4. Rozhodování za rizika a při více kriteriích

Až dosud jsme se zabývali výhradně hrami s úplnou informací. V této kapitole se budeme stručně zabývat dvěma typy rozhodovacích situací s neúplnou informací:

- rozhodování za situace, kdy výsledek závisí nejenom na volbě racionálního rozhodovatele, ale i na okolnostech, které jsou rozhodovateli známé jen částečně (a nebo vůbec ne),
- rozhodování za situace, kdy usilujeme o dosažení několika cílů současně, přičemž tyto cíle jsou obtížně kvantifikovatelné, obtížně porovnatelné a často i protichůdné.

Prvý typ rozhodovací situace budeme modelovat pomocí speciálního typu hry dvou hráčů: jednoho motivovaného (a racionálního) rozhodovatele a a druhého nemotivovaného (indiferentního) hráče, kterému na výsledku hry nezáleží. Hry tohoto druhu se většinou označují jako ***hry proti přírodě***.

U druhého typu rozhodovacích situací jde o nalezení preferenčního systému nebo užitkové funkce pro rozhodovatele, který hledá optimální kompromis při sledování celého komplexu cílů. Zavedení preferenčního systému nebo užitkové funkce na množině výsledků rozhodovací situace je nezbytné pro to, aby rozhodovatel mohl jednat jako racionální subjekt v složitějších rozhodovacích situacích (např. jako racionální hráč ve hrách různých druhů).

4.1. Hry proti přírodě

Definice 4.1.1:

(Konečná) hra proti přírodě je speciálním případem hry v normálním tvaru (viz def. 1.1.2)

$$<I,\{A_i\colon i\in I\},\{H_i\colon i\in I\}>,$$

kde $I=\{1,2\}$, $A_1=X=\{x_1,x_2,...,x_m\}$, $A_2=Y=\{y_1,y_2,...,y_n\}$, $H_1=H=(h_{ij})$ je matice typu $m\times n$ a matice H_2 není definována. Hráč 1 je motivovaný racionální hráč s množinou strategií (voleb) X a výplatní maticí H, hráč 2 je indiferentní hráč ("příroda") s množinou strategií Y ("stavy" přírody) a bez výplat.

Jestliže příroda "volí" své stavy v souladu se známým pravděpodobnostním rozdělením

$$\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,...,q_n),\ \ \sum q_j=1,\ \ q_j\le 1,$$

kde q_j=Prob($y=y_j$), pak rozhodování 1. hráče nazýváme ***rozhodováním za rizika*** a jestliže takové rozdělení neexistuje a nebo není o něm nic známo, pak rozhodování 1. hráče nazýváme ***rozhodováním za neurčitosti***.

Poznámky 4.1.1:

1. Úloha rozhodování za rizika je plně zadána maticí $\boldsymbol{H}$ a vektorem $\boldsymbol{q}$, úloha rozhodování za neurčitosti je plně popsána maticí $\boldsymbol{H}$.
2. Řešení hry proti proti přírodě můžeme vždy zjednodušit (a to jak při rozhodování za rizika, tak při rozhodování za neurčitosti) vyloučením dominovaných strategií 1.hráče, pokud tyto existují. Připomeňme, že strategie $x_i\in X$ je ***dominována*** strategií $x_k\in X$, jestliže platí
$$(\forall j)\ [h_{ij}\le h_{kj}]\ .$$
3. Každá volba rozhodovatele představuje ***loterii*** na množině výsledků Y a v odpovídajícím řádku matice H jsou uvedeny výhry příslušející různým výsledkům z Y (a nebo i prohry při záporných hodnotách prvků v řádku). Při rozhodování za rizika nebo neurčitosti jde o to zvolit z množiny loterii X nabízených danou hrou tu nejlepší.

Rozhodování za rizika

Normativní řešení této úlohy je velmi jednoduché: za optimální volbu rozhodovatele považujeme tu volbu (tj. strategii neboli odpovídající řádek matice $\boldsymbol{H}$), která maximalizuje střední (očekávánou) hodnotu výplaty. Řádek i^*, odpovídající optimální strategii, splňuje podmínku

$$\max_i\{\ \textstyle\sum_j h_{ij}\,q_j\ \}=\ \textstyle\sum_j h_{i*,j}\,q_j$$

neboli, stručněji zapsáno,

$$i^* = \arg\max_i \sum_j h_{ij}\, q_j \; .$$

Příklad 4.1.1 (sázky):

Rozhodněte, která ze dvou sázek (loterií), definovaných výplatní maticí v silně zarámované části tabulk y 4.1.1, je pro sázejícího výhodnější.

	prohra	výhra			střední hodnota výhry
		malá	prostřední	velká	
	p_0=0.9	p_1=0.09	p_2=0.009	p_3=0.001	
sázka A	-10	50	200	1000	-1.7
sázka B	-10	10	200	5000	-1.3
obecná sáz.	$v_0=-c$	v_1	v_2	v_3	$\sum_i p_i.v_i$

Tab. 4.1.1

Prohru chápejme jako zápornou výhru jejíž velikost je rovna ceně sázenky c, tj. $v_0=-c$. Potom očekávaná (střední) hodnota výhry je

$$\sum p_i.v_i = p_0.v_0 + p_1.v_1 + p_2.v_2 + p_3.v_3 \, .$$

Výsledky výpočtu pro varianty A, B jsou uvedeny v posledním sloupci tabulky. Větší střední hodnotu výhry (menší střední hodnotu prohry) má varianta B, obě varianty jsou však pro sázkaře ve střední hodnotě ztrátové. Racionální rozhodovatel řídící se kriteriem střední hodnoty - může-li - odmítne obě varianty sázky, musí-li však sázet, pak volí variantu B.

