

## Dva kompletně řešené příklady

### Úvod

V této příloze uvedeme úplné a podrobné řešení dvou her počínaje jejich slovním neformálním popisem a konče jejich úplným exaktním vyřešením. Jedná se o tyto hry:

- jednoduchá odebrací hra (simple take-away game)
- jednoduchá karetní hra typu poker (simple poker game, Meyerson's card game)

Řešení v obou případech probíhá v následujících krocích:

- neformální slovní zadání hry
- formální definice dané hry v rozvinutém tvaru (extensive form game - efg)
- normalizace hry – transformace na normální (strategický) tvaru (normal form game, nfg)
- standardní řešení hry v normálním tvaru
- přímé řešení hry v rozvinutém tvaru - je-li to možné
- poznámky - diskuse

Tato příloha rekapituluje podstatné body učiva 1. a 2. kapitoly učebních textů na dvou konkrétních příkladech. Obrázky her ve tvaru efg v tomto textu jsou vytvořeny pomocí programového systému Gambit.

## 1. Jednoduchá odebrací hra

### 1.1 Popis hry:

Uvažujme hromádku  $n$  předmětů ( $n \geq 1$ ) předmětů (např. zápalek, kamínků, ...). Z této hromádky odebírají dva hráči střídavě po jednom nebo dvou předmětech. Hráč, který je na řadě má dvě možnosti: odebrat jeden nebo dva předměty (zbyl-li v hromadě již jen jeden předmět, pak má ovšem možnost jedinou). Hra končí, nezbyl-li v hromadě žádný předmět. Vyhrává ten hráč, který z hromady odebral poslední předmět.

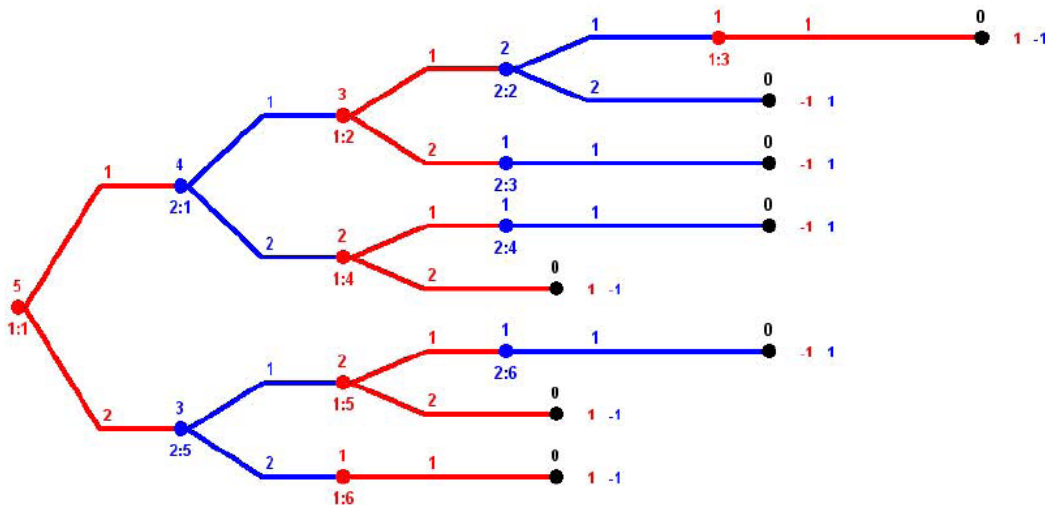
Pro určitost budeme předpokládat  $n=5$ .

### 1.2 Model hry v rozvinutém tvaru

Hra v extenzivním tvaru, odpovídající popisu z předchozího odstavce, je exaktně definována grafem pozic na následujícím obr. 1.1

Graf je orientovaným grafem typu strom. Uzly grafu reprezentují pozice hry, hrany vycházející z uzlů reprezentují alternativní akce z kterých si hráč, který je v dané pozici na tahu může vybrat. Kořen stromu představuje počáteční pozici stromu ve kterém hra začíná, listy stromu pak koncové (terminální) pozice hry ve kterých hra končí. Popiska umístěná pod každým uzlem (s výjimkou terminálních) je tvořena dvojicí přirozených čísel oddělených dvojtečkou; první číslo je pořadové číslo hráče, který je v dané pozici na tahu a druhé číslo je pořadové číslo informační množiny do které daná pozice patří. Popisky umístěné nad hranami jsou pořadová čísla akcí (rozhodovacích alternativ), které mají hráči v té či oné pozici k dispozici. Konečně popisky umístěné vpravo od terminálních pozic jsou

tvořeny vektory reálných čísel udávajícími výplaty jednotlivých hráčů, skončí-li hra v dané terminální pozici. Dimenze vektorů je rovna počtu hráčů



Obr. 1.1

Uvažovaná hra má dva hráče. Každý z obou hráčů je na tahu v 6 pozicích a každá pozice tvoří jednoprvkovou informační množinu – jedná se tedy o hru s dokonalou informací (hráč, který je na tahu ví přesně v které pozici nenachází). Prvý hráč má v pěti pozicích 1:1, 1:2, 1:4, 1:5, 1:6 dvě alternativní možnosti (rozhoduje se mezi dvěma možnými akcemi: odebrat 1 nebo 2 předměty) a v jedné pozici 1:3 možnost jedinou (odebrat 1 předmět). Druhý hráč má dvě možnosti ve třech pozicích 2:1, 2:2, 2:5 a jedinou možnost ve třech pozicích 2:3, 2:4, 2:6. Popisky nad hranami můžeme chápat jako počty odebraných předmětů (akce s pořadovým číslem 1 znamená odebrání 1 předmětu a akce s číslem 2 odebrání 2 předmětů). Popisky umístěné nad pozicemi udávají počet předmětů, které jsou v jednotlivých pozicích v hromadě. V počáteční pozici je to 5 a v terminálních pozicích 0.

### 1.3 Normalizace hry - transformace hry na normální tvar

K tomu abychom pro danou hru nalezneme její normální (strategický) tvar je nutné určit množinu všech strategií 1. a 2. hráče a stanovit výplaty obou hráčů pro všechny možné kombinace strategií 1. a 2. hráče. Strategie hráče je funkce, která přiřazuje ke každé informační množině hráče (v našem příkladě informační množina = pozice). Z počtu informačních množin a z počtu alternativních akcí na každé množině, vyjmenovaných v předchozím odstavci, vyplývá, že strategie 1. hráče je dána 6-rozměrným vektorem jehož každá souřadnice je buď 1 nebo 2 s výjimkou 3. souřadnice, která má vždy hodnotu 1 a strategie 2. hráče je opět dána 6-rozměrným vektorem, jehož 1., 2. a 5. souřadnice jsou obsazeny 1 nebo 2, zatímco zbývající 3., 4. a 6. souřadnice jsou obsazeny vždy hodnotou 1. Odtud dále plyne, že 1. hráč má celkem  $2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$  různých strategií a 2. hráč jen  $2 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2 \times 1 = 8$  strategií.

