3. Konečné hry více hráčů

V této kapitole se budeme zabývat konečnými hrami několika racionálních hráčů. Jedná se o hry v normálním tvaru

$$<I,\{A_i: i\in I\},\{H_i: i\in I\}>$$

- s konečnou množinou hráčů $I = \{1,2,...,n\}$, $n \geq 2$,
- s konečnými prostory strategií $A_1, A_2,...,A_k$ jednotlivých hráčů,
- s výplatními funkcemi $H_1(a),H_2(a),...,H_n(\boldsymbol{a})$, kde $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2,...,a_n)\in A_1\times A_2\times...\times A_n=\boldsymbol{A}$.

U her s více hráči nemá valného smyslu rozlišovat hry s konstantním a nekonstantním součtem. Jedná-l i se o hru s konečným součtem, tj. je-li

$$(\exists \text{konst})(\forall a\in A)[\mathrm{H}_1(a)+H_2(a)+...+H_n(a)=\text{konst}],$$

pak sice platí, že ztráta (chyba) jednoho hráče znamená zvýšení součtu zisků ostatních hráčů, ale to nemusí nutně znamenat zvyšení zisku každého jiného hráče. Může dokonce nastat situace, kdy "nevinný" hráč je za chybu jiného hráče postižen mnohem citelněji než viník.

Podobně jako u her 2 hráčů, budeme i u her více hráčů rozlišovat dvě varianty:

- Nekooperativní hry u nichž se nepřipouští závazné dohody o volbě strategií.
- Kooperativní hry u nichž závazné dohody o volbě strategií (a následně i o přerozdělení výher) jsou přípustné.

3.1. Nekooperativní hry

Předmětem této kapitoly je zobecnění pojmů a výsledků uvedených v kap. 2.1. a to ze speciálního případu n=2 na obecný případ $n\geq 2$. Toto zobecnění je přímočaré. Je však nutné se vrátit k obecné notaci (zopakované v úvodu této 3. kapitoly) a je také účelné zavést některé nové pojmy a notace umožňující stručnější a přehlednější vyjadřování:

a_i, b_i, ... - strategie i-tého hráče,

A_i ... množina strategií i-tého hráče, $a_i \in A_i$,

$\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,..., a_n)$ ... ***strategický profil hry*** (volba strategií všech hráčů),

$\boldsymbol{A} = A_1\times A_2\times ... \times A_n$ ... množina všech strategických profilů hry, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$,

$\boldsymbol{a}_{-i} = (a_1,a_2,..., a_{i-1},a_{i+1},..., a_n)$ ... ***strategický profil hry s vyjímkou i-tého hráče*** (volba strategií všech hráčů s vyjímkou i-tého hráče),

$A_{-i} = A_1\times A_2\times ... A_{i-1}\times A_{i+1}\times ... \times A_n$ ... množina všech strategických profilů hry s vyjímkou i-tého hráče, $\boldsymbol{a}_{-i} \times A_{-i}$.

Poněkud nepřesně, ale bez nebezpečí nedorozumění, budeme také používat zápisy:

$\boldsymbol{a} = (a_i, \boldsymbol{a}_{-i}) \in A_i\times A_{-i} = A.$

$H(\boldsymbol{a}) = H((a_i, \boldsymbol{a}_{-i})) = H(a_i, \boldsymbol{a}_{-i})$

Definice 3.1.1:

Strategie $a_i \in A_i$ i-tého hráče (***slabě***) ***dominuje*** strategii $b_i \in A_i$ téhož hráče, jestliže

$$\forall(\boldsymbol{a}_{-i}\in \boldsymbol{A}_{-i})\ [H_i(a_i ,\boldsymbol{a}_{-i}) \geq H_i(b_i ,\boldsymbol{a}_{-i})].$$

Strategie $a_i \in A_i$ i-tého hráče ***silně dominuje*** strategii $b_i \in A_i$ téhož hráče, jestliže

$$\forall(\boldsymbol{a}_{-i}\in \boldsymbol{A}_{-i})\ [H_i(a_i ,\boldsymbol{a}_{-i}) > H_i(b_i ,\boldsymbol{a}_{-i})].$$

Strategie $a_i \in A_i$ i-tého hráče je (***slabě***) ***dominantní strategii*** tohoto hráče, jestliže slabě dominuje všechny strategie i-tého hráče, tj. jestliže platí:

$$\forall(b_i\in A_i)\ \forall(\boldsymbol{a}_{-i}\in \boldsymbol{A}_{-i})\ [H_i(a_i ,\boldsymbol{a}_{-i}) \geq H_i(b_i ,\boldsymbol{a}_{-i})].$$