Příklad 4.1.2 (výstupní kontrola):

Výrobce má rozhodnout mezi dvěma alternativami:

a) neprovádět výstupní kontrolu výrobků (vadné výrobky odhaluje až zákazník a jejich oprava se řeší v reklamačním řízení),

b) před expedicí výrobků provádět výstupní kontrolu (výrobky se zjištěnými vadami se opravují a pak teprve zařazují do expedice).

Jsou známy hodnoty následujících parametrů (všechny parametry mají kladnou hodnotu):

q ... podíl vadných výrobků z celkové produkce (100.q ... procento vadných výrobků),

α ... zisk za jeden prodaný dobrý výrobek,

β ... průměrné náklady spojené s provedením jedné záruční opravy,

γ ... průměrné náklady spojené s výstupní kontrolou jednoho výrobku,

δ ... průměrné náklady spojené s opravou jednoho vadného výrobku před expedicí, $\delta < \beta$.

Rozhodovací problém výrobce lze formulovat jako problém nalezení řešení hry proti přírodě s výplatní maticí $\boldsymbol{H}$ a vektorem $\boldsymbol{p}=(1-q,\, q)$ zadanými v tučně zarámovaných částech následující tabulky 4.1.1.

		dobrý výrobek	vadný výrobek	střední zisk na jeden
		$1-q$	q	vyrobený výrobek
bez výstupní kontroly	a	α	$\alpha - \beta$	$K_a = (1-q).\alpha \;+\; q.(\alpha-\beta)$
s výstupní kontrolou	b	$\alpha - \gamma$	$\alpha - \gamma - \delta$	$K_b = (1-q).(\alpha - \gamma) + q.(\alpha - \gamma - \delta)$

Tab. 4.1.2

Je zřejmé, že výrobci se nevyplatí provádět výstupni kontrolu jestliže $K_a > K_b$ a výstupní kontrola se m u vyplatí jestliže $K_a < K_b$. Dosadíme-li do posledního vztahu z tab. 4.1.2 dostáváme

$$(1-q).\alpha \;+\; q.(\alpha-\beta) \;<\; (1-q).(\alpha - \gamma) + q.(\alpha - \gamma - \delta)$$

a po úpravách

$$q.(\beta\text{-}\delta) > \gamma.$$

Vzhledem k tomu, že $\beta\text{-}\delta > 0$, můžeme podmínku efektivnosti výstupní kontroly zapsat v názornějším tvaru

$$q > \gamma/(\beta\text{-}\delta).$$

Všimněme si, že v podmínce ekonomické efektivnosti výstupní kontroly nevystupuje veličina α, tj. rozhodnutí o zavedení výstupní kontroly nezávisí na výši zisku za prodaný výrobek.

Poznámky 4.1.2:

1. O racionálním rozhodovateli předpokládáme, že se řídí kriteriem maximalizace střední hodnoty užitkové (výplatní) funkce, tj. ze všech alternativ, které má k dispozici volí tu, při které očekávaná (střední) hodnota výplaty (zisku) je nejvyšší. V mnoha případech se však lidé tímto principem neřídí a to jak z důvodů iracionálních (např. sázení na náhodu v sázkových kancelářích přesto, že střední hodnota výhry je vždy záporná), tak i zdůvodů racionálních (např. pojištění různých druhů - přesto, že ve střední hodnotě je každé pojištění prodělečné).
2. Deskriptivní teorie rozhodování se snaží nalézt a zdůvodnit kriteria jímiž se lidé, rozhodující se v rizikových situacích, skutečně řídí. Tímto problémem se poprvé zabýval N. a D.Bernoulliovi v prvé polovině 18. století v době jejich pobytu v Petrohradě. N. Bernoulli formuloval příklad rozhodovací situace v níž se lidé evidentně neřídí principem střední hodnoty (tento příklad vešel do literatury jako tzv. ***Petrohradský paradox***) a a D.Bernoulli navrhl teorii, která jejich chování vysvětluje - viz následující příklad 4.1.3.

Příklad 4.1.3 (St. Petersburg Paradox):

Zadání hry (rozhodovací situace):

Hra spočívá v tom, že hráč opakovaně vrhá minci tak dlouho dokud poprvé nepadne "hlava" (=líc mince). Jestliže se "hlava" poprvé objeví v n-tém hodu, pak hráč vyhrává 2^n (rublů) a hra končí.
Rozhodovatel musí volit jednu z následujících možností:

a) Hrát výše popsanou hru.
b) Vzdát se hraní popsané hry s tím, že za vzdání se práva hrát tuto hru dostane vyplacenu jakoukoliv jím požadovanou částku (konečnou) .

Otázky zní:

1. Jakou z alternativ a), b) volí reální rozhodovatelé?
2. Jaká je cena práva zahrát si jednu partii výše popsané hry? Kolik jsou ochotni reální rozhodovatelé zaplatit za možnost hrát jednu partii této hry?

Řešení hry reálnými rozhodovateli:

Empirické výzkumy ukazují, že reální rozhodovatelé volí vždy alternativu b) a za jednu partii jsou ochotni zaplatit částku v rozmezí 2 - 40 (rublů).