Ve skutečnosti mnohé z těchto 32 resp. 8 strategií jsou totožné a ač podle definice různé, fakticky představují naprosto stejné chování (rozhodování) 1. resp. 2. hráče. Ukážeme to na dvou příkladech.

Uvažujme např. strategii 1. hráče danou vektorem  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ , tj. strategii, kdy ve všech pozicích, ve kterých je 1. hráč na tahu, odebírá z hromady 1 předmět. Pohledem na obr. 1.1. snadno zjistíme, že tato strategie je ekvivalentní (z hlediska účinku na průběh hry)

se třemi dalšími strategiemi  $(1,1,1,1,1,2)$ ,  $(1,1,1,1,2,1)$ ,  $(1,1,1,1,2,2)$ . Množinu těchto 4 navzájem ekvivalentních strategií můžeme označit zápisem  $(1,1,1,1,*,*)$ ; hvězdičky naznačují, že při odebrání 1 předmětu v prvních 4 pozicích 1:1, 1:2, 1:3, 1:4 se 1. hráč do pozic 1:5, 1:6 vůbec nedostane a tedy nezáleží na tom kolik předmětů k odebrání pro tyto pozice strategie předepisuje.

V druhém příkladě uvažujme strategii 2. hráče danou vektorem  $(2,2,1,1,2,1)$ , kdy 2. hráč odebírá ve všech svých pozicích (tj. pozicích ve kterých je na tahu) maximální počet předmětů odebratelných podle pravidel hry. Pohledem na graf hry na obr. ... snadno zjistíme, že všechny strategie tvaru  $(2,*,*,1,2,*)$ , kde hvězdičky označují pozice do kterých se 2. hráč nikdy nemůže dostat a tedy na tom jaké akce jsou předepsány pro tyto pozice vůbec nezáleží.

Vypočteme ještě na ukázkou, jaké budou výplaty obou hráčů, jestliže hráči volí výše analyzované strategie  $(1,1,1,1,*,*)$  a  $(2,*,*,1,2,*)$ . Prvním tahem 1. hra přejde z výchozí pozice 1:1 do pozice 2:1 (odebrán 1 předmět), odtud 1. tahem 2. hráče do pozice 1:4 (odebrány 2 předměty), dále 2. tahem 1. hráče do pozice 2:4 (odebrán 1 předmět) a konečně 2. tahem 2. hráče (odebrán 1 předmět) do terminální pozice s výplatami  $(-1, 1)$ . Při uvedených volbách strategií tedy 1. hráč prohrává a 2. vyhrává. Výpočet, který jsme provedli odpovídá výpočtu prvku v prvním řádku a posledním sloupci bimatice zobrazené v tab. 1.1.

Pracujeme-li se všemi kombinatoricky myslitelnými strategiemi dostaneme výplatní matici typu  $32 \times 8$ , reprezentujeme-li však skupiny ekvivalentních strategií vždy jednou jedinou strategií (libovolně vybranou ze skupiny) můžeme rozměr výplatní matice podstatně zmenšit. Výsledkem je pak redukovaná výplatní bmatice typu  $6 \times 6$  z tab. ... reprezentující normální (strategickou) **hru v redukovaném tvaru**. Hra v redukovaném tvaru se vyznačuje tím, že žádné dva řádky výplatní matice 1. hráče nejsou stejné a stejně tak žádné dva sloupce výplatní matice 2. hráče.

#### Výplatní matice

	b1 = (1,1,1,*,1,1)	b2 = (1,1,1,*,2,*)	b3 = (1,2,1,*,1,1)	b4 = (1,2,1,*,2,*)	b5 = (2,*,*,1,1,1)	b6 = (2,*,*,1,2,*)
a1 = (1,1,1,1,*,*)	1 -1	1 -1	-1 1	-1 1	-1 1	-1 1
a2 = (1,1,1,2,*,*)	1 -1	1 -1	-1 1	-1 1	1 -1	1 -1
a3 = (1,2,*,1,*,*)	-1 1	-1 1	-1 1	-1 1	-1 1	-1 1
a4 = (1,2,*,2,*,*)	-1 1	-1 1	-1 1	-1 1	1 -1	1 -1
a5 = (2,*,*,*,1,1)	-1 1	1 -1	-1 1	1 -1	-1 1	1 -1
a6 = (2,*,*,*,2,1)	1 -1	1 -1	1 -1	1 -1	1 -1	1 -1

Tab. 1.1

#### 1.4 Řešení hry v normálním tvaru

Při pohledu na tab.1.1 nebo (nebo již na obr. 1.1) je zřejmé, že se jedná o antagonistickou hru (hru s nulovým součtem – součet výplat obou hráčů je vždy nulový). Hru můžeme tedy jednodušeji definovat maticí zadanou v tabulce 1.2

	b1	b2	b3	b4	b5	b6
a1	1	1	-1	-1	-1	-1
a2	1	1	-1	-1	1	1
a3	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a4	-1	-1	-1	-1	1	1
a5	-1	1	-1	1	-1	1
a6	1	1	1	1	1	1