Strategie $a_i \in A_i$ i-tého hráče je ***silně dominantní strategii*** tohoto hráče, jestliže silně dominuje všechny strategie i-tého hráče, tj. jestliže platí:

$$\forall\big(b_i\in(A_i-\{b_i\})\big)\ \forall(\mathbf{a}_{-i}\in \boldsymbol{A}_{-i})\ [H_i(a_i ,\mathbf{a}_{-i}) > H_i(b_i ,\mathbf{a}_{-i})].$$

Strategický profil $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,..., a_n) \in \boldsymbol{A}$ je ***(slabě) dominantním rovnovážným bodem hry***, jestliže pro všechny hráče $i\in I = \{1,2,...,n\}$ platí, že a_i je slabě dominantní strategii i-tého hráče.

Strategický profil $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,..., a_n) \in \boldsymbol{A}$ je ***silně dominantním rovnovážným bodem hry***, jestliže pro všechny hráče $i \in I = \{1,2,...,n\}$ platí, že a_i je silně dominantní strategii i-tého hráče.

Uvažujme hru $G = <I,\{A_i: i \in I\},\{H_i: i \in I\}>$. Zápisem DW($G$) pak označujeme ***množinu všech dominantních rovnovážných bodů*** hry G (dominated weakly) a obdobně zápisem DS(G) ***množinu všech silně dominantních rovnovážných bodů*** hry G (dominated strongly).

Poznámky 3.1.1:

1. Aby relace (slabé) dominance nebyla reflexivní (tj. aby žádná strategie nedominovala sebe sama) požadujeme často vedle platnosti formule $\forall(\boldsymbol{a}_{-i} \in \boldsymbol{A}_{-i})\ [H_i(a_i, \boldsymbol{a}_{-i}) \geq H_i(b_i, \boldsymbol{a}_{-i})]$ ještě navíc také platnost formule:
$$\exists(\boldsymbol{a}_{-i} \in A_{-i})\ [H_i(a_i, \boldsymbol{a}_{-i}) > H_i(b_i, \boldsymbol{a}_{-i})].$$
2. Z definice 3.1.1 okamžitě vyplývá, že:
   - silné dominování je speciálním případem (slabého) dominování,
   - silně dominantní strategie je také (slabě) dominantní strategií,
   - silně dominantní rovnovážný bod hry je také (slabě) dominantním rovnovážným bodem,
   - DS(G) $\subseteq$ DW(G).
   - silně dominantní strategie je nejvýše jedna, silně dominantní rovnovážný bod hry je nejvýše jeden, množina DS(G) je nejvýše jednoprvková
3. Jestliže hráč má svou dominantní strategii, což je vzácný případ, pak hráč tuto strategie volí, aniž by byl nucen analyzovat hru i z pohledu ostatních hráčů. Jestliže všichni hráči mají svou dominantní strategii a hra má tedy dominantní rovnovážný bod - což je v praxi velice vzácný případ - pak hráči tyto strategie volí a dominantní rovnovážný bod představuje optimální řešení hry. V tomto případě říkáme, že ***hra je řešitelná analýzou dominování***.
4. Racionální hráč nikdy nepoužívá dominovanou strategii a může ji proto vyloučit (eliminovat) z množiny svých strategií. Jestliže všichni hráči jsou racionální a všichni vědí, že všichni jsou racionální, pak každý hráč předpokládá, že totéž učiní i všichni spoluhráči. Přitom při vyloučení dominaných strategií jednoho hráče vznikají nové možnosti pro eliminaci dalších stratgegií ostatních hráčů. Vzniká tak proces eliminace strategií, při kterém se množiny strategii jednotlivých hráčů v libovolném pořadí zmenšují. Existuje-li silně dominantní rovnovážný bod, pak výsledkem tohoto ***iteračního procesu eliminace strategií*** je právě tento bod. Nemá-li hra dominantní rovnovážný bod, pak výsledkem iteračního eliminačního procesu je zmenšení hry, tj. zmenšení početnosti množin A_i a tedy i A, a tím i ulehčení dalšího řešení.