Reální rozhodovatelé jednají v rozporu s kriteriem střední hodnoty a tedy z pohledu klasické teorie iracionálně. Střední hodnota výhry popsané hry je totiž

$$(1/2)\cdot 2 + (1/4).2^2 + (1/8).2^3 + ... = \sum_{i=1..\infty} (1/2)^i.2^i = 1 + 1 + 1 + ... = \infty$$

a tedy žádná jakkoliv vysoká konečná částka nemůže převýšit nekonečnou očekávanou hodnotu. Z pohledu střední hodnoty je tedy rozumné volit alternativu a) a hru hrát. Teoreticky spravedlivá cena hry je ∞, ale žádný rozhodovatel z reálného světa nebude chtít (a ani nemůže) tuto cenu zaplatit.

Teoretické vysvětlení (D.Bernoulli):

D.Bernoulli přišel s následujícími dvěmi revolučními idejemi:

(i) Užitková funkce u, kterou ve skutečnosti užívají lidé při praktickém rozhodování, nezávisí na bohatství w (vyjadřeném např. peněžní částkou) lineárně; tato funkce je sice rostoucí, ale rychlost jejího růstu postupně klesá (diminishing marginal utility). Vyjádřeno matematicky, pro derivace funkce $u(w)$ platí:

$$u'(w)>0, \ u''(w)<0.$$

Dále předpokládáme $u(0)=0$, $\lim_{w\to\infty} u(w) < \infty$.

(ii) Lidé (reální rozhodovatelé) vyhodnocují riskantní (náhodné) výsledky nikoliv podle očekávané střední hodnoty, ale podle užitkové funkce s vlastnostmi podle bodu (i).

S užitím Bernoulliho užitkové funkce je cena výše popsané hry

$$(1/2)\cdot 2 + (1/4).u(2^2) + (1/8).u(2^3) + ... = \sum_{i=1..\infty} (1/2)^i.u(2^i) = ... < \infty$$

konečná, díky stále se zmenšujícímu přírůstku užitku s lineárně rostoucí finanční částkou.

Konkrétní tvar užitkové funkce odvodil D.Bernoulli z předpokladu, že přírůstek užitku $\Delta u(w)$, připadající na přírůstek peněz Δw, je nepřímo úměrný částce w, tj.

$$\Delta u(w)/\Delta w = a./w, \quad a>0.$$

Limitním přechodem $\Delta w \to 0$ získáváme diferenciální rovnici $u'(w) = a/w$. Jejím řešením dostáváme užitkovou funkci ve tvaru

$$u(w) = a.\ln(w) + c \ .$$

Pro integrační konstantu platí $u(1)=c$, čili integrační konstanta má význam hodnoty užitku z jednotkové finanční částky. Definujeme-li $u(1)=1$, pak je také $c=1$. Konstanta a může být pro různé rozhodovatele a různé rozhodovací situace různá. Předpokládáme-li navíc $a=1$, pak $u(w)=\ln(w)+1$ a $u(e)=\ln(e)+1=2$, což znamená, že užitek z finanční částky e = 2.718 je roven 2.

S použitím odvozeného tvaru užitkové funkce dostáváme pro střední hodnotu Bernoulliho užitku výše uvažované hry

$$\sum_{i=1..\infty} (1/2)^i.u(2^i) = \sum_{i=1..\infty} (1/2)^i.(a.\ln 2^i + c) = ... = 2a.\ln 2 + c \ .$$

Volíme-li speciálně $c=1$ (užitek z jednotkové částky je roven 1) a $a=1$ (užitek z částky e $\cong$ 2.718 je roven 2), pak střední hodnota Bernoulliho užitku hry je

$$\sum_{i=1..\infty} (1/2)^i.(\ln 2^i+1) = ... = 2.\ln 2 + 1 \cong 2.386.$$

Podle Bernoulliho teorie je spravedlivá cena, pro získání možnosti zahrát si jednu partii uvažované hry, částka w pro kterou platí $u(w)=\ln(w)+1 = 2.\ln 2 + 1 \cong 2.386$. Odtud plyne podmínka $\ln(w) = 2.\ln 2$ a odtud dále $w=4$.

Rozhodování za neurčitosti

Rozhodování za neurčitosti je podstatně obtížnější než rozhodování za rizika. Neexistuje zde žádné exaktně zdůvodnitelné rozhodovací kriterium. K dispozici je několik kriterií (definic optimality) mezi kterými vybíráme podle intuice a s ohledem na konkrétní obsah rozhodovací úlohy (např. podle míry závažnosti důsledků nesprávného rozhodnutí).

1. ***Leibniz - Bernoulliho kriterium***:

   Toto kriterium vychází z principu nedostatečné evidence: když neznáme nic o pravděpodobnostech stavů přírody, pak není žádný důvod předpokládat, že některý stav je více pravděpodobný než jiný. Předpokládáme tedy, že všechny stavy jsou stejně pravděpodobné.

   $$i^* = \arg\max_i \textstyle\sum_j h_{ij} .1/n = \arg\max_i (1/n \sum_j h_{ij}) = \arg 1/n.(\max_i \sum_j h_{ij}) = \arg\max_i \sum_j h_{ij} \ .$$

2. *Maximinové (pesimistické) kriterium*:

   Rozhodovatel volí takovou strategii při které minimum výplaty vzhledem k stavům přírody je maximální. Rozhodovatel tedy předpokládá, že příroda se bude "snažit" jej co nejvíce poškodit. Toto kriterium vyhovuje pesimisticky založenému rozhodovateli.