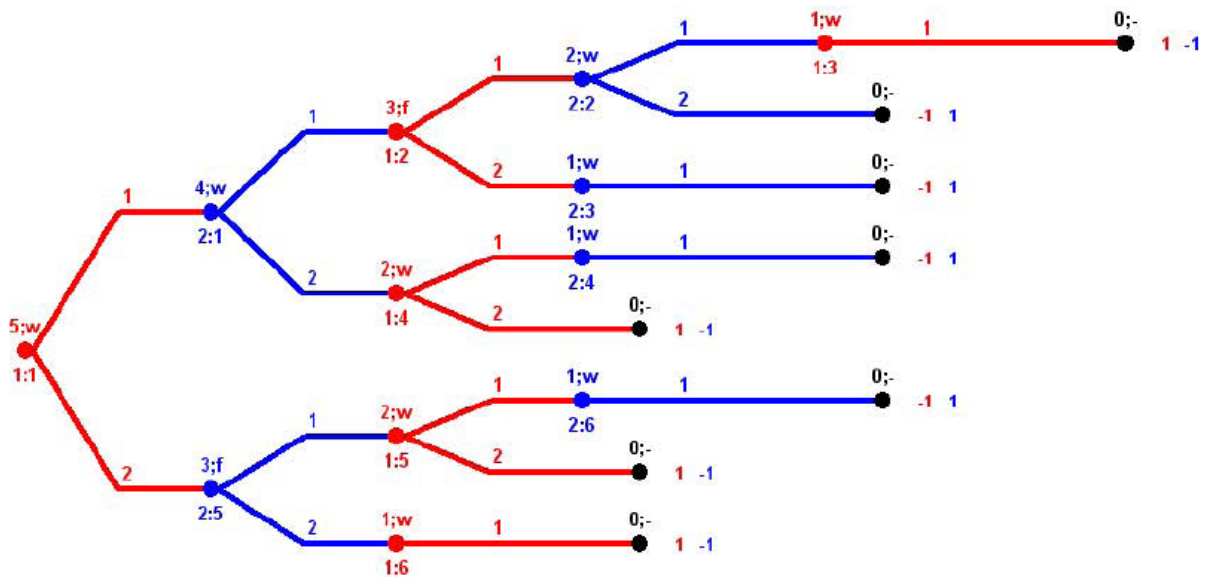
Tab. 1.2

Řešení maticové hry definované tabulkou 1.2 je nasnadě. Strategie a6 1. hráče ostře dominuje všechny jeho ostatní strategie a1, ..., a5. Volí-li 1. hráč tuto strategii (je-li racionální, pak ji volí), potom vždy vyhrává nezávisle na tom, jakou strategii volí 2. hráč. Volí-li 1. hráč jakoukoliv jinou strategii, pak vždy dává 2. hráči příležitost vyhrát. Volí-li 1. hráč strategii a3, pak dokonce 2. hráč nemůže prohrát, byť by se o to i snažil.

Doporučení pro racionálního 1. hráče je: hraj strategii a6 = (2, \*, \*, \*, 2, 1) a výhru máš zaručenu. Doporučení pro racionálního 2. hráče (předpokládajícího racionalitu 1. hráče) je: můžeš-li, nehraj tuto hru; musíš-li, vzdej ji hned na začátku.

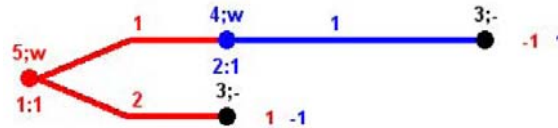
### 1.5 Přímé řešení hry v rozvinutém tvaru

Studovaná hra je natolik jednoduchá a přehledná, že ji lze snadno vyřešit i na bázi jejího prvotního zobrazení v rozvinutém tvaru (tj. bez nutnosti přechodu k normálnímu tvaru). Ukážeme to na obr. 1.2, který je vznikl z obr. 1.1 malým doplněním. Popisky umístěné nad uzly (zobrazujícími pozice hry) sestávají nyní nikoliv z jedné, ale ze dvou položek oddělených středníkem: první položka – stejně tak jako na obr. 1.1 – udává počet předmětů v hromadě a druhá – nová položka je tvořena symbolem vybraným z množiny {w, f, -}. Symbolem w (win) jsou označeny pozice s vlastností: hráč, který je v takto označených pozicích na tahu má zaručenou výhru, bude-li si počínat racionálně. Je-li pozice označená symbolem f (fail), pak to znamená, že hráč, který je v této pozici na tahu, je odsouzen k prohře, bude-li jeho protivník postupovat racionálně. Terminální pozice, v nichž žádný hráč není na tahu, jsou označeny symbolem „-“,



Obr. 1.2

Vysvětlíme nyní postup jak přidělit symboly  $w, f$  neterminálním pozicím grafu hry. Postupujeme přitom z pohledu obr. 1.2 zprava doleva, od listů stromu směrem ke kořenu, zpět od terminálních pozic směrem k počáteční pozici. Je zřejmé, že pozice ve kterých hromada obsahuje 1 nebo 2 předměty jsou vítězné, tj. typu  $w$  (hráč, který je v nich na tahu odebráním 1 nebo 2 předmětů hromadu vyprazdňuje a tedy vyhrává). Je rovněž zřejmé, že pozice ve kterých hromada obsahuje 3 předměty jsou prohrávající, tj. typu  $f$  (hráč, který je v nich na tahu musí volit mezi odebráním 1 nebo 2 předmětů a obě tyto volby uvádějí protivníka do vítězné pozice). Pozice se 3 předměty v hromadě můžeme nyní považovat za nové terminální pozice zjednodušené, ale ekvivalentní hry (viz obr. 1.3): hráč, který do nich vstoupí vyhrává, protože ten kdo by z nich měl pokračovat prohraje. Řešení hry



Obr. 1.3

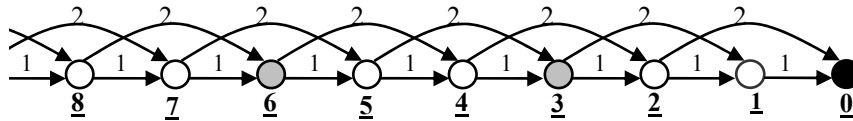
z obr. 1.3 je nasnadě: 1. hráč, který je na tahu v počáteční pozici s 5 předměty odebráním 2 předmětů dosáhne terminální pozici se 3 předměty a tedy vyhrává (nejen hru z obr. 1.3, ale i z obr. 1.2).

Postup, který byl zde na příkladě vysvětlen, se nazývá *zpětnou indukci* (backward induction) a může být použit vždy, je-li hra konečná (graf hry má konečnou množinu uzlů), je s dokonalou (perfect) informací (každá informační množina je tvořena jedinou pozicí) a je s úplnou (complete) informací (ve hře se nevyskytují náhodové tahy). Takovou hrou jsou např. i šachy.

