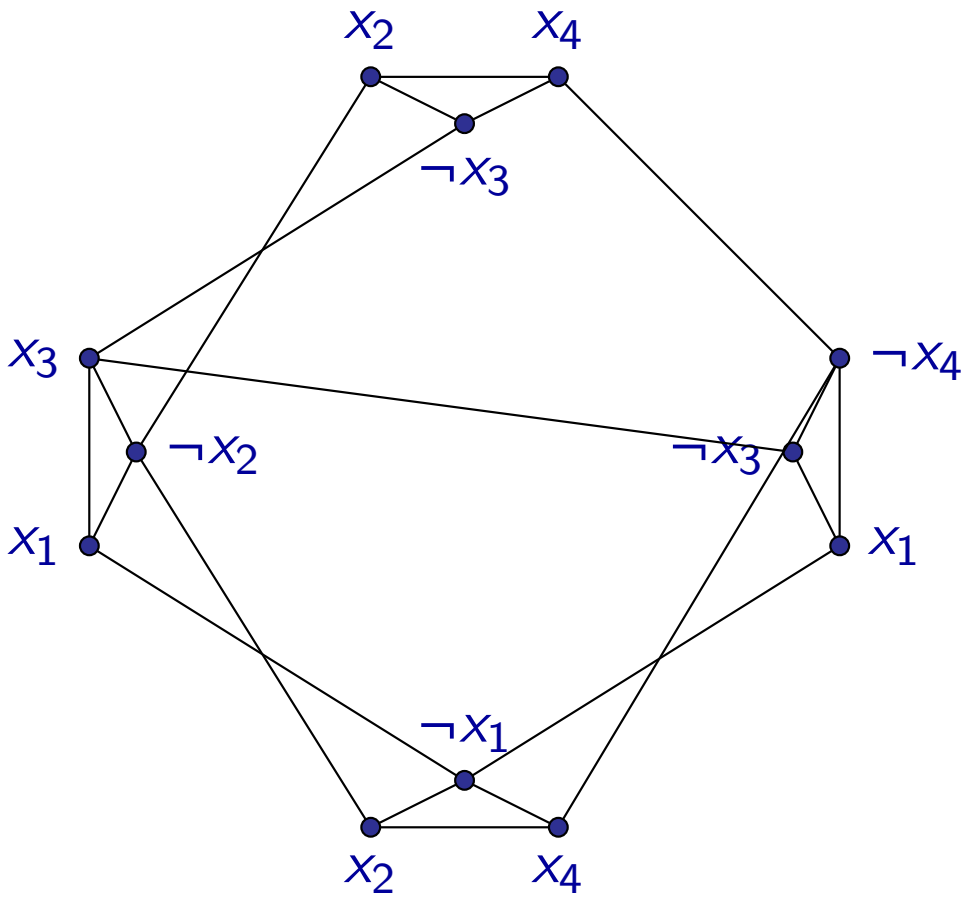




Vrcholy odpovídající výskytům literálů patřícím do stejné klauzule spojíme hranami.

Převod 3-SAT na IS

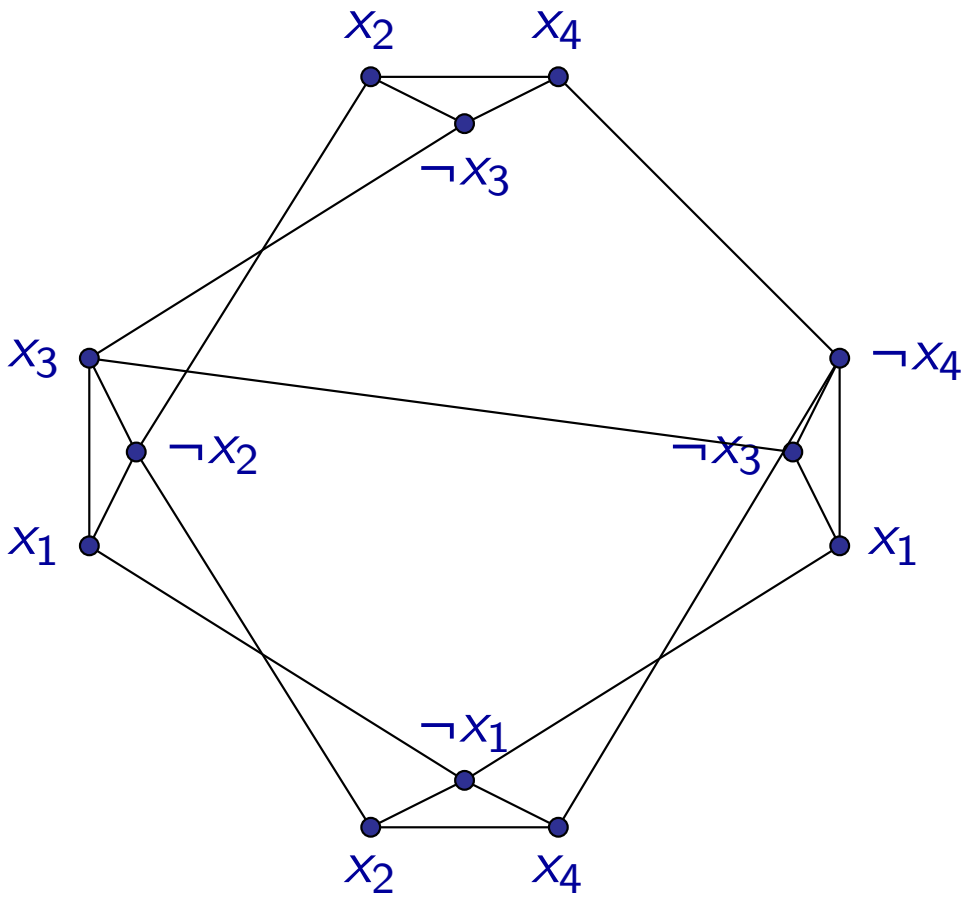
$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$



Dvojice vrcholů odpovídající literálům x_i a $\neg x_i$ spojíme hranami.

Převod 3-SAT na IS

$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$

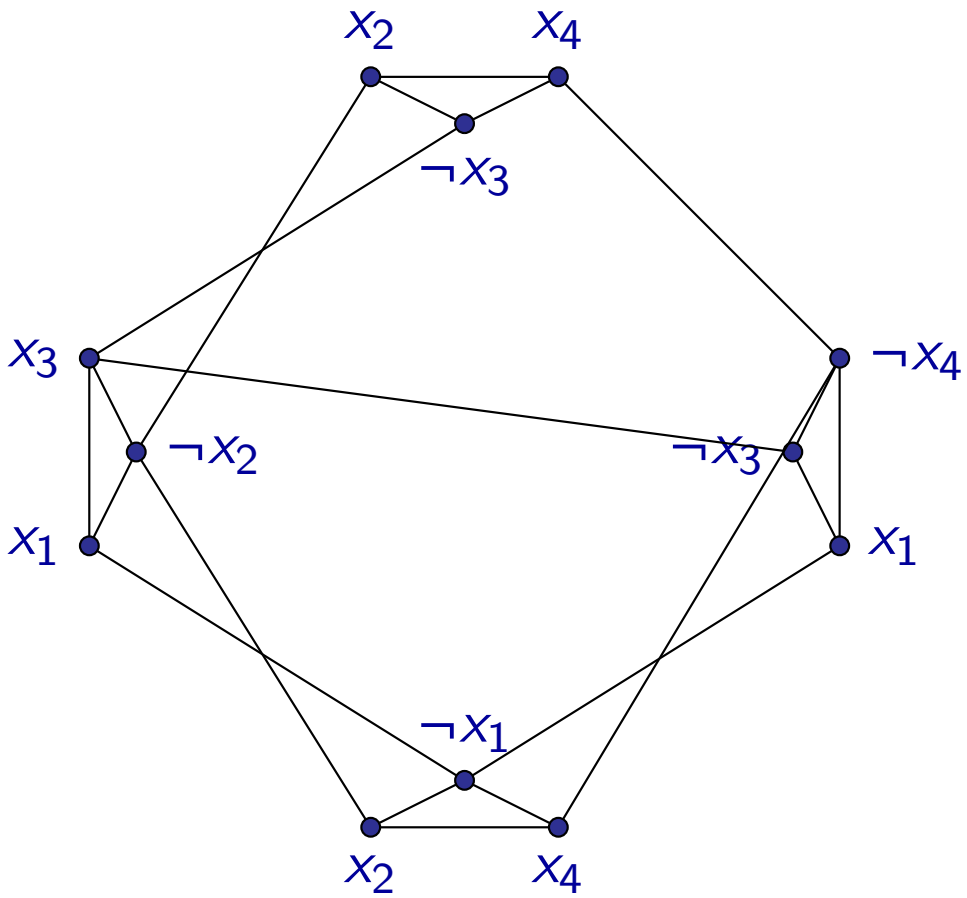


$k = 4$

Číslo k položíme rovno počtu klauzulí.