   $$i^* = \arg\max_i \min_j h_{ij} \ .$$

3. ***Maximaxové (optimistické) kriterium***:

   Rozhodovatel volí takovou strategii při které je maximum výplaty (vzhledem k stavům přírody) je maximální. Rozhodovatel tedy předpokládá, že příroda se bude "snažit" co nejvíce mu pomoci. Toto kriterium vyhovuje optimisticky založenému rozhodovateli.

   $$i^* = \arg\max_i \max_j h_{ij} \ .$$

4. ***Hurwiczovo (smíšené) kriterium***:

   Rozhodování podle maximinového kriteria bývá většinou nepřijatelně opatrné a podle maximaxového naopak nepřijatelně důvěřivé. Hurwitzovo kriterium je konvexní kombinací obou těchto kriterií a volbou hodnoty parametru umožňuje nastavit vhodný kompromis mezi oběma krajnostmi.

   $$i^* = \arg\max_i (\lambda.\max_j h_{ij} + (1-\lambda).\min_j h_{ij}) =$$

$= \arg(\lambda.\max_i \max_j h_{ij} + (1\text{-}\lambda).\max_i \min_j h_{ij})$,

kde $\lambda \in <0;\ 1>$ je parametr vyjadřující míru optimismu, je-li λ=0 přechází Hurwitzovo kriterium v pesimistické (maximinové) a je-li λ=1 přechází v optimistické (maximaxové) kriterium.

5. ***Savageovo kriterium (maximinové kriterium ztrát)***:

Rozhodovatel volí takovou strategii, která minimalizuje ztrátu oproti výplatě při strategii, kterou by rozhodovatel volil, kdyby před volbou své strategie znal stav přírody. Použití této strategie chrání rozhodovatele před kritikou těch, kteří jsou "po bitvě generály". Určení optimální strategie podle tohoto kriteria probíhá ve dvou krocích: 1) na základě výplatní matice $H=(h_{ij})$ vypočítáme matici ztrát $Z=(z_{ij})$, 2) na matici ztrát aplikujeme maximinové kriterium (ve výše uvedeném maximinovém kriteriu nahradíme výplaty h_{ij} ztrátami z_{ij}).

$$z_{ij} = h_{ij} - \max_i h_{ij} ,$$
$$i^* = \arg \max_i \min_j z_{ij} .$$

Příklad 4.1.3:

Uvažujme úlohu rozhodování za neurčitosti s výplatní maticí ***H*** zapsanou v tučně zarámované části tabulky 4.1.3. Úlohu budeme řešit pro všechna výše uvedená alternativní kriteria. Řešení pro Leibn.-Bernoulliho a Hurwiczovo kriterium je provedeno přímo v tabulce 4.1.3 (pesimistické a optimistické kriterium je zařazeno jako speciální případ Hurwiczova kriteria), řešení pro Savageovo kriterium je provedeno v tabulce 4.1.4. V levé části této tabulky je zopakována výplatní matice (jen pro nedominované strategie), v pravé části je tato matice transformována na ztrátovou matici a v posledním sloupci je na matici ztrát aplikováno maximinové (pesimistické) kriterium.

Z obou tabulek je patrno, že strategie x_5 je optimální z hlediska všech uvažovaných krierií a tedy o volbě rozhodovatele není pochyb. Z pohledu maximinového kriteria je optimální také strategie x_3. Poznamenejme ještě, že u většiny reálných úloh není volba žádné strategie optimální podle všech kriterií.

				Leibniz-	Hurwicz			dominující
	y_1	y_2	y_3	Bernoul.	pes.,λ=0	opt.,λ=1	λ=0.5	strategie
x_1	5	3	4	4	3	5	4	$\{x_3,x_5\}$
x_2	2	4	7	4.33	2	7	4.5	$\emptyset$
x_3	7	4	5	5.33	**4**	7	5.5	$\emptyset$
x_4	3	6	4	4.33	3	6	4.5	$\{x_5\}$
x_5	5	8	4	**5.67**	**4**	**8**	**6**	$\emptyset$

Tab. 4.1.3

	H			*Z*			pes.
x_2	2	4	7	-5	-4	0	-5
x_3	7	4	5	0	-4	-2	-4
x_5	5	8	4	-2	0	-3	**-3**

Tab. 4.1.4

Příklad 4.1.4 (výstupní kontrola - pokračování příkladu 4.1.2):

V tomto příkladě řešíme stejnou úlohu jako v příkladě 4.1.2, pouze s tím rozdílem, že nemáme představu o podílu vadných výrobku na celkové produkci, tj. v případě, kdy není dostupná žádná informace o hodnotě parametru q.

- Podle Leibniz-Bernouliho kriteria předpokládáme $q = 1\text{-}q = 1/2$. Potom
$$K_a = \alpha - \beta/2,\ \ K_b = \alpha\text{-}\gamma\text{-}\delta/2$$
a podmínka $K_a < K_b$ efektivnosti zavedení výstupní kontroly má tvar
$$(\beta\text{-}\delta)/2 > \gamma .$$
- Použijeme-li maximinové (pesimistické, opatrné) kriterium, jest
$$K_a = \min\{\alpha, \alpha\text{-}\beta\} = \alpha\text{-}\beta,\ \ K_b = \min\{\alpha\text{-}\gamma, \alpha\text{-}\gamma\text{-}\delta\} = \alpha\text{-}\gamma\text{-}\delta$$
a podmínka $K_a < K_b$ efektivnosti zavedení výstupní kontroly má tvar

$$(\beta-\delta) > \gamma .$$

- Použijeme-li maximaxové (optimistické, důvěřivé) kriterium, jest

$$K_a = \max\{\alpha, \alpha-\beta\} = \alpha, \quad K_b = \max\{\alpha-\gamma, \alpha-\gamma-\delta\} = \alpha-\gamma$$

a podmínka $K_a < K_b$ efektivnosti zavedení výstupní kontroly má tvar

$$0 > \gamma .$$

Tato podmínka není nikdy splněna, což znamená, že důvěřivý, optimistický rozhodovatel nebude v žádném případě (při žádných hodnotách parametrů α, β, γ, δ) výstupní kontrolu zavádět.