Definice 3.1.2:

Uvažujme hru $G = <I,\{A_i: i \in I\},\{H_i: i \in I\}>$. Vektor strategií (strategický profil)
$$\boldsymbol{a}^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A$$
nazýváme ***Nashovým (slabě) rovnovážným bodem hry***, jestliže platí
$$(\forall i \in I)\ (\forall a_i \in A_i)\ [\ H_i(a_i, \boldsymbol{a}_{-i}^*) \leq \mathrm{H}_i(a_i^*, \boldsymbol{a}_{-i}^*)\ ].$$
Množinu všech Nashových (slabě) rovnovážných bodů hry G označujeme NW(G) a nebo jen N(G).
Vektor strategií (strategický profil)
$$\boldsymbol{a}^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A$$
nazýváme ***Nashovým silně rovnovážným bodem hry***, jestliže platí
$$(\forall i \in I)\ \left(\forall a_i \in (A_i - \{a_i^*\})\right)\ [\ H_i(a_i, \boldsymbol{a}_{-i}^*) < H_i(a_i^*, \boldsymbol{a}_{-i}^*)\ ].$$
Množinu všech Nashových silně rovnovážných bodů hry G označujeme NS(G).

Nashův rovnovážný bod $\boldsymbol{b}^* = (b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*)$ je ***dominantním Nashovým rovnovážným bodem***, jestliže platí
$$(\forall i \in I)\ \left(\forall \boldsymbol{a}^* \in \mathrm{NW}(G)\right)\ [\ H_i(\boldsymbol{a}^*) \leq H_i(\boldsymbol{b}^*)\ ].$$

Poznámky 3.1.2:

1. Z definice 3.1.1 ihned vyplývá NS(G) $\subseteq$ NW(G). Dominantní rovnovážné body jsou speciálními případy Nashových rovnovážných bodů a tedy platí také DS(G) $\subseteq$ NS(G), DW(G) $\subseteq$ NW(G). Spojíme-li tyto vztahy se vztahem DS(G) $\subseteq$ DW(G) - viz poznámky 3.1.1 - dostáváme shrnutí:
$$\mathrm{DS}(G) \subseteq \mathrm{DW(G)} \subseteq \mathrm{NW(G)},$$
$$\mathrm{DS}(G) \subseteq \mathrm{NS}(G) \subseteq \mathrm{NW}(G).$$

Tyto relace jsou zobrazeny množinovým diagramem na obr. 2.2.1.

2. Podobně jako u her 2 hráčů, také řešení her více hráčů spočívá ve hledání Nashových rovnovážných bodů. Mohou nastat následující případy:
   - Existuje ***jediný Nashův rovnovážný bod***. Potom jeho souřadnice představují racionální volby strategií jednotlivých hráčů. Nashův rovnovážný bod reprezentuje optimální řešení hry.
   - Existuje ***několik Nashových rovnovážných bodů***. V tomto případě třeba rozlišovat dva podpřípady:
     - V množině Nashových bodů *existuje* dominantní bod. V tomto případě dominantní Nashův bod představuje optimální řešení hry.
     - V množině Nashových bodů *neexistuje* dominantní bod. V tomto případě je třeba hledat řešení hry mezi smíšenými strategiemi, tj. přejít k obecnějšímu smíšenému rozšíření hry.
   - Neexistují ***žádné Nashovy rovnovážné body***. V tomto případě je opět nezbytný přechod k smíšený m strategiím a smíšenému rozšíření hry.

   Jsou-li prostory strategií konečné, lze vždy zjistit, který z výše uvedených případů nastane.
3. Nalézt řešení hry v posledních dvou případech (neexistence dominantního Nashova bodu) může být velmi obtížné. V některých případech může pomoci využití speciálních vlastností výplatních funkcí dané hry. Vždy je cenné zmenšení velikosti hry vyloučením dominovaných (a tedy nehraných) strategií.

3.2. Kooperativní hry

V této kapitole uvažujeme hry více racionálních hráčů s neomezenými možnostmi kooperace. Účastníci konfliktní situace mohou vytvářet libovolné koalice, v rámci koalic uzavírat dohody o volbách strategií a o přer ozdělení celkového součtu výher mezi členy koalice .

Definice 3.2.1:

Uvažujme hru s množinou hráčů $I=\{1,2,...,n\}$, $n\geq 2$. ***Koalice*** $K=\{i_1,i_2,...,i_s\}$, $1\leq s\leq n$, je jakákoliv neprázdná podmnožina množiny hráčů vyznačující se tím, že její členové spolupracují při volbě strategií, $\emptyset\neq K\subseteq I$. Množinu všech koalic dané hry s množinou hráčů I označíme $\boldsymbol{K}(I)$.