Převod 3-SAT na IS

$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$



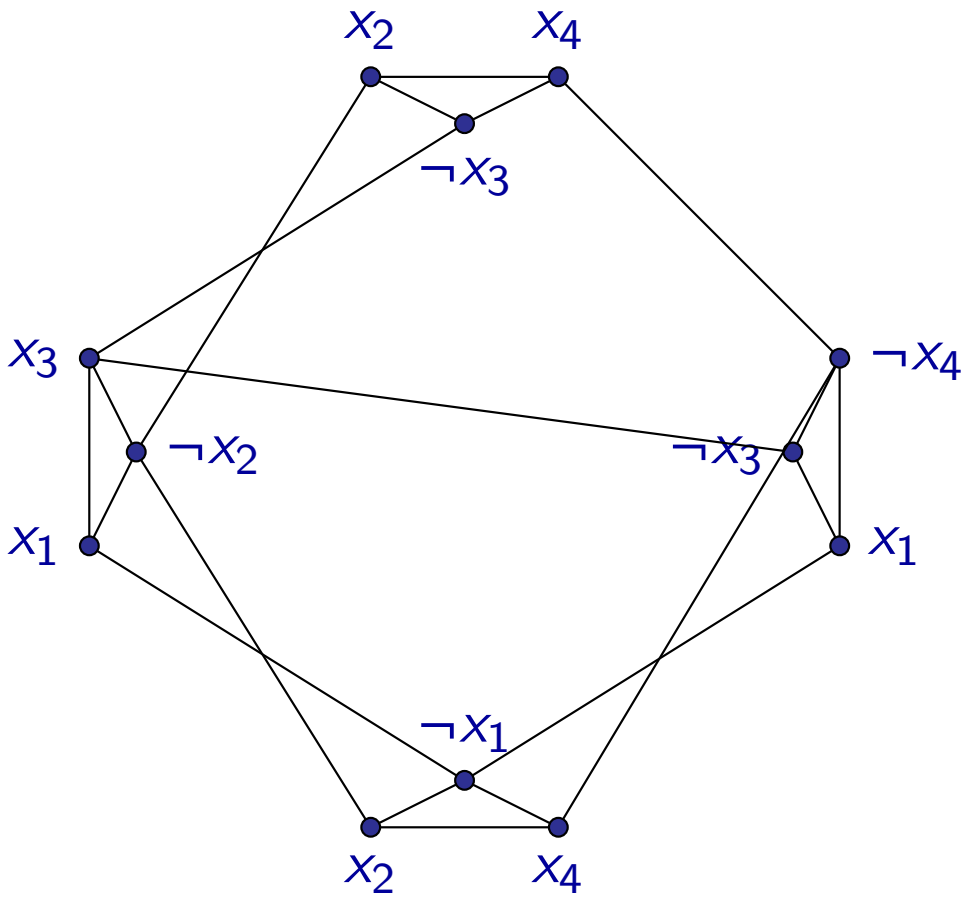
$k = 4$

Vytvořený graf a číslo k vydá algoritmus jako výstup.

Převod 3-SAT na IS

$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$

$\nu(x_1) = 1$
$\nu(x_2) = 1$
$\nu(x_3) = 0$
$\nu(x_4) = 1$



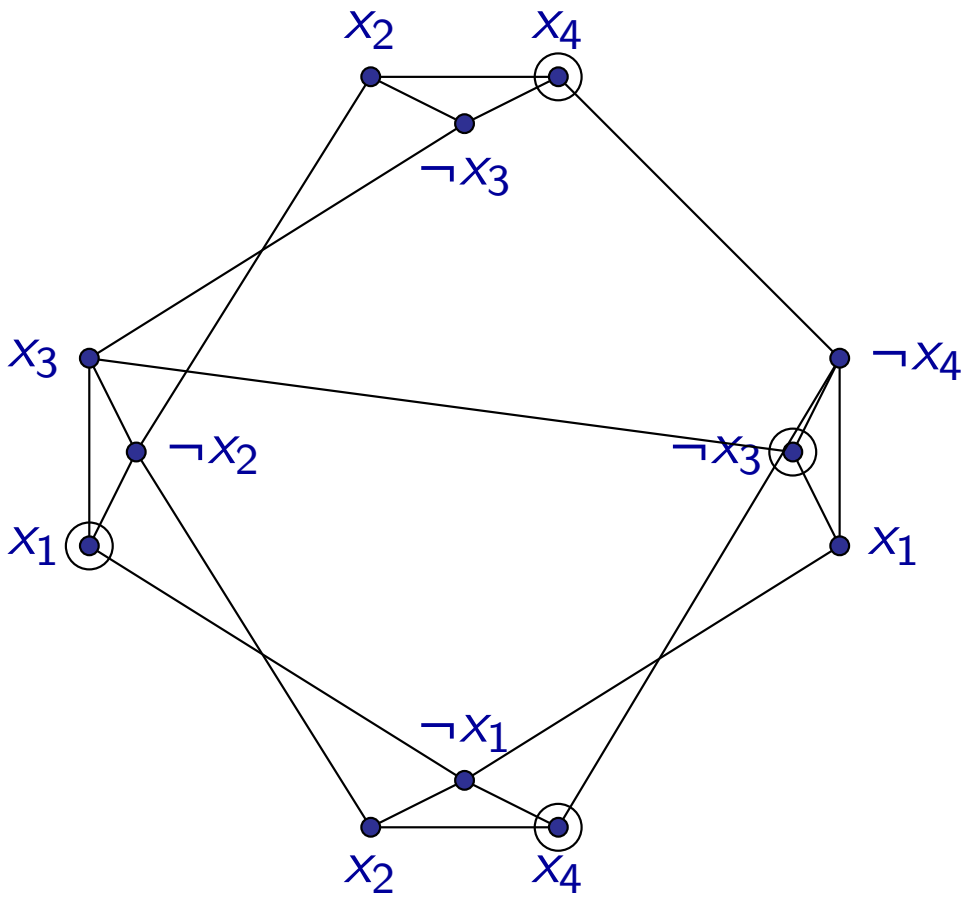
$k = 4$

Jestliže je formule φ splnitelná, existuje ohodnocení ν, při kterém má v každé klauzuli alespoň jeden literál hodnotu 1.

Převod 3-SAT na IS

$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$

$\nu(x_1) = 1$
$\nu(x_2) = 1$
$\nu(x_3) = 0$
$\nu(x_4) = 1$



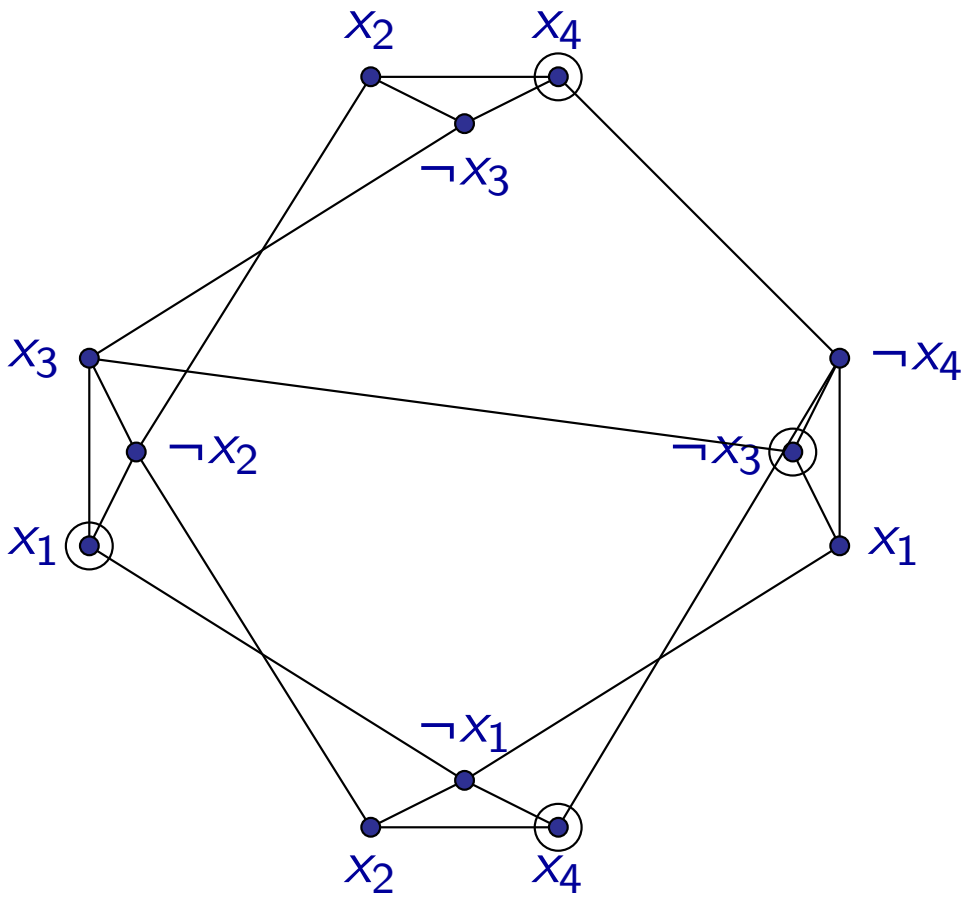
$k = 4$

Z každé klauzule vybereme jeden literál, který má při ohodnocení ν hodnotu 1, a do nezávislé množiny přidáme odpovídající vrchol.

Převod 3-SAT na IS

$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$

$\nu(x_1) = 1$
$\nu(x_2) = 1$
$\nu(x_3) = 0$
$\nu(x_4) = 1$



$k = 4$

Lehce ověříme, že vybrané vrcholy tvoří nezávislou množinu.

Převod 3-SAT na IS

Vybrané vrcholy tvoří nezávislou množinu, protože:

- Z každé trojice vrcholů odpovídající jedné klauzuli byl vybrán jen jeden vrchol.
- Nemohly být současně vybrány vrcholy označené x_i a $\neg x_i$.
  (Při daném ohodnocení ν má hodnotu 1 jen jeden z nich.)

Převod 3-SAT na IS

Na druhou stranu, pokud v grafu G existuje nezávislá množina velikosti k, musí určitě splňovat následující vlastnosti:

- Z každé trojice vrcholů odpovídající jedné klauzuli musí být vybrán nejvýše jeden vrchol.

  Protože je ale klauzulí k a je vybráno k vrcholů, musí být z každé takové trojice vybrán právě jeden.

- Nemohly být současně vybrány vrcholy označené x_i a $\neg x_i$.

Ohodnocení tedy zvolíme podle vybraných vrcholů, protože z předchozího vyplývá, že nehrozí, že by neexistovalo.
(Zbylým proměnným přiřadíme libovolné hodnoty.)

Při daném ohodnocení má formule φ určitě hodnotu 1, neboť v každé klauzuli má hodnotu 1 alespoň jeden literál.