- V případě použití obecného Hurwiczova kriteria s parametrem optimismu λ dostáváme

$$K_a = \lambda.\alpha + (1-\lambda).(\alpha-\beta), \quad K_b = \lambda.(\alpha-\gamma) + (1-\lambda).(\alpha-\gamma-\delta)$$

a podmínka $K_a < K_b$ efektivnosti provádění výstupní kontroly má tvar

$$(1-\lambda).(\beta-\delta) > \gamma .$$

Všimněme si, že poslední podmínka zahrnuje v sobě předchozí dvě podmínky, volime-li speciálně $\lambda=0$ a $\lambda=1$.

4.2. Multikriteriální rozhodování

Definice 4.2.1:

Model vícekriteriálního (multikriterálního) rozhodování je trojice $<X,Y,Z>$, kde X je ***množina alternativ*** (variant), Y je ***množina kriterií*** a Z je zobrazení $X \times Y \rightarrow R$, kde R je množina reálných čísel. Funkci Z, přiřazující ke každé alternativě $x \in X$ a ke každému kriteriu $y \in Y$ hodnotu tohoto kriteria pro tuto alternativu, nazýváme ***kriteriální funkcí***.

Jsou-li množina alternativ i množina kriterií konečné, tj. je-li $X=\{x_1,x_2,...,x_r\}$, $Y=\{y_1,y_2,...,y_s\}$, pak zobrazení Z můžeme zadat maticí $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ typu $r \times s$, kde $z_{ij} = Z(x_i,y_j)$. Matici $\mathbf{Z}$ nazýváme ***kriteriální maticí***; tat o matice jednoznačně zadává konečný model vícekriteriálního rozhodování: množinou alternativje množina řádků, množinou kriterií je množina sloupců a prvek z_{ij} na průsečíku i-tého řádku a j-tého sloupce udává hodnotu j-tého kriteria pro i-tou alternativu - viz tabulka 4.2.1 .

Každý sloupec kriteriální matice reprezentuje jisté kriterium pro hodnocení alternativ a hodnoty prvků v každém sloupci představují jistou užitkovou funkci definovanou na množině alternativ. ***Úlohou vícekriteriáln ího rozhodování*** je převést systém všech dílčích kriterií na jedno souhrnné kriterium, neboli převést systém všec h dílčích užitkových funkci na jednu souhrnnou užitkovou funkci.

	y_1	y_2	....	y_s
x_1	z_{11}	z_{12}	....	z_{1s}
x_2	z_{21}	z_{22}	....	z_{2s}
....	....	....	....	....
x_r	z_{r1}	z_{r2}	....	z_{rs}

Tab. 4.2.1

Poznámky 4.2.1:

1. Bez újmy na obecnosti budeme vždy předpokládat, že optimalizace znamená maximalizaci, tj. že všechna kriteria $y \in Y$ mají být maximalizována. Pokud by reálná interpretace problému vyžadovala některé kriterium y minimalizovat, přejdeme k ekvivalentnímu kriteriu $k.y+q$, $k<0$, které vyjadřuje totéž jako původní kriterium až na to, že minimalizace se změní na maximalizaci.
2. Model vícekriterálního rozhodování lze zjednodušit vyloučením dominovaných alternativ (řádků) v kriteriál ní matici. Alternativa x_i ***dominuje alternativu*** x_k, jestliže je lepší z pohledu všech kriterií (***silná dominance***), tj. jestliže $(\forall j)[z_{ij} > z_{kj}]$. Jestliže platí $(\forall j)[z_{ij} \geq z_{kj}] \wedge (\exists j)[z_{ij} > z_{kj}]$, pak hovoříme o ***slabé dominanc***i nebo prostě o dominanci.
3. U modelů vicekriteriálního rozhodování s nekonečnou množinou alternativ je alternativa $x \in X$ popsána zpravidla vektorem hodnot reálných parametrů $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_u)$, přičemž množina těchto vektorů může být navíc omezena systémem podmínek (nejčastěji ve tvaru nerovností). Kriteria jsou pak reálnými funkcemi těchto parametrů

$$y_1=f_1(\xi_1,\xi_2,...,\xi_u), \quad y_2=f_2(\xi_1,\xi_2,...,\xi_u), \quad ... \quad , y_s=f_s(\xi_1,\xi_2,...,\xi_u).$$

Tyto modely jsou identické s modely vícekriteriálního matematického programování.