## 1.6. Speciální zobrazení a řešení hry

Uvažovaná odebírací hra (popsaná v odstavci 1.1.) může být formálně popsána a exaktně řešena ještě jednodušeji než bylo ukázáno v odstavci 1.5. Umožňuje to následující speciální vlastnost této hry: stav hry je jednoznačně popsán počtem předmětů v hromadě. V různých pozicích hry se stejným počtem předmětů má každý hráč a nebo i různí hráči vždy naprosto stejné možnosti. Podstromy definované těmito pozicemi jsou z hlediska grafové struktury identické. Tak např. v obr. 1.2 všechny podstromy definované pozicemi 2:2, 1:4, 1:5 (všechny se 2 předměty) mají stejnou strukturu, nebo oba podstromy definované pozicemi 1:2, 2:5 (oba se 3 předměty) mají opět identickou strukturu. Tyto opakující se podstromy, uvnitř stromu zobrazujícího celou hru, reprezentují *podhry dané hry* (subgames), které stačí vyřešit jen jednou.

Vzhledem k výše uvedené speciální vlastnosti lze uvažovanou hru zobrazit jednodušeji a výstižněji orientovaným grafem z obr. 1.4. Uzly grafu reprezentují stavy a jejich popisky počty předmětů, hrany grafu představují tahy a jejich popisky počty odebraných předmětů. Terminální stav je zobrazen kroužkem s černou výplní, prohrávající pozice kroužky s šedou výplní a vyhrávající pozice bez výplně. Hra zobrazená orientovaným grafem (*grafová hra*, graph game) se hraje takto. 1. hráč volí jednu z hran vycházejících z počátečního uzlu (je-li počáteční počet předmětů 5 – jak jsme dosud předpokládali – pak je to uzel označený **5**) a tím určuje následující stav (uzel) ve kterém volí 2. hráč jednu z hran z něho vycházejících, atd. Hráči se střídají tak dlouho až některý z nich „dosáhne“ zvolenou hranou na koncový stav (uzel). Tento hráč je vítězem hry.



Obr. 1.4

Determinovanost výsledku hry počátečním stavem vyplývá z následujících skutečností: 1) z každé vyhrávající pozice lze dosáhnout na prohrávající (nebo terminální) pozici, 2) z žádné prohrávající pozice nelze dosáhnout na prohrávající (nebo terminální) pozici. Neboli: je-li hráč ve vyhrávající pozici, vždy může protivníkovi vnutit prohrávající pozici a je-li hráč v prohrávající pozici, nikdy se ji nezbaví (pokud protivník neudělá chybu). Prohrávající pozice se vyznačují počtem předmětů, který je násobkem tří. Universální rada pro hráče tedy je: vždy odeber tolik předmětů, aby zbylý počet předmětů byl násobkem tří; pokud to nejde hru vzdej.

Způsobem popsáním v tomto odstavci lze zobrazit a řešit mnoho různých variant odebracích a i jiných her. Daleko více her však tímto způsobem zobrazit a řešit nelze, např. šachy (proč?).

### 1.7. Poznámky

- Hru popsanou v odstavci 1.1 (s 5 nebo obecně s  $n$  předměty,  $n \geq 1$ ) lze zobecnit v mnoha směrech:
  - hráči mohou odebírat z hromady i více než dva předměty
  - hromad může být více; hráč, který je na tahu, může odebírat jen z jedné jím zvolené hromady; vítězem je hráč, který odebere poslední předmět - po jeho tahu jsou všechny hromady prázdné
  - hráči nemusí mít stejné možnosti (např. 1.hráč může odebírat 1 nebo 4 předměty a 2.hráč 2 nebo 3 předměty)
  - hráčů může být více než dva
  - hra může být učiněna spravedlivou nebo spravedlivější vložím náhodných tahů (náhodné odebrání předmětů z hromady nebo náhodná volba hráče začínajícího nebo pokračujícího ve hře)
- Hra je nespravedlivá a nezajímavá; její výsledek je určen ještě dříve než se začne hrát (tuto vlastnost mají i šachy, které jsou však tak složité, že racionální strategie a výsledek nejsme schopni určit).
  - Hra může být učiněna spravedlivou, jestliže první tah bude náhodný a s pravděpodobnostmi po  $1/2$  určí za počáteční počet předmětů číslo  $3k$  a s pravděpodobnostmi po  $1/4$  čísla  $3k+1$  a  $3k+2$ , kde  $k \geq 1$ . Hra však zůstává nezajímavou - výsledek prvního a náhodného tahu určí výsledek celé hry.
  - Hra může být učiněna zajímavou (s předem nepředvídatelným výsledkem) jestliže náhodné tahy tzv. 0-tého hráče se budou pravidelně střídát s tahy racionálních hráčů (1., 2. a případně dalších hráčů)
- Porovnání a zhodnocení metod řešení:
  - normalizace a řešení hry v normálním tvaru – tato metoda je v principu použitelná pro všechny konečné hry;
  - řešení hry přímo v rozvinutém tvaru – tato metoda je použitelná jen pro konečné hry s dokonalou a úplnou pamětí

- transformace (zjednodušení) hry v rozvinutém tvaru na jednodušší tvar grafové hry - tato metoda je použitelná na hry u kterých další vývoj nezáleží na minulém průběhu, ale jen na okamžitém stavu
- Lze dokázat, že každá konečná hra s dokonalou informací má vždy řešení (Nashův rovnovážný bod) v ryzích strategiích. Hry tohoto typu jsou tedy v principu snadno řešitelné. Praktickou překážkou však může být rozsáhlost hry (např. šachy).

## 2. Jednoduchá hra typu poker

### 2.1. Popis hry

Jedná se o velmi jednoduchou variantu karetní hry typu poker (Meyerson's card game).

Uvažujme množinu karet, které mohou být rozříděny do dvou stejně početných skupin, např. na červené (Red, typu R) a na černé (Black, typu B). Soubor všech karet je dokonale zamíchán, takže pravděpodobnosti, že karta sejmutá s vrchu hromádky promíchaných karet je typu R nebo B jsou stejné a rovné  $\frac{1}{2}$ . Hru hrají dva hráči, z nichž první hraje na červenou (R-hráč) a druhý na černou (B-hráč). Na začátku hry vloží oba hráči do banku (potu - hrnce) po 1 dolaru. Hru začíná první hráč (R-hráč) zdvihnutím první (vrchní) karty a má dvě možnosti:

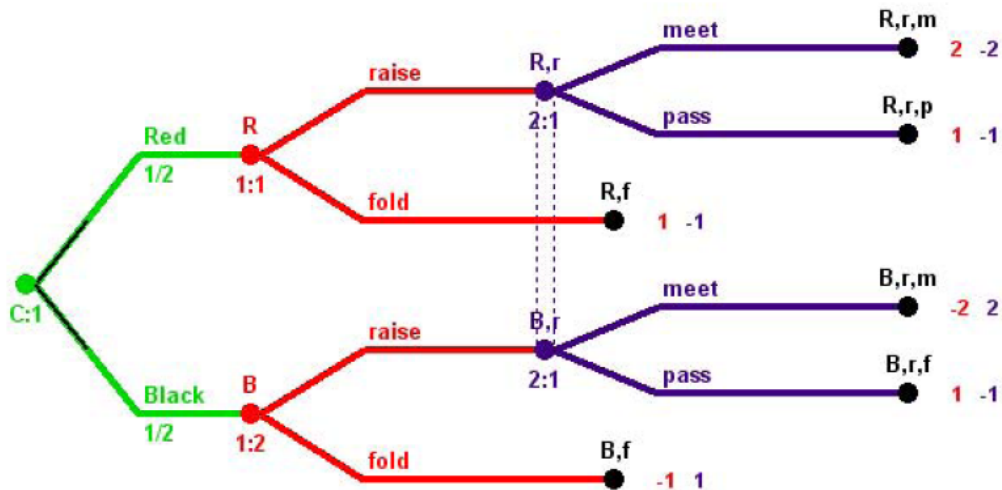
- Alternativa *fold*: hráč zdviženou kartu obrátí (ukáže ji protivníkovi) a tím hra skončí, aniž by se druhý hráč dostal k jakékoliv akci. Je-li karta typu R, vyhrává částku v banku (potu) první hráč (hráč typu R), je-li karta typu B, vyhrává částku v banku (potu) druhý hráč (hráč typu B).
- Alternativa *raise*: zdviženou kartu neukáže protivníkovi, ale navrhne mu zvýšit částku v banku o další dolar, což může udělat beze slov např. tak, že před zraky protivníka do banku tento další dolar vloží.

Zvolil-li 1. hráč alternativu *raise* je na tahu druhý hráč a ten má dvě možnosti:

- Alternativa *meet*: druhý hráč přijme návrh na zvýšení částky a vloží do banku také jeden dolar. Tím hra končí. Karta se odkryje a je-li typu R, vyhrává obsah potu první hráč (hráč typu R), je-li karta typu B, vyhrává obsah potu druhý hráč (hráč typu B).
- Alternativa *pass*: druhý hráč nepřijme návrh na zvýšení částky, což beze slov může dát najevo tak, že odkryje taženou kartu aniž by do potu vložil další dolar. Tím opět hra končí a obsah potu získává první hráč a to bez ohledu na typ (barvu) karty.

### 2.2. Model hry v rozvinutém tvaru

Neformální popis hry z odstavce 2.1. vyjádříme nyní formálně přesně pomocí grafu pozic této hry zobrazeného na obr.2.1. Graf definuje hru v rozvinutém tvaru (efg).



Obr.2.1 Jednoduchý poker – zobrazení hry v rozvinutém tvaru

Jedná se o orientovaný graf typu strom, kde uzly zobrazují herní pozice a hrany vycházející z uzlu zobrazují různé akce, které hráč, jsoucí na tahu v daném uzlu, může provést. Nejlevěji zobrazený uzel, do kterého žádné hrany nevstupují, představuje počáteční pozici, ve které se hra nachází, před tím než začala, tj. před uskutečněním akce v prvním tahu. Nejpravěji zobrazené uzly zobrazují koncové (terminální) pozice, ve kterých se hra nachází po tom když skončila, tj. po uskutečnění posledního tahu.

Zobrazené pozice (uzly) i akce (hrany) jsou na obrázku opatřeny inskripcemi – popiskami. Popisky akcí (nad hranou) jsou jména akcí používaná a vysvětlená již při neformálním popisu hry; pokud jsou akce náhodné, pak jsou uvedeny i pravděpodobnosti jednotlivých akcí (pod hranou). Pozice mají dvě popisky horní a dolní. Horní inskripce obsahuje kód posloupnosti akcí vedoucích z počáteční pozice do dané pozice. Dolní inskripce sestává ze dvou položek oddělených dvojtečkou: první položka identifikuje hráče, který je v dané pozici na tahu (písmeno C /chance/ značí náhodu; přirozené číslo značí pořadové číslo hráče), druhá položka udává pořadové číslo informační množiny hráče, který je v dané pozici na tahu. V terminálních pozicích není žádný hráč již na tahu, údaje uváděné v dolní popisce nejsou definovány a tedy dolní popisky schází. Místo nich jsou v inskripci vpravo vedle terminálních pozic uváděny výplaty hráčů (v našem příkladě 1. a 2. hráče).

Z obr.2.1 je patrné, že hra má celkem 6 možných průběhů zapsaných posloupnostmi akcí v horní inskripci terminálních pozic. Ukážeme jak se počítají výplaty hráčů pro jednotlivé průběhy a jím odpovídajícím výsledkům hry. Uvažujme např. průběh (R,r,m), tj. byla tažena červená karta, 1.hráč zvýšil sázku (přidal další dolar do potu, do kterého již při zahájení hry oba hráči po dolaru vložili) a 2. hráč na zvýšení částky přistoupil (přidal další dolar do potu). Tažená karta byla červená, obsah potu, tj. 4 dolary, bere 1.hráč. Protože oba hráči vložili do potu po dvou dolarech je výplata (zisk) 1.hráče je  $4-2 = 2$  dolary a výplata (ztráta) 2.hráče je  $0-2 = -2$  dolary. V případě průběhu (R,r,p) dospíváme obdobnými úsudky k výsledkům: výplata 1.hráče =  $3-2 = 1$  dolar, výplata 2.hráče =  $0-1 = -1$  dolar. V případě dalších průběhů hry je výpočet výplat obdobný.

1.hráč, když si vezme kartu, tak si ji prohlédne (ví jak dopadl náhodný tah, zda barva karty je R nebo B). Rozhodne-li se pak pro variantu zvýšit částku, pak kartu 2.hráči neukazuje a 2.hráč se rozhoduje o tom, zda také zvýšit částku nebo nepřistoupit na variantu zvýšení, aniž by věděl zda barva tažené karty je R nebo B. Tato skutečnost je na obr.2.1 reflektována tak, že dvě různé pozice do kterých se hra dostane po průběhu (R,r) a (R,f) patří do téže informační množiny (2,1). 2.hráč se rozhoduje na této informační množině; ví, že v jedné z obou pozic je, ale neví v které.