Koaliční struktura dané hry je rozklad K na množině hráčů I, tj. systém množin

$$\boldsymbol{K} = \{K_1,K_2, ... ,K_r\}$$

splňující podmínky:

(i) $(\forall i\in I)\ [\ K_i \neq \emptyset\ ]\ ,\quad i\in\{1,2,...,r\}$

(ii) $K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_r = I\ ,$

(iii) $(\forall i, j\in I)\ [\ i\neq j\ \Rightarrow K_i \cap K_j = \emptyset\ ]\ .$

Poznámky 3.2.1:

1. Mezi koalice zahrnujeme i dva mezní (triviální) případy:
   - ***Elementární*** (jednočlennou) koalici tvořenou jediným hráčem, $K=\{i\}$, $s=1$.
   - ***Velkou*** (úplnou) koalici tvořenou všemi hráči hry, $K=I$, $s=n$.
2. Celkový počet všech možných koalic ve hře s n hráči je $2^n - 1$.
3. Vedle ***disjunktních*** koaličních struktur splňujících podmínky (i)-(iii), kdy každý hráč je členem právě jedné koalice, se někdy uvažují i ***nedisjunktní*** koaliční struktury, kdy existuje aspoň jeden hráč, který je členem aspoň dvou koalic. V dalším budeme uvažovat pouze disjunktní koaliční struktury a přívlastek "disjunktní" nebudeme uvádět.

Definice 3.2.2:

Koaliční hra je dvojice $<I, v>$, kde $I=\{1,2,...,n\}$ je množina hráčů a v je funkce (tzv. ***charakteristická funkce koaliční hry***) přiřazující každé koalici $K\in\boldsymbol{K}(I)$ reálné číslo $v(K)$ s následující vlastností superaditivity:

$$(\forall K, L \subseteq I\ )[\ K\cap L=\emptyset \quad\Rightarrow\quad v(K)+v(L)\ \leq\ v(K\cup L)\ ] \qquad (*)$$

Koaliční hra s nepodstatnými koaličními konflikty je hra jejíž charakteristická funkce je aditivní, tj. hra pro kterou platí

$$(\forall K,L \subseteq I)\ [\ K\cap L=\emptyset \ \Rightarrow\ v(K)+v(L) = v(K\cup L)\ ]\ . \qquad (**)$$

Koaliční hra s podstatnými koaličními konflikty je hra jejíž charakteristická funkce je superaditivní, ale nikoliv aditivní, tj. hra pro kterou platí (*) a (***):

$$(\exists K,L \subseteq I)\ [\ K\cap L=\emptyset \ \Rightarrow\ v(K)+v(L) < v(K\cup L)\ ]\ . \qquad (***)$$

Poznámky 3.2.2:

1. Hodnota funkce $v(K)$ je interpretována jako zaručená výplata se kterou koalice K může počítat při racionální volbě své strategie. Výplata koalice je součet výplat všech členů koalice a strategie koalice je dána vektorem strategii jednotlivých členů koalice.
2. Smysl formule (*) vyjadřující vlastnost ***superaditivity*** množinové funkce $v(K)$ je tento: zaručená výhra koalice vzniklé spojením dvou (disjunktních) koalic je přinejmenším rovna součtu zaručených výher obou nespojených koalic. Speciálním případem superaditivity je ***aditivita*** vyjádřená formulí (**). V případě, že charakteristická funkce hry je aditivní, nevede tvorba koalic ke vzniku vyšších výher oproti případu, kdy každý hráč vystupuje ve hře samostatně (hra s nepodstatnými koaličními konflikty). Naproti tomu u her s podstatnými koaličními konflikty lze vytvářením netriviálních koalic (vytvořením aspoň jedné aspoň dvoučlenné koalice) dosáhnout zvýšení výher hráčů sdružených v koalici.
3. V koaličních hrách $<I, v>$ je charakteristická funkce daným výchozím údajem. Dále - viz definice 3..2.3 - je ukázáno, jak lze charakteristickou funkci stanovit (odhadnout) na základě výplatnich funkcí H_i hry v normálním tvaru $<I,\{A_i: i\in I\},\{H_i: i\in I\}>$.

Definice 3.2.3:

Uvažujme konečnou hru více hráčů v normálním tvaru $<I,\{A_i: i\in I\},\{H_i: i\in I\}>$ a označme:

$A(K)$ ..... množina všech strategií koalice K, tj. množina všech vektorů $\boldsymbol{a}_K$ tvořených strategiemi hráčů, kteří jsou členy koalice K,

$A(I\text{-}K)$ ... množina všech strategií antikoalice I - K, tj. množina všech vektorů $\boldsymbol{a}_{-K}$ tvořených strategiemi hráčů, kteří nejsou členy koalice K.