4. Metody vícekriteriální optimalizace můžeme rozdělit do dvou skupin:
   - převod na ***skalární optimalizaci***
     - metoda váhové kriteriální funkce
     - lexikografická metoda
     - maximinová metoda
   - ***vektorová optimalizace*** ("pravá" vícekriteriálni optimalizace)

Skalární optimalizace

Jsou-li všechna kriteria vyjadřená veličinami téhož typu (lze je tedy převést na vyjádření ve stejných jednotkách) a nebo dokážeme-li kvantifikovat relativní významnost jednotlivých kriterií, pak nejvhodnější metodou konstrukce souhrnného kriteria je metoda v***áhové kriteriální funkce***. Místo množiny kriterií $Y=\{y_1,y_2,...,y_s\}$ pracujeme pak s jediným kriteriem

$$y = k_1y_1 + k_2y_2 + ... + k_sy_s ,$$

kde k_j jsou tzv. váhové koeficienty (váhy) splňující podmínky

$$\sum_{j=1..s} k_j = 1, \; k_j \geq 0 .$$

Jsou-li relativní závažnosti kriterií $y_1,y_2,...,y_s$ v poměru $m_1:m_2: ... :m_s$, pak pro váhové koeficienty platí

$$k_i = m_i / \sum_{j=1..s} m_j \; , \; i = 1,2,...,s .$$

Předpokládejme nyní, že kriteria $y_1,y_2,...,y_s$ jsou uspořádána podle své závažnosti, tj. $m_1>m_2> ... >m_s$ a že závažnosti kriterií se řádově liší, tj. m_1 je řádově větší než m_2 , m_2 je řádově větší než m_3 , ... , m_{s-1} je řádově větší než m_s. V tomto speciálním případě můžeme převést vícekriteriální optimalizaci na posloupnost jednokriteriálních optimalizací. V prvém kroku optimalizujeme podle prvého kriteria: existuje-li jen jedna optimální alternativa pak celá optimalizace skončila, je-li optimálních alternativ více (všechny mají stejnou hodnotu kriteria), pak všechny postupují do druhého kroku, ve kterém optimalizujeme podle druhého kriteria. Výsledek optimalizace v druhém kroku ošetřujeme stejným způsobem jako v prvém. Tak postupujeme od kriteria ke kriteriu tak dlouho, dokud nám nezbude jediná alternativa a nebo dokud jsme neprošli všechna kriteria. Tato metoda, připomínající vyhledávání podle abecedy, se nazývá ***lexikografická***.

Při ***maximinové optimalizaci*** aplikujeme na kriteriální matici maximinové kriterium (podobně jako jsme aplikovali toto kriterium na výplatní matici při rozhodování v podmínkách neurčitosti). Tato metoda je vhodná jen ve velmi speciálních situacích, kdy nám záleží na tom, aby žádné z kriterií nedosahovalo extrémně nízkých hodnot.

Vektorová optimalizace

Použití metod vektorové optimalizace je nezbytné tehdy, když kriteria jsou navzájem nesouměřitelná (jsou vyjádřena veličinami různých typů) a když nejsme schopni kvalifikovaně posoudit relativní závažnost kriterií.

Prvým krokem je ***normalizace kriteriální matice***, při které se vypořádáváme s růzností typů veličin vyjadřujících jednotlivá kriteria. Východiskem je tabulka 4.2.2, vzniklá z tabulky 4.2.1 rozšířením o dvě fiktivní (hypotetické) alternativy

$$\boldsymbol{d} = (d_1,d_2,...,d_s), \quad d_j = \min_j \{z_{ij}\},$$
$$\boldsymbol{h} = (h_1,h_2,...,h_s), \quad h_j = \max_j \{z_{ij}\}.$$

Alternativa $\boldsymbol{d}$ ("dolní", *bazální alternativa*) je infimum a alternativa $\boldsymbol{h}$ ("horní", *ideální alternativa*) je supremum množiny všech reálných alternativ $\{x_1,x_2,...,x_r\}$. Vektor $(d_1,d_2,...,d_s)$ je tvořen nejhoršími možnými hodnotami je dnotlivých kriterií a vektor $(h_1,h_2,...,h_s)$ je tvořen jejich nejlepšími možnými hodnotami.

	y_1	y_2	....	y_s
x_1	z_{11}	z_{12}	....	z_{1s}
x_2	z_{21}	z_{22}	....	z_{2s}
....	....	....	....	....
x_r	z_{r1}	z_{r2}	....	z_{rs}
$\boldsymbol{d}$	d_1	d_2	....	d_s
$\boldsymbol{h}$	h_1	h_2	....	h_s

Tab. 4.2.2

Nyní přejdeme od původní kriteriální matice (z_{ij}) k nové normalizované matici (η_{ij}) - viz tab. 4.2.3 - pomocí transformace

$$\eta_{ij} = (z_{ij} - d_j)/(h_j - d_j), \quad i=1,2,...,r, \quad j=1,2,...,s.$$

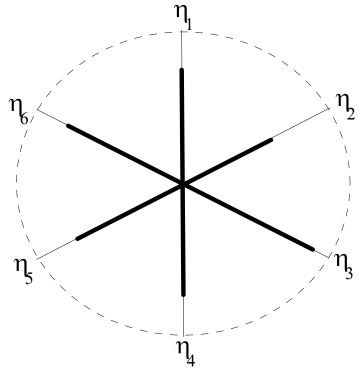
	y_1	y_2	....	y_s
x_1	η_{11}	η_{12}	....	η_{1s}
x_2	η_{21}	η_{22}	....	η_{2s}
....	....	....	....	....
x_r	η_{r1}	η_{r2}	....	η_{rs}
$\boldsymbol{d}$**=0**	0	0	....	0
$\boldsymbol{h}$**=1**	1	1	....	1