### 2.3. Normalizace hry – transformace hry na normální tvar

Hru v rozvinutém tvaru definovanou v předchozím odstavci grafem z obr.2.1 převedeme nyní do normálního (strategického) tvaru. Musíme definovat množiny strategií obou hráčů a pro všechny možné kombinace strategií 1. a 2.hráče (strategické profily) určit očekávané výplaty obou hráčů. Hra v normálním tvaru může být zadána reálnou bimaticí, ve které řádky odpovídají strategiím 1.hráče, sloupce strategiím 2.hráče a dvojice reálných čísel na průsečících řádků a sloupců udávají očekávané výplaty 1. a 2.hráče při příslušných volbách strategií.

Strategie hráče je funkce, která ke každé informační množině hráče přiřazuje jednu z akcí, kterou hráč na této množině může volit.

Z obr.2.1 je patrné, že 1.hráč má dvě informační množiny 1:1 a 1:2, které můžeme označit také R a B (po tažení červené resp. černé karty). Obě množiny jsou jednoprvkové (každá je tvořena jedinou pozicí). V obou informačních množinách má 1.hráč dvě stejné možnosti: r (raise: neodkrývat kartu, přidat dolar do potu, pokračovat ve hře) nebo f (fold: odkrýt kartu, ukončit hru). Množina A strategií 1.hráče obsahuje tedy 4 následující prvky:

- $a_1 = (r_R, r_B)$  ... pokračovat ve hře nezávisle na tom, jaká karta byla tažena
- $a_2 = (r_R, f_B)$  ... pokračovat ve hře, byla-li tažena červená karta (R karta); jinak hru ukončit
- $a_3 = (f_B, r_R)$  ... pokračovat ve hře, byla-li tažena černá karta (B karta); jinak hru ukončit
- $a_4 = (f_B, f_B)$  ... ukončit hru nezávisle na tom, jaká karta byla tažena

2.hráč má jedinou informační množinu 2:1 tvořenou dvěma pozicemi označenými R,r nebo B,r. Na této informační množině má 2.hráč dvě možnosti: m (meet: přistoupit na zvýšení částky) nebo p (pass: nepřistoupit na zvýšení částky). Množina B strategií 2.hráče obsahuje tedy pouze 2 prvky:

- $b_1 = (m)$  ... přistoupit na zvýšení
- $b_2 = (p)$  ... nepřistoupit na zvýšení

Kartézský součin množin  $A \times B$  je množina všech strategických profilů dané hry. Zbývá vypočítat výplatní bimatici hry

$$(H, G) = (h_{ij}, g_{ij})$$

typu  $4 \times 2$ , kde

$$h_{ij} = h(a_i, b_j), g_{ij} = g(a_i, b_j)$$

jsou výplaty 1. a 2.hráče pro strategický profil  $(a_i, b_j)$ , tj. pro případ, kdy 1.hráč hraje svou  $i$ -tou a 2.hráč svou  $j$ -tou strategií,  $i=1,2,3,4$ ;  $j=1,2$ .

Výplaty  $h_{ij}$ ,  $g_{ij}$  počítáme jako střední hodnoty přes náhodný pokus představovaný prvním tahem, tahem při němž oba možné výsledky (R nebo B, tj. vybrání červené nebo černé karty) mohou nastat se stejnou pravděpodobností  $1/2$ . Následuje výpočet prvků výplatní bimaticy pro jednotlivé strategické profily:

$$\begin{array}{ll}
 (a_1, b_1) = ((r_R, r_B), m): & h_{11} = (1/2) \times (2) + (1/2) \times (-2) = 0 & g_{11} = (1/2) \times (-2) + (1/2) \times (2) = 0 \\
 (a_1, b_2) = ((r_R, r_B), p): & h_{12} = (1/2) \times (1) + (1/2) \times (1) = 1 & g_{12} = (1/2) \times (-1) + (1/2) \times (-1) = -1 \\
 (a_2, b_1) = ((r_R, f_B), m): & h_{21} = (1/2) \times (2) + (1/2) \times (-1) = 1/2 & g_{21} = (1/2) \times (-2) + (1/2) \times (1) = -1/2 \\
 (a_2, b_2) = ((r_R, f_B), p): & h_{22} = (1/2) \times (1) + (1/2) \times (-1) = 0 & g_{22} = (1/2) \times (-1) + (1/2) \times (1) = 0 \\
 (a_3, b_1) = ((f_B, r_B), m): & h_{31} = (1/2) \times (1) + (1/2) \times (-2) = -1/2 & g_{31} = (1/2) \times (-1) + (1/2) \times (2) = 1/2 \\
 (a_3, b_2) = ((f_B, r_B), p): & h_{32} = (1/2) \times (1) + (1/2) \times (1) = 1 & g_{32} = (1/2) \times (-1) + (1/2) \times (-1) = -1 \\
 (a_4, b_1) = ((f_B, f_B), m): & h_{41} = (1/2) \times (1) + (1/2) \times (-1) = 0 & g_{41} = (1/2) \times (-1) + (1/2) \times (1) = 0
 \end{array}$$

$$(a_4, b_2) = ((f_R, f_B), p): \quad h_{42} = (1/2) \times (1) + (1/2) \times (-1) = 0 \quad g_{42} = (1/2) \times (-1) + (1/2) \times (1) = 0$$

Vypočtené výsledky zapíšeme do tvaru bimatice – viz tab.2.1 – získáváme tak reprezentaci hry v normálním (strategické) formě.

bimatice (H,G) = (h <sub>ij</sub> ,g <sub>ij</sub> )		2. hráč	
		b <sub>1</sub> = m	b <sub>2</sub> = p
1. hráč	a <sub>1</sub> = (r <sub>R</sub> , r <sub>B</sub> )	0 0	1 -1
	a <sub>2</sub> = (r <sub>R</sub> , f <sub>B</sub> )	0.5 -0.5	0 0
	a <sub>3</sub> = (f <sub>R</sub> , r <sub>B</sub> )	-0.5 0.5	1 -1
	a <sub>4</sub> = (f <sub>R</sub> , f <sub>B</sub> )	0 0	0 0

Tab. 2.1 Jednoduchý poker – definice hry v normálním tvaru

#### 2.4. Řešení hry v normálním tvaru

Z tab.2.1 je patrné, že se jedná o bimaticeovou hru s nulovým součtem – můžeme ji tedy reprezentovat jako jednodušší hru maticovou – viz tab.2.21.