Převod 3-SAT na IS

Popsaný algoritmus je určitě polynomiální:

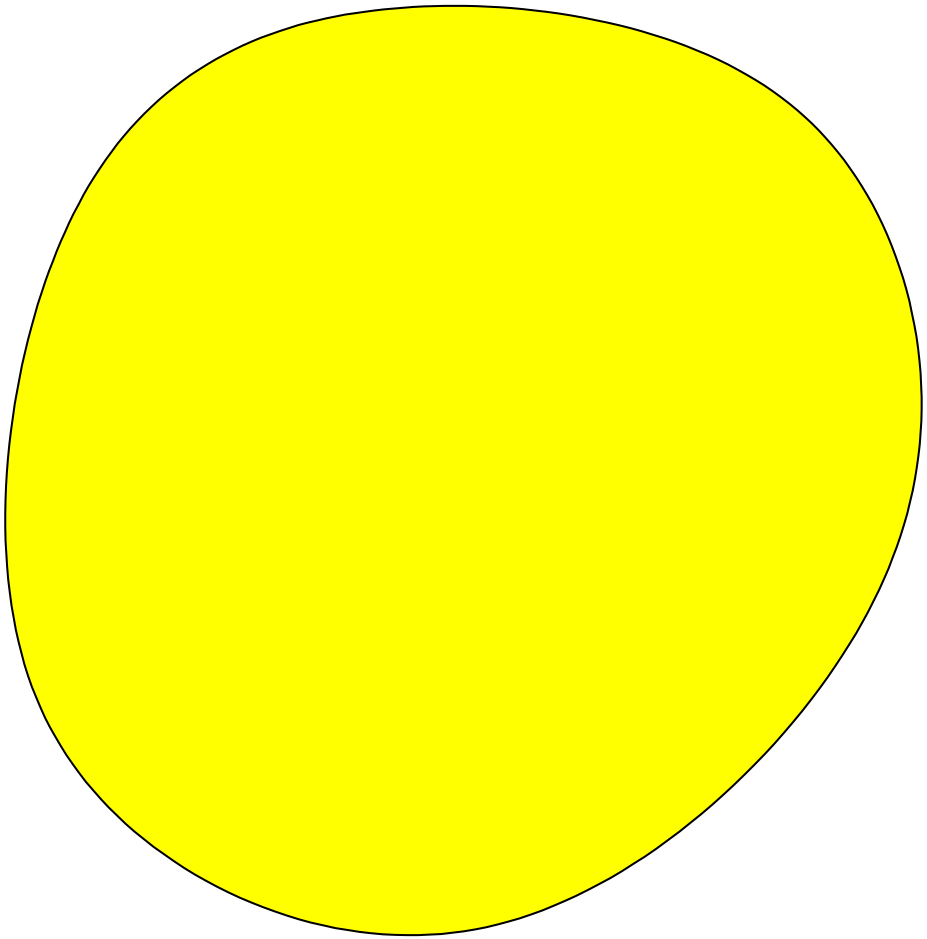
Graf G a číslo k je možné zkonstruovat k formuli φ v čase $\mathcal{O}(n^2)$, kde n je velikost formule φ.

Navíc jsme viděli, že ve zkonstruovaném grafu G existuje nezávislá množina velikosti k právě tehdy, když formule φ je splnitelná.

Popsaný algoritmus tedy ukazuje, že problém 3-SAT je polynomiálně převeditelný na problém IS.

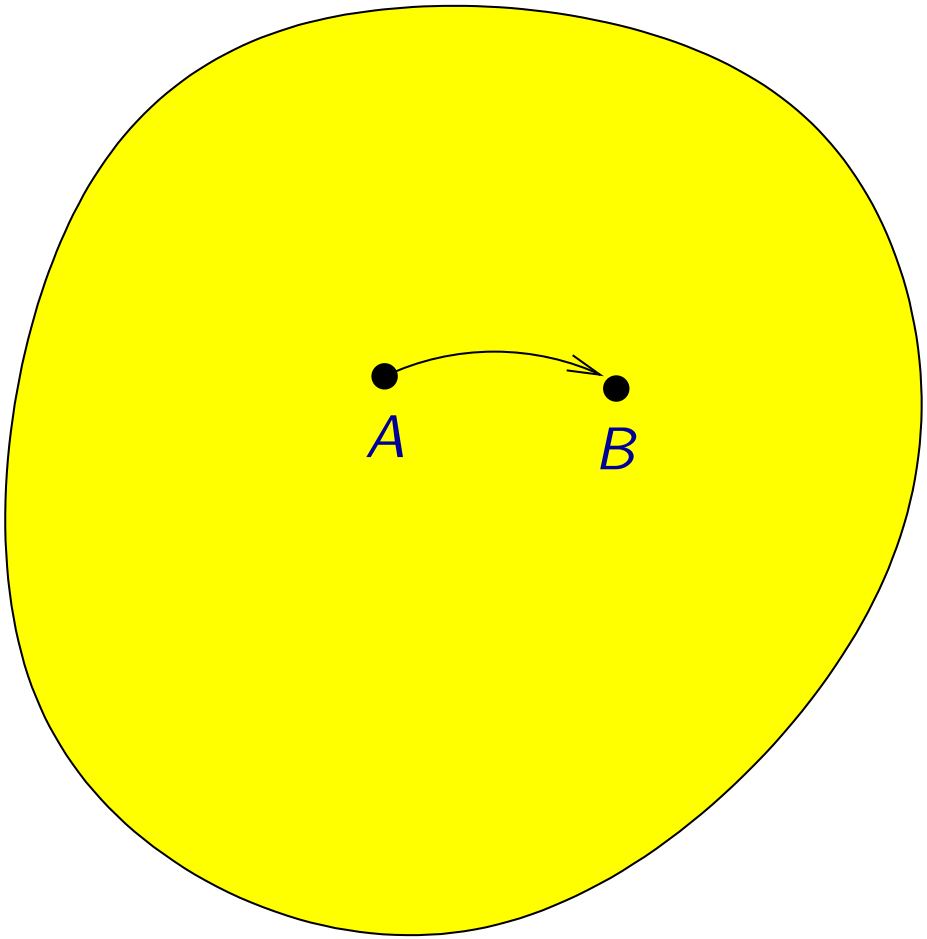
NP-úplné problémy

Vezměme si množinu všech možných rozhodovacích problémů.



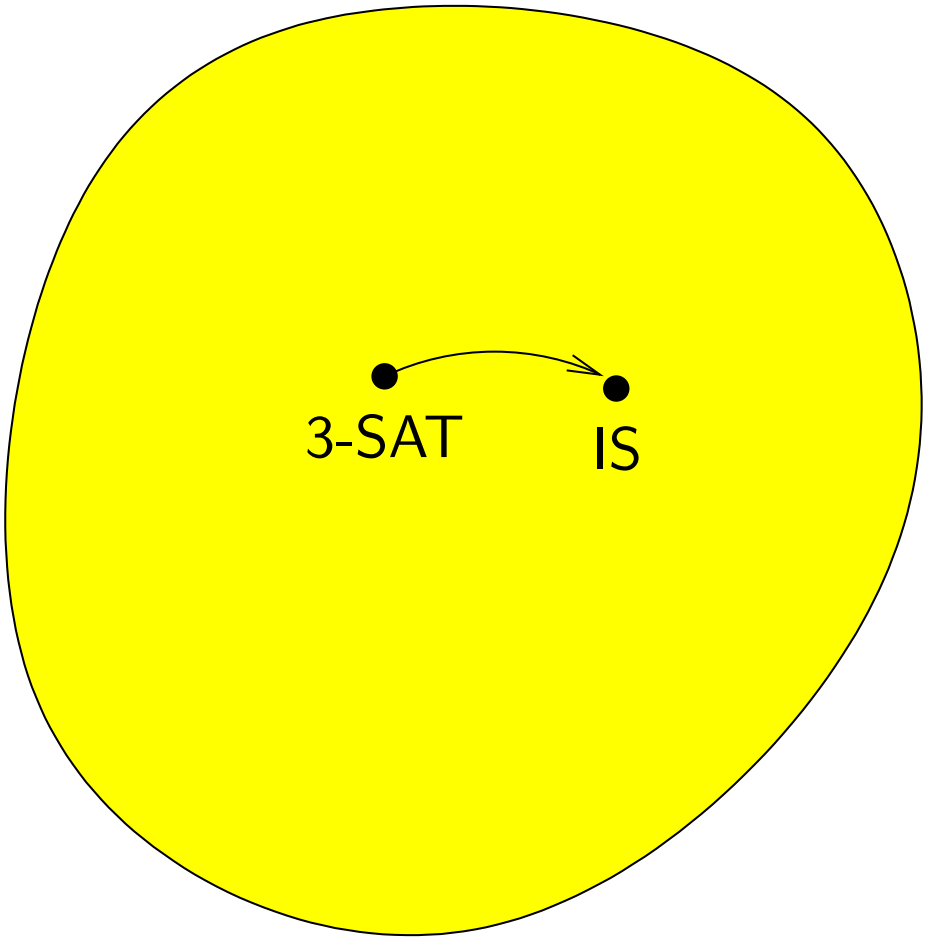
NP-úplné problémy

Šipkou si znázorníme, že problém A je polynomiálně převeditelný na problém B.