Tab. 4.2.3

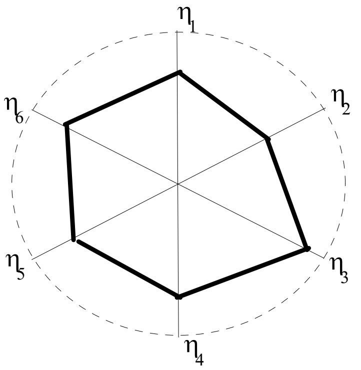
Všimněme si, že veličiny η_{ij} nejsou vyjádřeny v žádných jednotkách (jsou "bezrozměrné"), protože vznikly podělením veličin stejného typu (téhož rozměru). Hodnoty každého kriteria v normalizované matici (η_{ij}) jsou všechny v intervalu <0, 1> a přitom jsou ve stejném vzájemném poměru jako v původní matici (z_{ij}), tj.

$$z_{1j}: z_{2j}: ... : z_{rj} = \eta_{1j}: \eta_{2j}: ... :\eta_{rj}, \quad j=1,2,...,s.$$

V druhém kroku hledáme ***optimální alternativu*** jako tu reálnou alternativu, která má od ideální alternativy minimální "vzdálenost" a nebo jako tu, která má od bazální alternativy maximální "vzdálenost". Vzdálenost mezi alternativami chápeme jako vzdálenost mezi řádkovými vektory v normalizované kriteriální matici. Tyto vektory (alternativy) lze názorně graficky zobrazit pomocí hvězdice nebo polygonu (mnohoúhelníku) uvnitř jednotkové kružnice - viz obr. 4.2.1 a 4.2.2. V obou případech rozdělíme jednotkový kruh na tolik stejných segmentů kolik je kriterií, tj. na s segmentů (na obrázcích s=6). Jednotlivé radiály (úseček yspojující střed kružnice s obvodem kruhu) odpovídají jednotlivým kriteriím a nanášíme na ně ze středu kruhu úsečky o délce rovnající se velikosti toho či onoho kriteria. Získáme tak "hvězdu" reprezentující danou alternativu (obr. 4.2.1). V případě polygonálního zobrazení pospojujeme nestředové konce radiál a získáme tak mnohoúhelník reprezentující alternativu (obr. 4.2.2). Fiktivní bazální varianta se zobrazí hvězdou nebo polygonem "scvrklého" do jediného bodu - do středu kružnice. Fiktivní ideální varianta se zobrazí maximální hvězdou, jejíž všechny paprsky dosahují až na obvod kružnice a nebo polygonem, který je pravidelným s-úhelníkem vepsaným do jednotkové kružnice.



Obr. 4.2.1



Obr.4.2.2

Alternativa x_i je charakterizované vektorem $(\eta_{i1},\eta_{i2},... ,\eta_{is})$, bazální alternativa vektorem **0** = (0,0,...,0) a ideální alternativa vektorem **1** = (1,1,....1). Je zřejmé, že pro měření optimality alternativ je výhodnější používat vzdálenost od bazální alternativy než blízkost k ideální alternativě.
V prvém případě je vzdálenost dána přímo velikostí vektoru $(\eta_{i1},\eta_{i2},... ,\eta_{is})$, která je, ve srovnání s druhou možností, snadněji počitatelná a navíc poskytuje jednoduchou mírou výhodnosti (optimality) té či oné alternativy.

Budeme užívat následující čtyři kriteria pro vyhodnocení výhodnosti alternativ $x_i \in X$ a pro nalezení optimální alternativy x_{i*}:

(1) $\sum_{j=1..s} \eta_{ij}$ (předpokládáme $\eta_{ij} \geq 0$)
Pro index i* alternativy optimální podle tohoto kriteria platí:

$$i^* = \arg\max_i \sum_{j=1..s} \eta_{ij}.$$

(2) $\sum_{j=1..s} \eta_{ij}^2$ (kvadrát euklidovské vzdálenosti)
Pro index i* alternativy optimální podle tohoto kriteria platí:

$$i^* = \arg\max_i \sum_{j=1..s} \eta_{ij}^2 .$$

(3) sqrt $(\sum_{j=1..s} (\eta_{ij}^2))$ (euklidovská vzdálenost, "sqrt" označuje funkci druhé odmocniny)
Pro index i* alternativy optimální podle tohoto kriteria platí:

$$i^* = \arg\max_i \text{sqrt}\,(\sum_{j=1..s} \eta_{ij}^2) .$$

(4) $1/2.\sin(2\pi/s).\sum_{j=1..s} \eta_{ij} .\eta_{i,j+1}$, přičemž $\eta_{i,s+1}= \eta_{i,1}$ (geometrická motivace a odvození kriteria jsou dále uvedeny v poznámce 4.2.1.2). Pro index i* alternativy optimální podle tohoto kriteria platí:

$$i^* = \arg\max_i \sum_{j=1..s} \eta_{ij}\, \eta_{i,j+1}, \text{ přičemž } \eta_{i,s+1}= \eta_{i,1} .$$

Poznámky 4.2.1:

1. Názorný význam kriterií (1) - (3) je zřejmý z grafické hvězdicové interpretace - viz obr. 4.2.1. Podle kriteria (1) je mírou optimality součet velikostí všech úseček mířících ze středu kruhu po radiálách k jeho obvodu. Minimální hodnotou kriteria je 0 a maximální hodnotou je s.
   Podle kriteria (2) je mírou optimality součet čtverců velikostí těchto úseček. Minimální a maximální hodnot a kriteria jsou stejné jako v případě (1).
   Podle kriteria (3) je mírou optimality druhá odmocnina ze součtu čtverců velikostí těchto úseček. Minimální hodnota kriteria je opět 0 amaximální hodnota je sqrt(s) (druhá odmocnina z počtu kriterií).
2. Názorný význam kriteria (4) souvisí s grafickou polygonovou reprezentací - viz obr. 4.2.2. Hodnota kriteria pro danou variantu (alternativu) je rovna plošnému obsahu mnohoúhelníka zobrazujícího tuto variantu. Plošný obsah jednoho trojúhelníkového segmentu je

   $$1/2.h_{ij}h_{i,j+1}\sin(2\pi/s)$$

   a plošný obsah celého polygonu

   $$\sum_{j=1..s} 1/2.\eta_{ij}\, \eta_{i,j+1}\sin(2\pi/s) = 1/2.\sin(2\pi/s).\sum_{j=1..s} \eta_{ij}\, \eta_{i,j+1}, \text{ přičemž } \eta_{i,s+1}= \eta_{i,1}.$$

   Pro optimální alternativu x_{i^*} tedy máme:

   $$i^* = \arg\max_i 1/2.\sin(2\pi/s).\sum_{j=1..s} \eta_{ij}\eta_{i,j+1} = \arg\max_i \sum_{j=1..s} \eta_{ij}\eta_{i,j+1}, \text{ přičemž } \eta_{i,s+1}=\eta_{i,1}.$$

   Minimální hodnota kriteria (4) pro bazální variantu je 0 a maximální hodnota pro ideální variantu je $(1/2).s.\sin(2\pi/s)$, což je obsah pravidelného s-úhelníka vepsaného do jednotkové kružnice.

Příklad 4.2.1:

Uvažujme úlohu vícekriteriálního rozhodovaní zadanou kriteriální maticí zapsanou v tučně zarámované části tabulky 4.2.4. Předpokládejme, že závažnosti kriterií y_1, y_2, y_3, y_4 (v tomto pořadí) jsou v poměru 2:1:4:1.

	1/4	1/8	1/2	1/8	
	y_1	y_2	y_3	y_4	$\sum k_j y_j$
x_1	6	8	4	5	**5.125**
x_2	4	12	3	4	4.5
x_3	5	10	2	12	5

Tab. 4.2.4

Úlohu budeme řešit převodem na skalární optimalizaci metodou váhové kriteriální funkce. Nejprve vypočteme váhové koeficienty (horní řádek tabulky): k_1=2/(2+1+4+1)=2/8=1/4, k_2=1/8, k_3=4/8=1/2, k_4=1/8 a potom vážené průměry hodnot kriterií v řádcích, tj. hodnoty váhové kriteriální funkce pro jednotlivé alternativy (poslední sloupec tabulky). Nejvyšší hodnota 5.125 odpovídá 1. řádku kriteriální matice a tedy optimální variantou je alternativa x_1.

Příklad 4.2.2:

Uvažujme úlohu vícekriteriálního rozhodovaní s kriteriální maticí zapsanou v tučně zarámované části tabulky 4.2.5. Tuto úlohu řešme za předpokladu, že kriteria představují různé typy veličin a že míru relativní významnosti jednotlivých kriterií nejsme schopni posoudit.

	původní kriteriální matice				normalizovaná kriter. mat.				kriteria		
	y_1	y_2	y_3	y_4	η_1	η_2	η_3	η_{14}	$\sum_j \eta_{ij}$	$\sum_j \eta_{ij}^2$	sqrt $(\sum_j \eta_{ij}^2)$
x_1	7	5	6	3	1	0.2	0.5	0	1.7	1.29	1.14
x_2	4	5	7	4	0.4	0.2	0.67	0.2	1.47	0.68	0.82
x_3	2	9	3	6	0	1	0	0.6	1.6	1.36	1.17
x_4	5	4	9	7	0.6	0	1	0.8	**2.4**	**2.00**	**1.41**
x_5	2	8	4	8	0	0.8	0.17	1	1.97	1.67	1.29
d	2	4	3	3	0	0	0	0	-	-	-
h	7	9	9	8	1	1	1	1	-	-	-
h* -*d	5	5	6	5	1	1	1	1	-	-	-

Tab. 4.2.5

Výpočet optimální varianty podle tří zvolených kriterií probíhá v tabulce 4.2.5. Nejdříve se stanoví fiktivní varianty: bazální ***d*** = (d_j) a ideální ***h*** = (h_j). Pro výpočet prvků normalizované kriteriální matice podle vzorce

$$\eta_{ij}=(z_{ij} - d_j)/(h_j - d_j)$$

je užitečné je vypočítat také rozdil ***d-h*** = $(h_j - d_j)$. Pak následuje vlastní výpočet normalizované kriteriální matice (η_{ij}) a posléze výpočet kriterií podle nadepsaných vzorců.

Nejlepší variantou je podle všech tří počítaných kriterií alternativa x_4. Skutečnost, že pořadí alternativ podle 2. a 3. kriteria jsou totožná je zákonité (vzhledem k vlastnostem funkce sqrt - druhé odmocniny). Pořadí alternativ (a tedy i optimalní alternativa) podle kriterií 1. a 2. (a tedy i kriterií 1. a 3.) však mohou být různá, např. podle 1. kriteria je varianta x_1 hodnocena lépe než varianta x_3, zatímco podle kriterií 2. a 3. je tomu naopak.