Platí: $(\boldsymbol{a}_K,\boldsymbol{a}_{-K}) = \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}_K\in A(K),\ \boldsymbol{a}_{-K}\in A(I\text{-}K),\ \boldsymbol{a}\in A,\ A = (A(K),A(I\text{-}K))$.

Maximinová charakteristická funkce je charakteristická funkce hry zadaná vzorcem

$$v_{\mathrm{mm}}(K) = \max_{A(K)} \min_{A(I\text{-}K)} \textstyle\sum_{i\in K} H_i(a_1, a_2,\dots,a_k)$$

Neurčitostní charakteristická funkce je charakteristická funkce hry počítaná podle vzorce

$$v_{\mathrm{av}}(K) = \max_{A(K)} \mathrm{aver}_{A(I\text{-}K)} \textstyle\sum_{i\in K} H_i(a_1, a_2,\dots,a_k) =$$
$$= \max_{A(K)} (1/N(\textstyle\sum_{A(I\text{-}K)} \sum_{i\in K} H_i(a_1, a_2,\dots,a_k)),\ \text{kde}$$

$\mathrm{aver}_{A(I\text{-}K)}$ je střední hodnota (při rovnoměrném rozložení) přes všechny možné kombinace strategií hráčů z nekoalice $I\text{-}K$,

N .... je počet všech strategií antikoalice I - K, tj. počet vektorů tvořených všemi možnými kombinacemi strategií hráčů, kteří nejsou členy koalice,

$\sum_{A(I\text{-}K)}$ ... je součet pro všechny možné kombinace strategií $\boldsymbol{a}_{-K}$ hráčů, kteří nejsou členy koalice.

Poznámky 3.2.3:

1. Maximinová charakteristická funkce předpokládá, že všichni hráči, kteří nejsou členy koalice K utvoří antikoalici $I\text{-}K$ a tato antikoalice se snaží koalici K co nejvíce poškodit. Tento předpoklad je na místě, je-li výchozí nekoaliční hra $<I,\{A_i: i\in I\},\{H_i: i\in I\}>$ hrou s nulovým součtem, takže koaliční hra s koalicemi K, $I\text{-}K$ je antagonistickou hrou. Jestliže výchozí nekoaliční hra není hrou s nulovým součtem, pak je uvedený předpoklad zbytečně pesimistický, protože společným cílem nekoaličních hráčů není co nejvíce poškodit koalici, ale dosáhnout co největší individuální výhry.
2. Neurčitostní charakteristická funkce vychází naopak z toho, že nelze nic určitého říci o chování hráčů, kteří nejsou v koalici K a proto předpokládá, že hráči z $I\text{-}K$ volí své strategie náhodně s rovnoměrným pravděpodobnostním rozložením.
3. Jestliže koalice je speciálně tvořena všemi hráči, tj. je-li $K=I$ (velká koalice), pak oba vzorce z definice 3.2.3 dávají stejnou hodnotu charakteristické funkce:
$$v(I) = \max_A \textstyle\sum_{i\in I} H_i(a_1, a_2,\dots,a_k)\ .$$
4. Cílem normativní teorie kooperativních her s více hráči je poskytnout odpovědi na následující otázky:
   (1) Kdy má smysl vytvářet koalice?
   (2) Do jaké koalice vstoupit?

(3) Jaká je optimální koaliční struktura?
(4) Jaké strategie uvnitř jednotlivých koalice volit?
(5) Jak rozdělit koaliční výhry jednotlivých koalic mezi jejich členy?

Na prvou otázku již odpověď známe: Tvorba koalic je užitečná, je-li charakteristická funkce superaditivní, ale nikoliv aditivní.

Definice 3.2.4 (*podmínky stability velké koalice*):

Uvažujme hru, kdy všichni hráči spolupracují, tj. případ utvoření velké koalice. V tomto případě lze do sáhnout výhry (viz 3. bod poznámky 3.2.3)

$$v(I) = \max_A \sum_{i\in I} H_i(a_1, a_2,...,a_n)$$

a této maximální možné výhry bude dosaženo při volbě strategií $\boldsymbol{a}^0 = (a^0_1, a^0_2,...,a^0_n)$ pro kterou platí

$$\sum_{i\in I} H_i(a^0_1, a^0_2,...,a^0_n) = \max_A \sum_{i\in I} H_i(a_1, a_2,...,a_k).$$

Rozdělení výher je vektor

$$\boldsymbol{h} = (h_1, h_2,...,h_n),$$

kde h_i je částka, která bude po přerozdělení koaliční výhry vyplacena i-tému hráči.