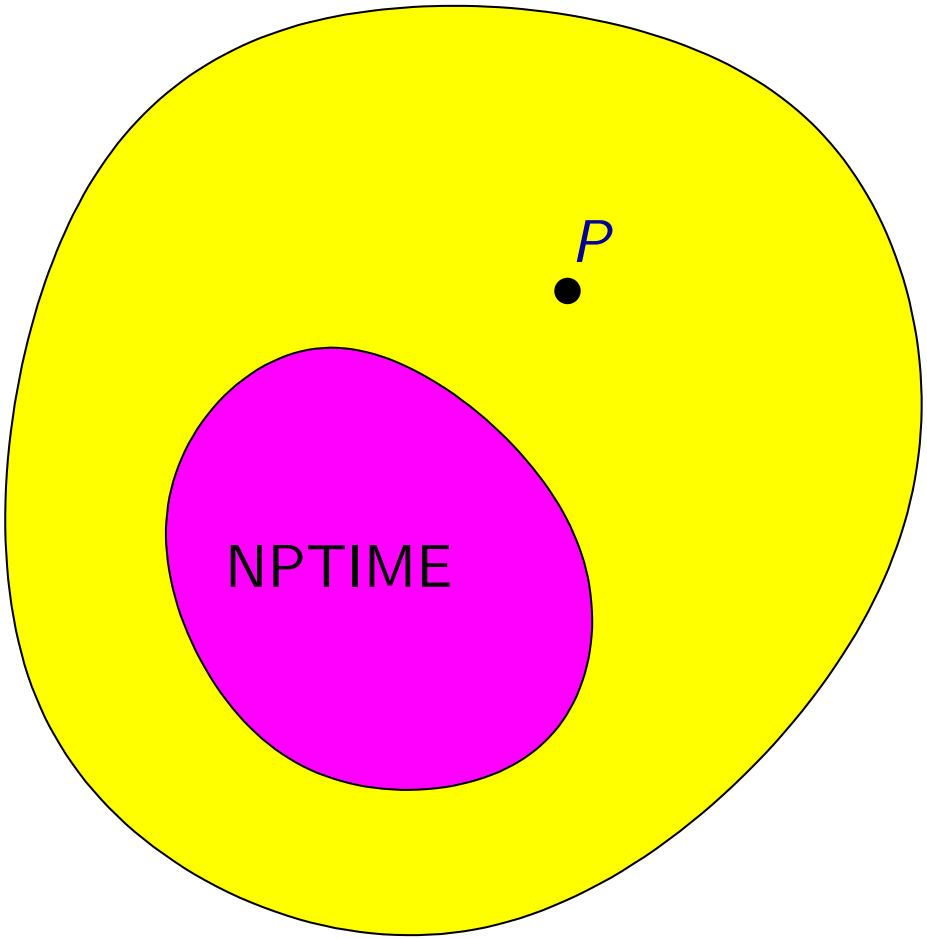
NP-úplné problémy

Například problém 3-SAT je polynomiálně převeditelný na problém IS.



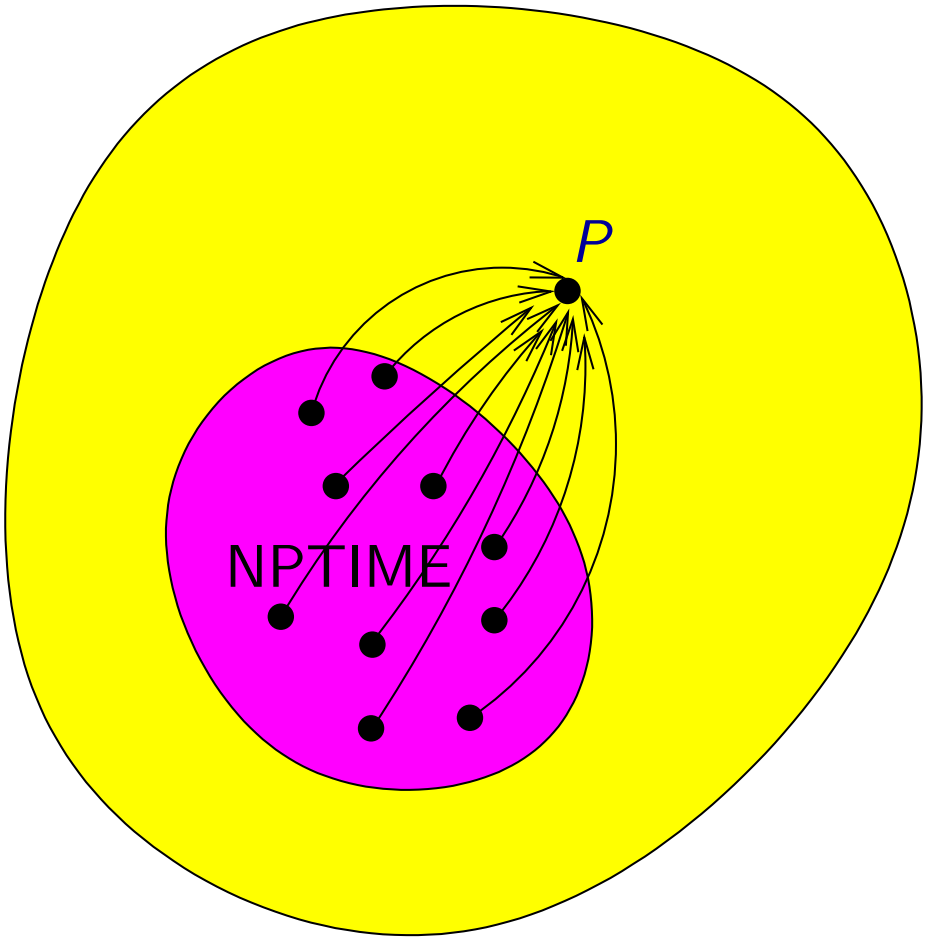
NP-úplné problémy

Vezměme si nyní třídu NPTIME a nějaký problém P.



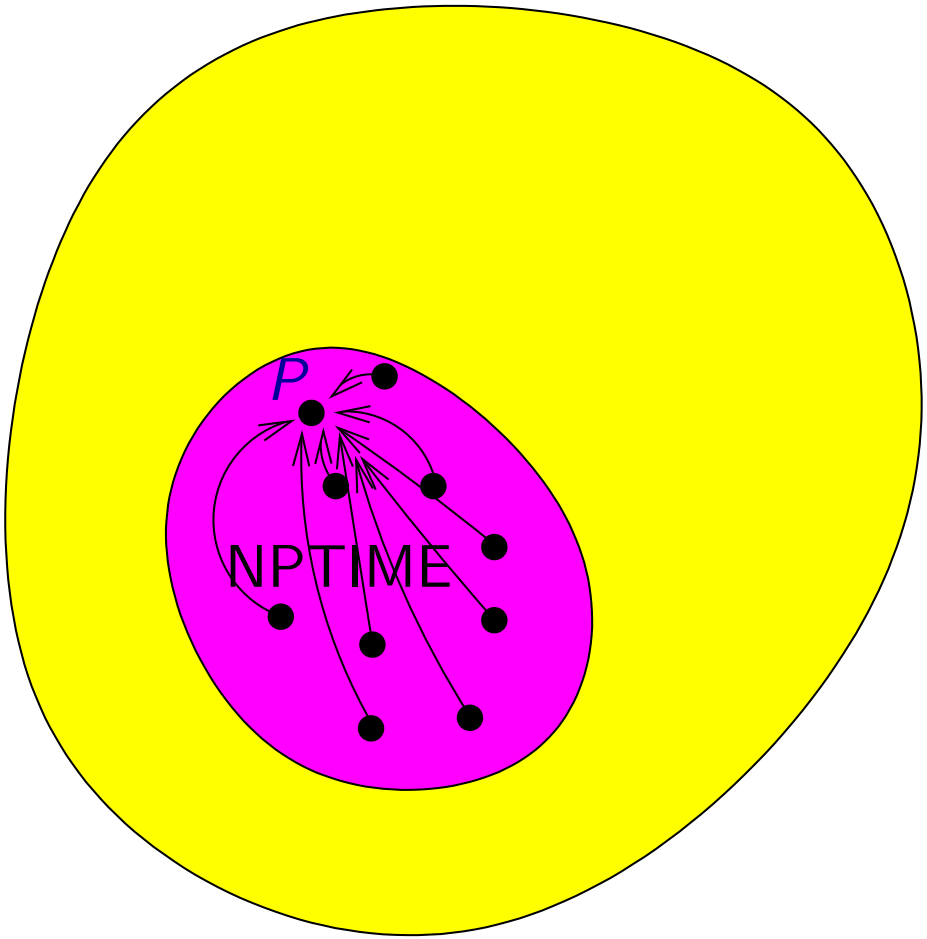
NP-úplné problémy

Problém P je NP-**těžký**, jestliže každý problém z NPTIME je polynomiálně převeditelný na P.



NP-úplné problémy

Problém P je NP-**úplný**, jestliže je NP-těžký a navíc sám patří do třídy NPTIME.



NP-úplné problémy

Pokud bychom pro nějaký NP-těžký problém P nalezli polynomiální algoritmus, získali bychom tím polynomiální algoritmus pro každý problém P' z NPTIME:

- Na vstup problému P' bychom nejprve aplikovali algoritmus realizující polynomiální převod z P' na P.
- Na vytvořenou instanci problému P bychom aplikovali polynomiální algoritmus řešící problém P a výsledek bychom vrátili jako odpověď pro danou instanci problému P'.

V takovém případě by tedy platilo PTIME = NPTIME, neboť pro každý problém z NPTIME by existoval polynomiální (deterministický) algoritmus.

NP-úplné problémy

Na druhou stranu, pokud existuje alespoň jeden problém z NPTIME, pro který neexistuje polynomiální algoritmus, tak z předchozího plyne, že pro žádný NP-těžký problém nemůže existovat polynomiální algoritmus.

Zda platí první nebo druhá možnost, je otevřený problém.

NP-úplné problémy

Není těžké si rozmyslet následující:

Pokud je problém A polynomiálně převeditelný na problém B a problém B je polynomiálně převeditelný na problém C, pak problém A je polynomiálně převeditelný na problém C.

Pokud tedy o nějakém problému P víme, že je NP-těžký a že P je polynomiálně převeditelný na problém P', pak víme, že i problém P' je NP-těžký.

NP-úplné problémy

Věta (Cook, 1971)

Problém SAT je NP-úplný.

Dá se ukázat, že SAT je polynomiálně převeditelný na 3-SAT a viděli jsme, že 3-SAT je polynomiálně převeditelný na IS.

Z toho plyne, že problémy 3-SAT a IS jsou NP-těžké.

Není také těžké ukázat, že 3-SAT i IS patří do třídy NPTIME.

Problémy 3-SAT i IS jsou NP-úplné.