matice (H) = (h <sub>ij</sub> )		2. hráč	
		b <sub>1</sub> = m	b <sub>2</sub> = p
1. hráč	a <sub>1</sub> = (r <sub>R</sub> , r <sub>B</sub> )	0	1
	a <sub>2</sub> = (r <sub>R</sub> , f <sub>B</sub> )	0.5	0
	a <sub>3</sub> = (f <sub>R</sub> , r <sub>B</sub> )	-0.5	1
	a <sub>4</sub> = (f <sub>R</sub> , f <sub>B</sub> )	0	0

Tab. 2.2 Jednoduchý poker – definice hry v maticovém tvaru

Všimněme si, že strategie a<sub>1</sub> dominuje strategie a<sub>3</sub>, a<sub>4</sub>; tyto strategie nebudou racionálním hráčem nikdy používány a můžeme je proto z dalších úvah vyloučit. Dostáváme tak definici hry v redukovaném maticovém tvaru - tab.2.3.

matice (H) = (h <sub>ij</sub> )		2. hráč	
		b <sub>1</sub> = m	b <sub>2</sub> = p
1. hráč	a <sub>1</sub> = (r <sub>R</sub> , r <sub>B</sub> )	0	1
	a <sub>2</sub> = (r <sub>R</sub> , f <sub>B</sub> )	0.5	0

Tab. 2.3 Jednoduchý poker – definice hry v redukovaném tvaru

Hra nemá sedlový bod a tedy ani řešení v ryzích strategiích; musíme tedy hledat řešení ve smíšených strategiích. Vzhledem k tomu, že redukovaná hra je typu 2×2 stačí použít elementární metodu řešení úlohy prostředky analytické geometrie (viz kap.2 učebních textů). Řešení je zobrazeno na obrázcích 2.2 a 2.3. Na obr.2.2 hledáme optimální (rovnovážnou) smíšenou strategii 1.hráče. V kartézské rovině jsou nakresleny čtyři přímky zobrazující ryzí strategie obou hráčů:

$$1. \text{ hráč:} \quad a_1: x=0; \quad a_2: x=1$$

$$2. \text{ hráč:} \quad b_1: y=.5x; \quad b_2: y=1-x$$

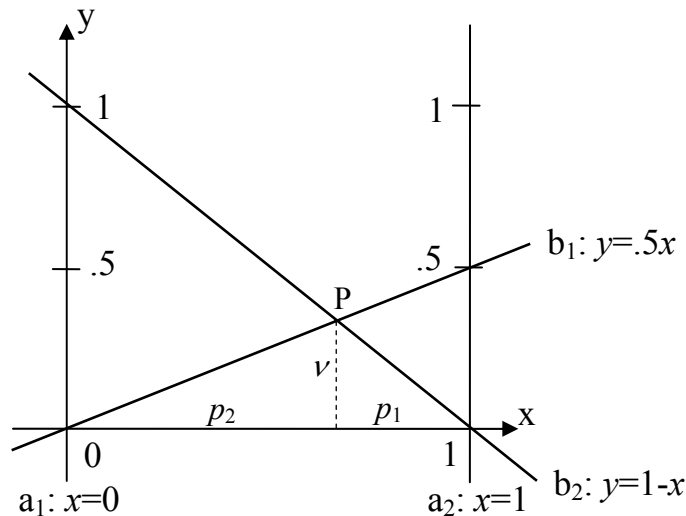
Pořadnice (y-ové souřadnice) průsečíků přímek a<sub>i</sub> a b<sub>j</sub> udávají hodnotu výplatní funkce h<sub>ij</sub> uvedené v tab.2.3. Obr 2.2. je tak jen jiným (analytickým) zobrazením dat z tab. 2.3.

Smíšené strategie 1.hráče jsou dvojice pravděpodobností (p<sub>1</sub>, p<sub>2</sub>), p<sub>1</sub>, p<sub>2</sub> ≥ 0, p<sub>1</sub>+p<sub>2</sub>=1, kde p<sub>1</sub> resp. p<sub>2</sub> je pravděpodobnost se kterou 1.hráč hraje strategii a<sub>1</sub> resp. a<sub>2</sub>. Tyto strategie lze

na obr.2.2 zobrazit přímkami o rovnicích  $x=p_2$ ,  $0 \leq p_2 \leq 1$ , tj. svazkem rovnoběžných přímek rovnoběžných s přímkami  $a_1, a_2$  a ležících v pásu mezi nimi. Speciálně smíšená strategie  $(1,0)$  je totožná s ryzí strategií  $a_1$  a smíšená strategie  $(0,1)$  je totožná s ryzí strategií  $a_2$ . Pro optimální strategii 1.hráče platí:  $p_2$  je  $x$ -ová souřadnice průsečíku P přímek  $b_1$  a  $b_2$  (a tedy  $p_1=1-p_2$ ) a  $y$ -ová souřadnice je cena hry  $v$ . Pohne-li se totiž 1.hráč od své optimální smíšené strategie doleva ( $p_2-\Delta$ ) nebo doprava ( $p_2+\Delta$ ), umožňuje tím 2.hráči snížit výplatu 1.hráče.

V našem konkrétním příkladě řešením soustavy rovnic  $y=.5x$ ,  $y=1-x$  nalezneme souřadnice průsečíku těchto přímek  $x=p_2=2/3$ ,  $y=v=1/3$ . Řešením hry zadané tab.2.3 z pohledu 1.hráče tedy je

$$((p_1, p_2), v) = ((1/3, 2/3), 1/3).$$



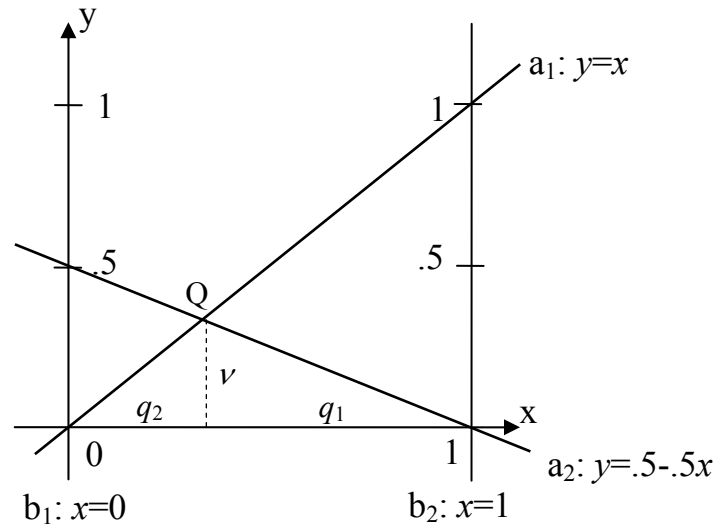
Obr.2.2 – Výpočet smíšené strategie 1.hráče