Příklady některých NP-úplných problémů

Ze zatím uvedených problémů jsou NP-úplné následující tři problémy:

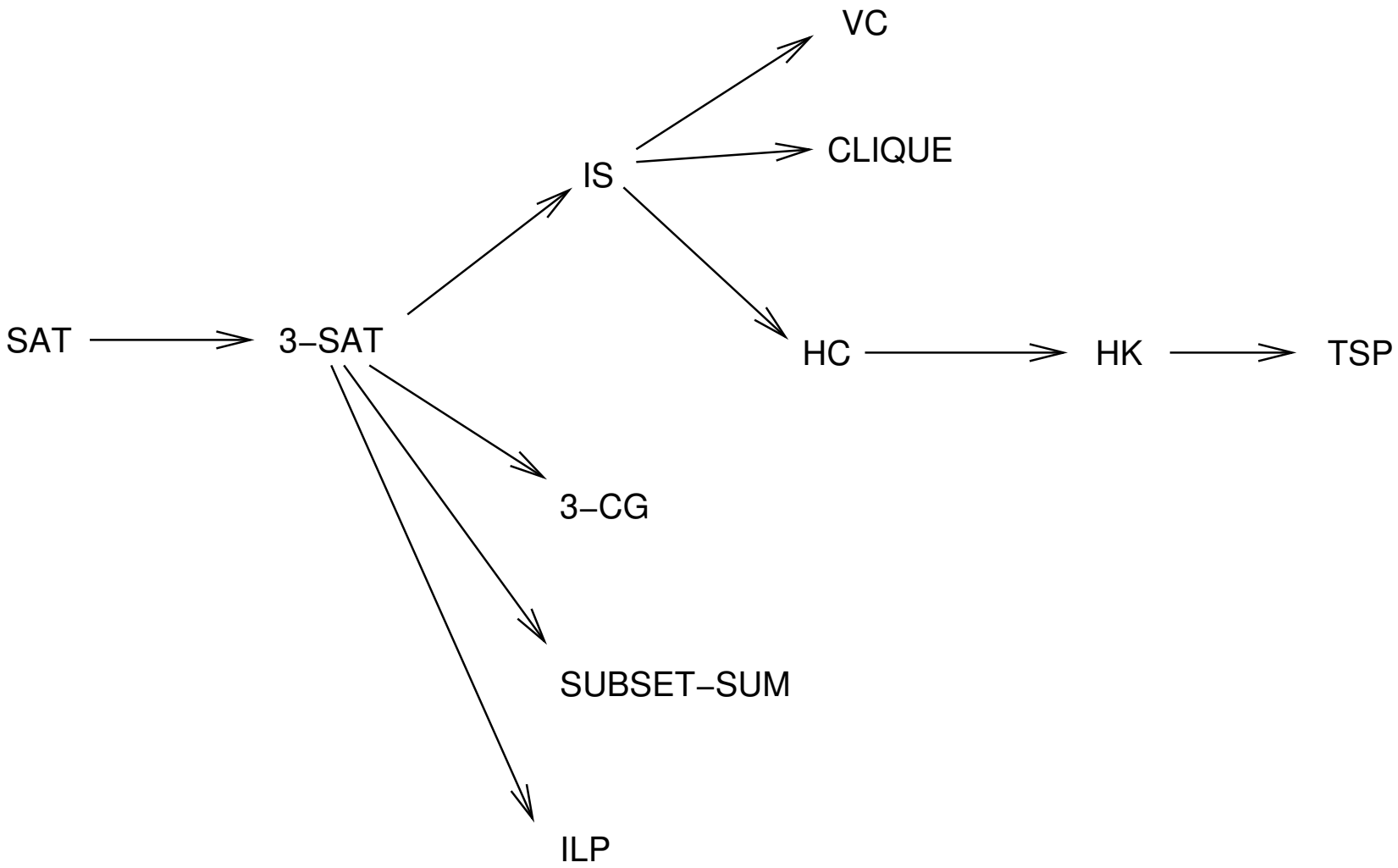
- SAT (splnitelnost booleovských formulí)
- 3-SAT
- IS — problém nezávislé množiny (independent set)

Na následujících slidech jsou uvedeny některé další NP-úplné problémy:

- CG — vrcholové barvení grafu (pozn.: je NP-úplný i ve speciálním případě, kdy máme právě 3 barvy)
- VC — vrcholové pokrytí grafu (vertex cover)
- CLIQUE — problém kliky
- HC — problém Hamiltonovského cyklu
- HK — problém Hamiltonovské kružnice
- TSP — problém obchodního cestujícího (traveling salesman problem)
- SUBSET-SUM
- ILP — celočíselné lineární programování (integer linear programming)

Příklady některých NP-úplných problémů

NP-obtížnost těchto problémů je možné ukázat tak, že ukážeme polynomiální převody z již známých NP-úplných problémů:

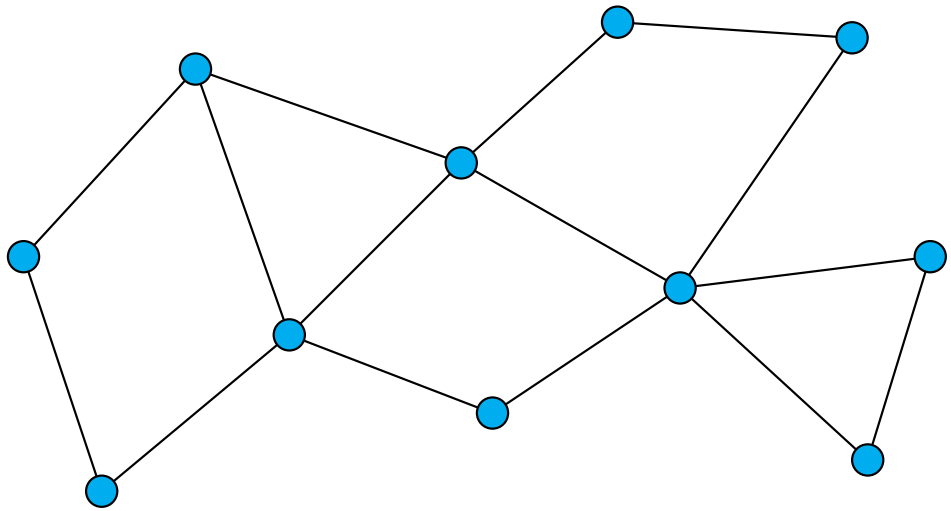


Barvení grafu

Vstup: Neorientovaný graf G, přirozené číslo k.

Otázka: Lze vrcholy grafu G obarvit k barvami tak, aby žádné dva vrcholy spojené hranou neměly stejnou barvu?

Příklad: $k = 3$



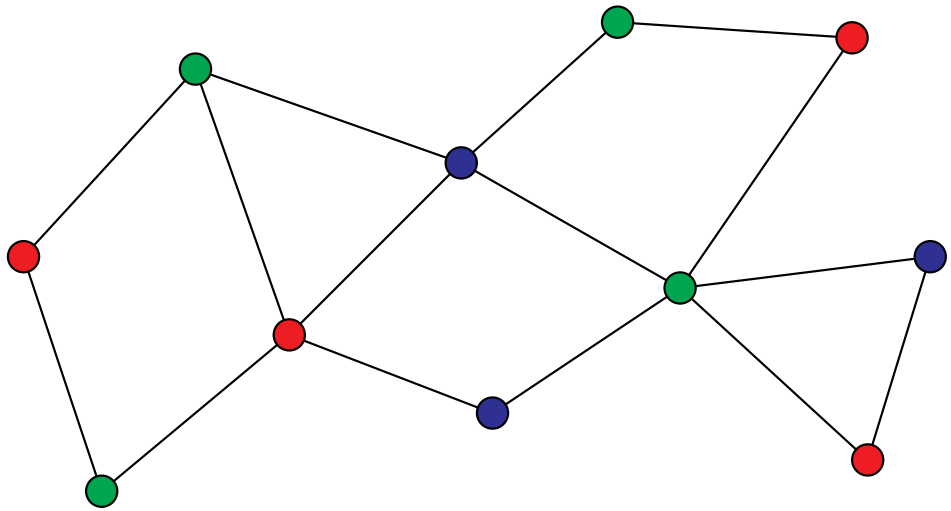
Barvení grafu

Barvení grafu

Vstup: Neorientovaný graf G, přirozené číslo k.

Otázka: Lze vrcholy grafu G obarvit k barvami tak, aby žádné dva vrcholy spojené hranou neměly stejnou barvu?

Příklad: $k = 3$



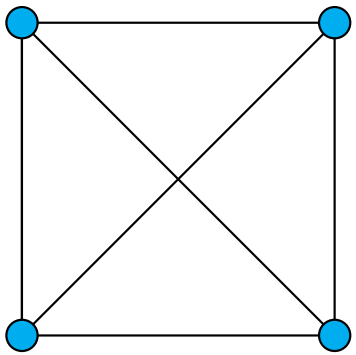
Odpověď: ANO

Barvení grafu

Vstup: Neorientovaný graf G, přirozené číslo k.

Otázka: Lze vrcholy grafu G obarvit k barvami tak, aby žádné dva vrcholy spojené hranou neměly stejnou barvu?

Příklad: $k = 3$



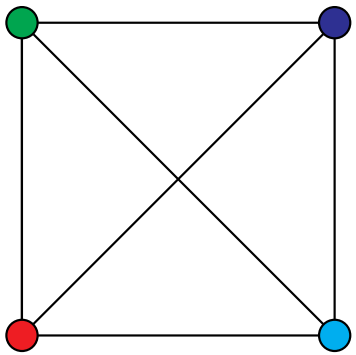
Barvení grafu

Barvení grafu

Vstup: Neorientovaný graf G, přirozené číslo k.

Otázka: Lze vrcholy grafu G obarvit k barvami tak, aby žádné dva vrcholy spojené hranou neměly stejnou barvu?

Příklad: $k = 3$



Odpověď: NE

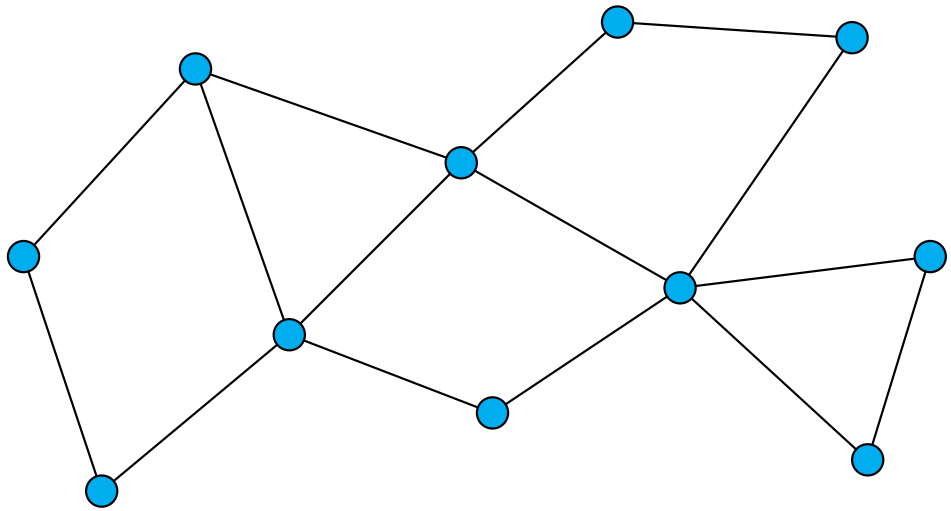
VC – Vrcholové pokrytí

VC – vrcholové pokrytí (vertex cover)

Vstup: Neorientovaný graf G a přirozené číslo k.

Otázka: Existuje v grafu G množina vrcholů velikosti k taková, že každá hrana má alespoň jeden svůj vrchol v této množině?

Příklad: $k = 6$



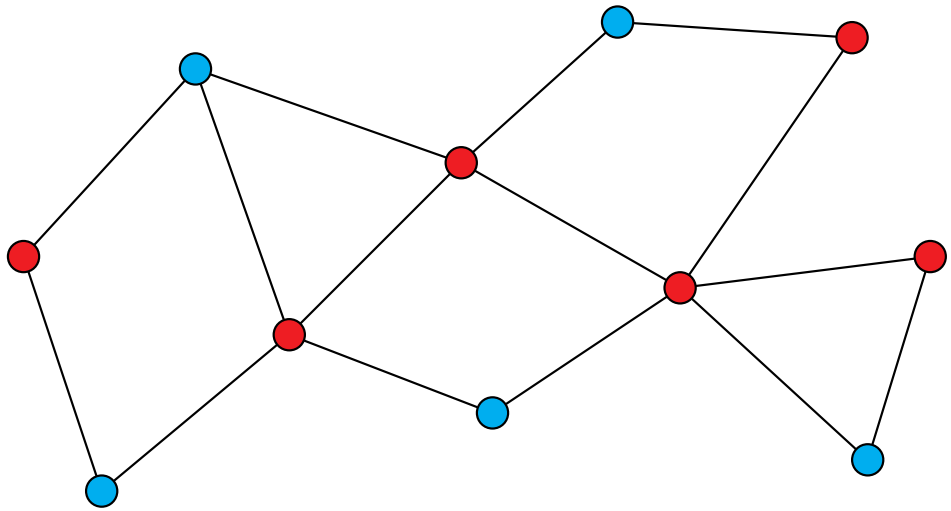
VC – Vrcholové pokrytí

VC – vrcholové pokrytí (vertex cover)

Vstup: Neorientovaný graf G a přirozené číslo k.

Otázka: Existuje v grafu G množina vrcholů velikosti k taková, že každá hrana má alespoň jeden svůj vrchol v této množině?

Příklad: $k = 6$



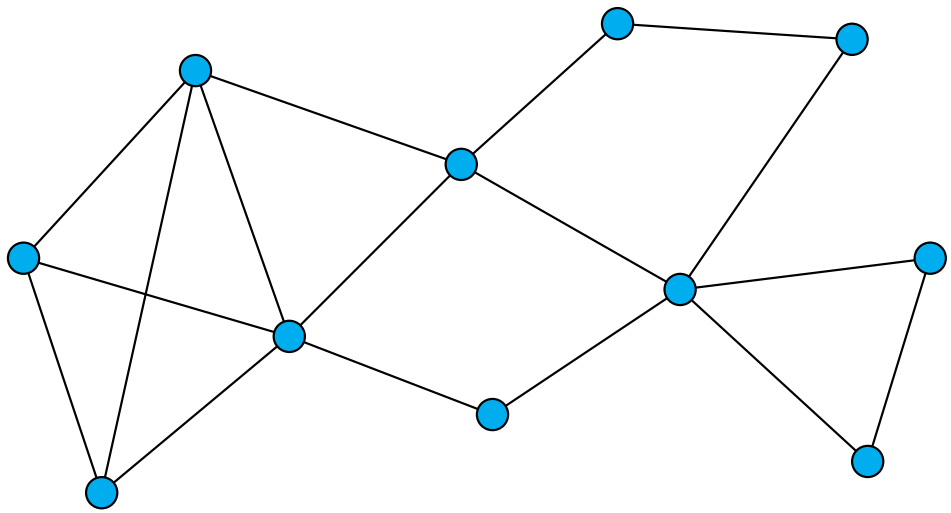
Odpověď: ANO

CLIQUE – problém kliky

Vstup: Neorientovaný graf G a přirozené číslo k.

Otázka: Existuje v grafu G množina vrcholů velikosti k taková, že každé dva vrcholy této množiny jsou spojeny hranou?

Příklad: $k = 4$

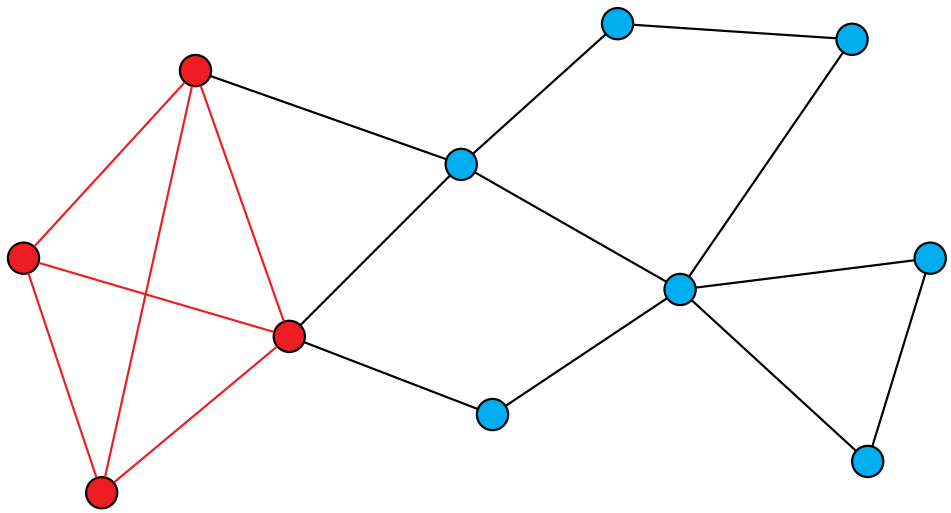


CLIQUE – problém kliky

Vstup: Neorientovaný graf G a přirozené číslo k.

Otázka: Existuje v grafu G množina vrcholů velikosti k taková, že každé dva vrcholy této množiny jsou spojeny hranou?

Příklad: $k = 4$



Odpověď: ANO

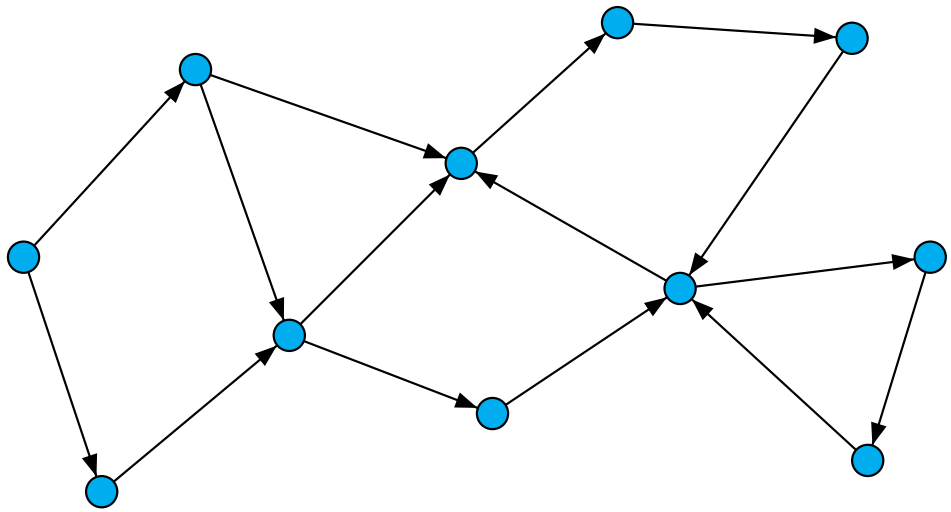
Hamiltonovský cyklus

HC – Problém „Hamiltonovský cyklus“

Vstup: Orientovaný graf G.

Otázka: Existuje v grafu G Hamiltonovský cyklus (orientovaný cyklus procházející každým vrcholem právě jednou)?

Příklad:



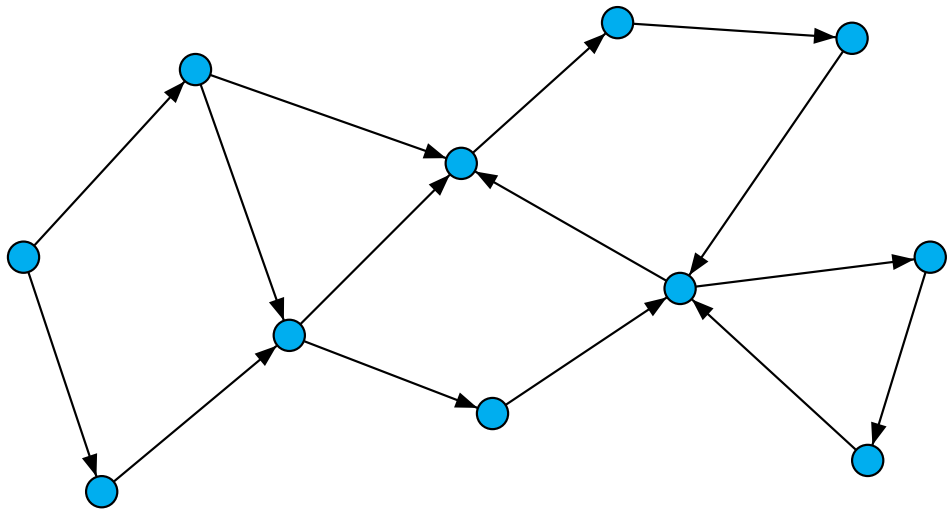
Hamiltonovský cyklus

HC – Problém „Hamiltonovský cyklus“

Vstup: Orientovaný graf G.