Řešení z pohledu 2.hráče (hry zadané tabulkou 2.3) získáme obdobným. Pro optimální strategii 2.hráče platí:  $q_2$  je  $x$ -ová souřadnice průsečíku Q přímek  $a_1$  a  $a_2$  (a tedy  $q_1=1-q_2$ ) a  $y$ -ová souřadnice je cena hry  $v$ . Z obr. 2.3 je patrné, že pohne-li se totiž 2.hráč od své optimální smíšené strategie doleva ( $q_2-\Delta$ ) nebo doprava ( $q_2+\Delta$ ), umožňuje tím 1.hráči zvýšit jeho výplatu. Bod Q má souřadnice  $(1/3, 1/3)$  - jak zjistíme řešením rovnic  $y=x$ ,  $y=0.5-0.5x$ . Odtud  $q_2=1/3$ ,  $q_1=2/3$  a  $v=1/3$ . Řešením hry zadané tab.2.3 z pohledu 2.hráče tedy je

$$((q_1, q_2), v) = ((2/3, 1/3), 1/3).$$

Cena hry  $v$  musí vyjít při obou výpočtech stejně, pro 1. hráče znamená výhru, pro 2.hráče prohru. Redukovaná maticová hra má tedy řešení:

$$((p_1, p_2), (q_1, q_2), v) = ((1/3, 2/3), (2/3, 1/3), 1/3).$$



Obr.2.3 – Výpočet smíšené strategie 2.hráče

Řešení hry zadané tabulkou 2.2 (neredukovaná hra včetně dominovaných strategií) lze standardně zapsat takto:

$$((p_1, p_2, p_3, p_4), (q_1, q_2), v) = ((1/3, 2/3, 0, 0), (2/3, 1/3), 1/3)$$

Konečné řešení výchozí hry zadané tabulkou 2.1 (tj. bimaticové hry vzniklé normalizací hry původně zadané v rozvinutém tvaru) má standardní zápis:

$$(((p_1, p_2, p_3, p_4), v_1), ((q_1, q_2), v_2)) = (((1/3, 2/3, 0, 0), 1/3), ((2/3, 1/3), -1/3))$$

Hráči, kteří jsou racionální (a předpokládají také racionalitu svého protivníka) hrají tedy takto:

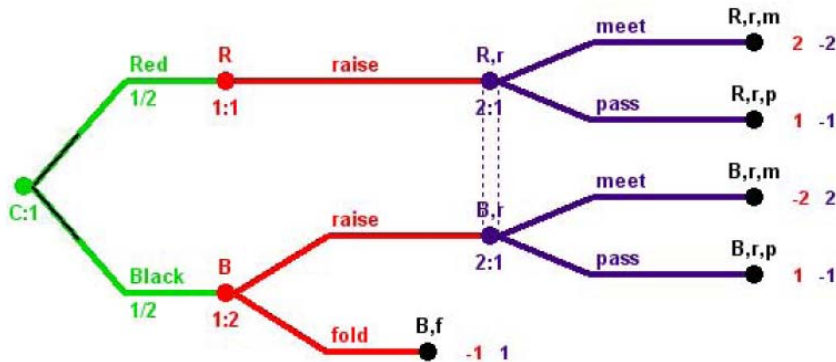
- 1.hráč nikdy nevolí strategie  $a_3 = (f_R, r_B)$ ,  $a_4 = (f_R, f_B)$  a strategie  $a_1 = (r_R, r_B)$ ,  $a_2 = (r_R, f_B)$  volí náhodně v poměru 1:2, tj. s pravděpodobnostmi 1/3 a 2/3. Přeloženo do termínů hry v rozvinutém tvaru to znamená:
  - je-li odebraná karta červená, pak nikdy neukončuje hru (fold), ale vždy zvyšuje sázku (raise)
  - je-li odebraná karta černá, pak s pravděpodobností 1/3 zvyšuje částku (raise) a s pravděpodobností 2/3 ukončuje hru (fold)
- 2.hráč volí své strategie  $b_1 = m$ ,  $b_2 = p$  náhodně v poměru 2:1, tj. s pravděpodobnostmi 2/3 a 1/3. To znamená, že s pravděpodobností 2/3 přistupuje na zvýšení částky (meet) a s pravděpodobností 1/3 na ni nepřistupuje a hru končí (pass).

Vypočtené řešení je rovnovážným (Nashovým) bodem: žádný z hráčů nemůže zvýšit svou výplatu tak, ze se od tohoto řešení odchýlí a druhý na tomto řešení setrvává. Hra je nespravedlivá: střední (očekávaná) hodnota výplaty 1.hráče je 1/3 (výhra) a 2.hráče -1/3 (prohra).

## 2.5. Přímé řešení hry v rozvinutém tvaru

Graf pozic hry na zobrazený na obr.2.1 lze zjednodušit (redukovat). Předpokládejme, že byla tažena červená karta a hra se nachází v pozici označené R. V této pozici je na tahu 1.hráč a má dvě možnosti: r nebo f. Volí-li r, pak hra může skončit v terminálních pozicích (R,r,m) nebo (R,r,p) s výplatami 2 nebo 1 pro 1.hráče. Volí-li f, pak hra skončí

v terminální pozici (R,f) s výplatou 1 pro 1.hráče. Je zřejmé, že volba f (výplata 1) je dominována volbou r (výplata alespoň 1, možná i 2). Racionální hráč alternativu f tedy nikdy volit nebude. Redukovaný graf pozic (po eliminaci alternativy f v pozici R) je zobrazen na obr.2.4.



Obr.2.4 – Redukovaná hra v rozvinutém tvaru

Redukovaná hra (obr.2.4) má z pohledu racionálních hráčů stejné řešení jako původní neredukovaná hra (obr.2.1), její řešení je však snazší, neboť od počátku se pracuje jen se dvěma strategiemi 1.hráče.

Kompletní řešení hry v rozvinutém tvaru (ať již podle obr.2.1 nebo obr.2.4) metodou zpětné indukce (viz odst.1.5 této přílohy) je vzhledem k počátečnímu náhodnému tahu a dvouprvkové informační množině 2.hráče nemožné.