Otázka: Existuje v grafu G Hamiltonovský cyklus (orientovaný cyklus procházející každým vrcholem právě jednou)?

Příklad:



Odpověď: NE

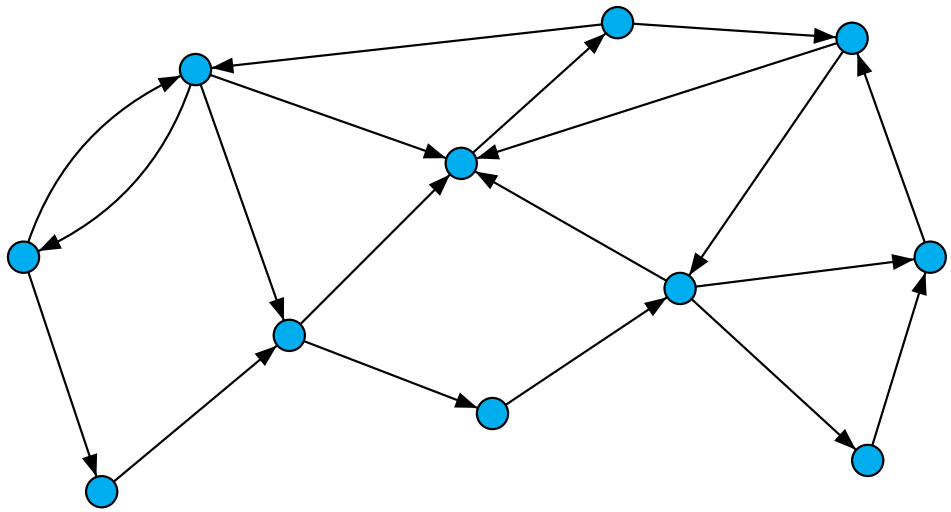
Hamiltonovský cyklus

HC – Problém „Hamiltonovský cyklus“

Vstup: Orientovaný graf G.

Otázka: Existuje v grafu G Hamiltonovský cyklus (orientovaný cyklus procházející každým vrcholem právě jednou)?

Příklad:



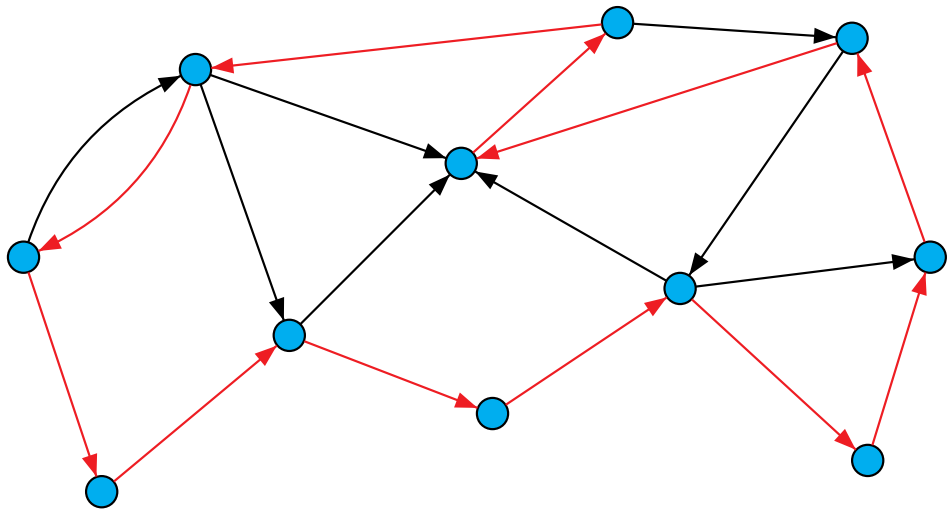
Hamiltonovský cyklus

HC – Problém „Hamiltonovský cyklus“

Vstup: Orientovaný graf G.

Otázka: Existuje v grafu G Hamiltonovský cyklus (orientovaný cyklus procházející každým vrcholem právě jednou)?

Příklad:



Odpověď: ANO

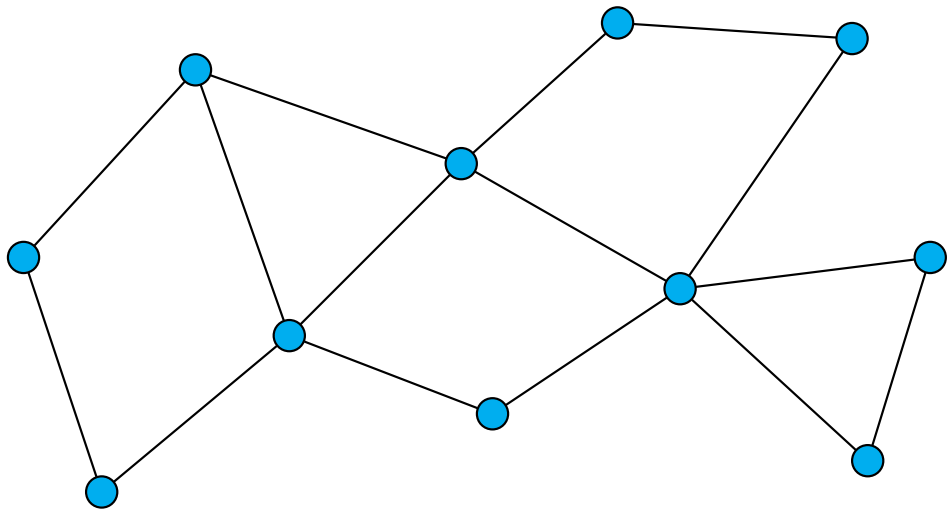
Hamiltonovská kružnice

HK – Problém „Hamiltonovská kružnice“

Vstup: Neorientovaný graf G.

Otázka: Existuje v grafu G Hamiltonovská kružnice (neorientovaný cyklus procházející každým vrcholem právě jednou)?

Příklad:



Odpověď: NE

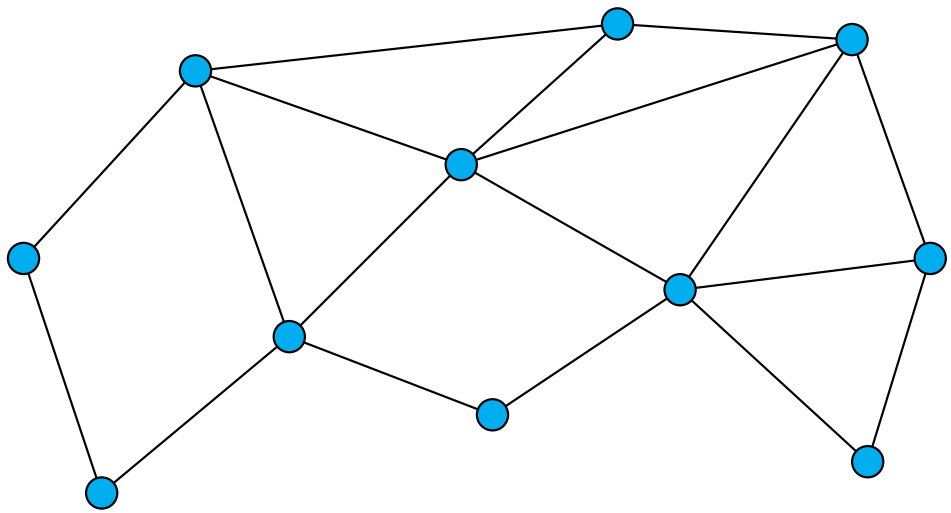
Hamiltonovská kružnice

HK – Problém „Hamiltonovská kružnice“

Vstup: Neorientovaný graf G.

Otázka: Existuje v grafu G Hamiltonovská kružnice (neorientovaný cyklus procházející každým vrcholem právě jednou)?

Příklad:



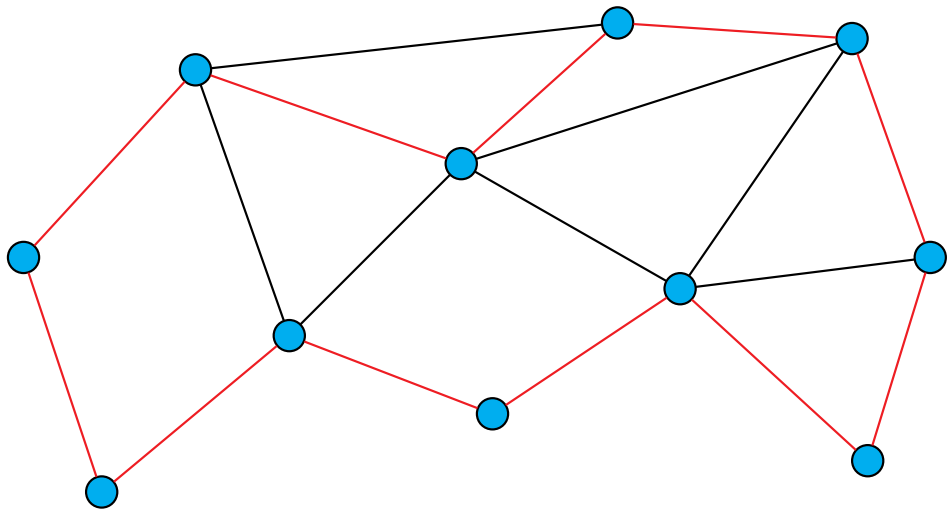
Hamiltonovská kružnice

HK – Problém „Hamiltonovská kružnice“

Vstup: Neorientovaný graf G.

Otázka: Existuje v grafu G Hamiltonovská kružnice (neorientovaný cyklus procházející každým vrcholem právě jednou)?

Příklad:



Odpověď: Ano

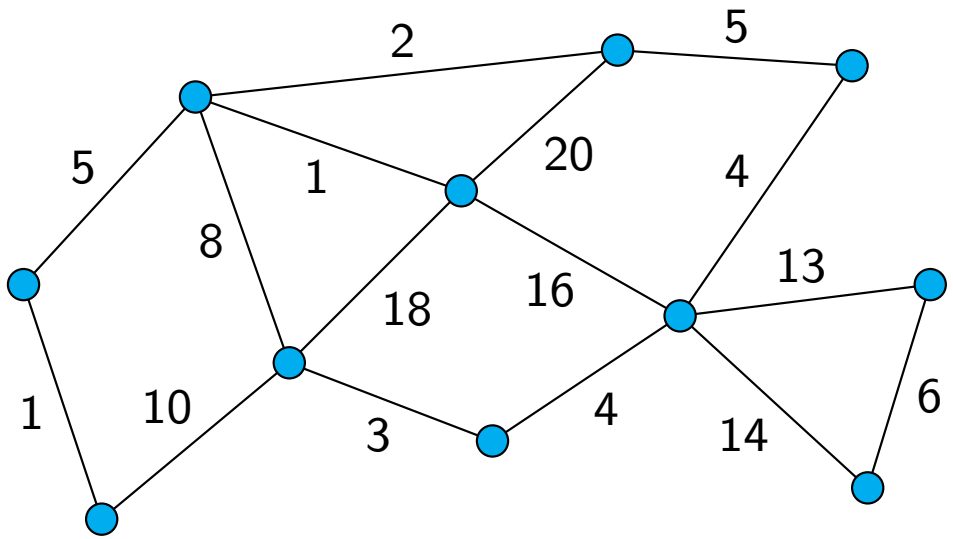
Problém obchodního cestujícího

TSP - Problém „obchodního cestujícího“

Vstup: Neorientovaný graf G s hranami ohodnocenými přirozenými čísly a číslo k.

Otázka: Existuje v grafu G uzavřená cesta procházející všemi vrcholy takový, že součet délek hran na této cestě (včetně opakovaných) je maximálně k?

Příklad: $k = 70$



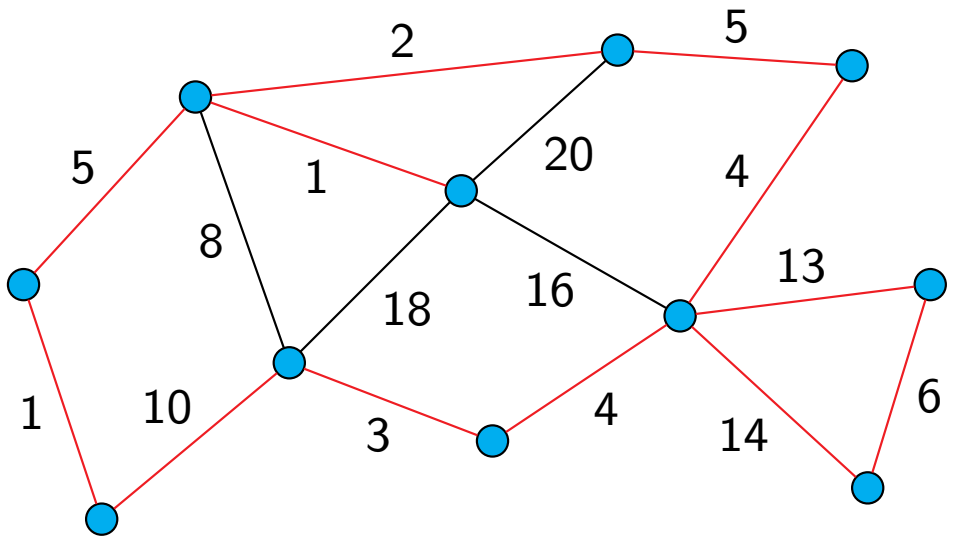
Problém obchodního cestujícího

TSP - Problém „obchodního cestujícího“

Vstup: Neorientovaný graf G s hranami ohodnocenými přirozenými čísly a číslo k.

Otázka: Existuje v grafu G uzavřená cesta procházející všemi vrcholy takový, že součet délek hran na této cestě (včetně opakovaných) je maximálně k?

Příklad: $k = 70$



Odpověď: Ano, protože byla nalezena cesta se součtem 69.

SUBSET-SUM

Problém SUBSET-SUM

Vstup: Sekvence přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a přirozené číslo s.

Otázka: Existuje množina $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že $\sum_{i \in I} a_i = s$?

Jinak řečeno, ptáme se zda z dané (multi)množiny čísel je možné vybrat podmnožinu, jejíž součet je s.

Příklad: Pro vstup tvořený čísly $3, 5, 2, 3, 7$ a číslem $s = 15$ je odpověď Ano, neboť $3 + 5 + 7 = 15$.

Pro vstup tvořený čísly $3, 5, 2, 3, 7$ a číslem $s = 16$ je odpověď Ne, neboť žádná podmnožina těchto čísel nedává součet 16.

SUBSET-SUM

Poznámka:
Pořadí čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ na vstupu není důležité.

Všimněte si však určitého rozdílu oproti tomu, kdybychom problém formulovali tak, že vstupem je množina $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ a číslo s — v množině se čísla neopakují, zatímco v sekvenci se může totéž číslo vyskytnout vícekrát.

SUBSET-SUM

Problém SUBSET-SUM je speciálním případem **problému batohu** (knapsack problem):

Knapsack problem

Vstup: Sekvence dvojic přirozených čísel $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ a dvě přirozená čísla s a t.

Otázka: Existuje množina $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že $\sum_{i \in I} a_i \leq s$ a $\sum_{i \in I} b_i \geq t$?

SUBSET-SUM

Neformálně můžeme problém batohu formulovat takto:

Máme n předmětů, kde i-tý předmět váží a_i gramů a má cenu b_i Kč. Do batohu se vejdou předměty o maximální celkové váze s gramů.

Otázka zní, zda můžeme z předmětů vybrat podmnožinu, která by vážila maximálně s gramů a měla celkovou cenu alespoň t Kč.

Poznámka:
Zde jsme problém batohu formulovali jako rozhodovací problém.

Běžnější je formulovat tento problém jako optimalizační problém, kde je cílem najít takovou množinu $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, kde hodnota $\sum_{i \in I} b_i$ je maximální, přičemž ovšem musí být dodržena podmínka $\sum_{i \in I} a_i \leq s$, tj. vybrat předměty s maximální celkovou cenou tak, aby nebyla překročena kapacita batohu.

SUBSET-SUM

To, že SUBSET-SUM je speciálním případem problému batohu, vidíme z následující jednoduché konstrukce:

Řekněme, že $a_1, a_2, \ldots, a_n$, s_1 je instance problému SUBSET-SUM. Je očividné, že pro instanci problému batohu, kde máme sekvenci $(a_1, a_1), (a_2, a_2), \ldots, (a_n, a_n)$, $s = s_1$ a $t = s_1$, je odpověď stejná jako pro původní instanci SUBSET-SUM.

SUBSET-SUM

Pokud chceme studovat složitost problémů jako jsou SUBSET-SUM nebo problém batohu, je dobré si nejprve ujasnit, co považujeme za velikost vstupu.

Asi nejpřirozenější je definovat velikost vstupu jako celkový počet bitů, který potřebujeme k zápisu instance.

Musíme však určit, jakým způsobem jsou na vstupu zadána přirozená čísla – zda binárně (případně v jiné číselné soustavě o základu alespoň 2, např. desítkové nebo šestnáctkové) nebo unárně.

- Pokud počítáme velikost vstupu jako celkový počet bitů při použití **binárního** zápisu čísel, tak je problém SUBSET-SUM NP-úplný (a není tedy pro něj znám polynomiální algoritmus).
- Pokud počítáme velikost vstupu jako celkový počet bitů při použití **unárního** zápisu, tak existuje pro problém SUBSET-SUM algoritmus s polynomiální časovou složitostí.

ILP – celočíselné lineární programování

Problém ILP (celočíselné lineární programování)

Vstup: Celočíselná matice A a celočíselný vektor b.

Otázka: Existuje celočíselný vektor x, takový že $Ax \leq b$?

Příklad instance problému:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ptáme se tedy, zda existuje celočíselné řešení následující soustavy nerovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &\leq 8 \\ x_1 + x_3 &\leq -3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

ILP – celočíselné lineární programování

Jedním z řešení soustavy

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &\leq 8 \\ x_1 + x_3 &\leq -3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

je například $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, tj.

$$x = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

neboť

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-4) - 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 &= -9 \leq 8 \\ -4 + 1 &= -3 \leq -3 \\ 2 \cdot (-4) + 1 &= -7 \leq 5 \end{aligned}$$

Pro tuto instanci je tedy odpověď ANO.

ILP – celočíselné lineární programování

Poznámka: Analogický problém, kdy se pro danou soustavu lineálních nerovnic ptáme, zda existuje její řešení v oboru **reálných** čísel, je možné řešit v polynomiálním čase.

NP-úplné problémy

Známou knihou zabývající se problematikou NP-úplných problémů je

> Michael R. Garey, David S. Johnson: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman, 1979.

Kniha mimo jiné obsahuje katalog různých NP-úplných problémů:

- Je v něm uvedeno přes 300 problémů.
- U jednotlivých problémů jsou uvedeny jejich definice, odkazy na literaturu a poznámky týkající se například toho, které varianty problému jsou řešitelné v polynomiálním čase a které už jsou NP-těžké, apod.

NP-úplné problémy

- Tento katalog je rozdělen do následujících sekcí podle oblastí, do kterých uvedené problémy spadají:
  - Graph Theory
  - Network Design
  - Sets and Partitions
  - Storage and Retrieval
  - Sequencing and Scheduling
  - Mathematical Programming
  - Algebra and Number Theory
  - Games and Puzzles
  - Logic
  - Automata and Language Theory
  - Program Optimization
  - Miscellaneous
  - Open Problems