Jádro hry J je množina všech vektorů $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2,...,h_n)$, splňujících podmínky:

(i) $\sum_{i\in I} h_i = v(I)$ podmínka ***racionality***,
(ii) $h_i \geq v(\{i\})$ pro všechna $i\in I$, podmínky ***individuálni stability***,
(iii) $\sum_{i\in K} h_i \geq v(K)$ pro všechna $K\subset I$, podmínky ***kolektivní stability***.

Je-li jádro hry neprázdné, pak strategie dané vektorem $\boldsymbol{a}^0 = (a^0_1, a^0_2,...,a^0_n)$ nazveme ***optimálními strategiemi***, střední hodnotu $\boldsymbol{h}^0 = (h^0_1, h^0_2,...,h^0_n)$ rovnoměrného rozložení vektorů $\boldsymbol{h}$ na jádře J nazveme ***optimálním rozdělením výher*** a dvojici $(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{h}^0)$ ***optimálním řešením hry***.

Poznámky 3.2.4:

1. Podmínka kolektivní racionality stanoví, že celá koaliční výhra bude rozdělena mezi hráče.
2. Podmínka individuální stability požaduje, aby podíl každého hráče na koaliční výhře byl aspoň tak velký jako je jeho zaručená výhra při samostatném (koaliční smlouvou se neřídícím) rozhodování. Kdyby pro některého hráče platilo $h_i < v(\{i\})$, tj. při dělení by na něho zbylo méně, než si může zajistit sám bez ohledu na jednání ostatních hráčů, pak by tento hráč jednal iracionálně, kdyby v koalici setrval. Velká koalice racionálních hráčů je tedy v tomto případě nestabilní.
3. Podmínka kolektivní stability zaručuje, že nejenom pro jednotlivého hráče, ale i pro jakoukoliv skupinu hráčů není výhodné vystoupení z koalice. To by bylo výhodné jedině tehdy, jestliže existuje skupina hráčů $K\subset I$ taková, že $\sum_{i\in K} h_i < v(K)$. Jsou-li hráči této skupiny racionální, pak vystoupí z velké koalice a utvoří vlastní koalici, která jim zaručí větší celkovou výhru a tím i větší individuální podíly.
4. Podmínka (ii) je speciálním případem podmínky (iii) protože jediného hráče můžeme formálně považovat za jednočlennou koalici.
5. Podmínka (i) je tvořená jedinou rovnicí, podmínka (ii) n lineárními nerovnostmi, $n=|I|$, a podmínka (iii) $2^n - 2$ lineárními nerovnostmi. Jádro hry je tedy tvořeno konvexním polyedrem v n-rozměrném prostoru a nebo je prázdné (podmínky (i)-(iii) nelze současně splnit).
6. Je-li jádro hry neprázdné, $J\neq\emptyset$, pak je velká koalice stabilní koaliční strukturou a odpovědi na všechny otázky (1)-(5) jsou obsaženy v definici 3.2.4.
7. Je-li jádro hry prázdné, $J=\emptyset$, pak velká koalice není stabilní koaliční strukturou a je třeba hledat jiné koaliční struktury. Stabilní koaliční struktura je taková struktura jejíž všechny koalice jsou stabilní - viz následující definice 3.2.5.

Definice 3.2.5:

Koalice $K=\{i_1, i_2,...,i_s\}$ ***je stabilní***, jestliže soustava podmínek

(a) $\sum_{i\in K} h_i = v(K)$ podmínka ***kolektivní racionality***,
(b) $\sum_{i\in L} h_i \geq v(L)$ pro všechna $L\subset K$, podmínky ***stability***,

je splnitelná. Zde h_i jsou souřadnice vektoru $(h_{i1},h_{i2},....,h_{is})$ rozdělení koaliční výhry mezi členy koalice.

Množinu vektorů $(h_{i1},h_{i2},....,h_{is})$ splňujících podínky (a), (b) nazýváme ***jádrem koalice K*** (jádrem vnitr okoaliční hry koalice K). Jádro velké koalice $K = I$ nazýváme také ***jádrem hry***.

Koaliční struktura $K=\{K_1,K_2, ... ,K_r\}$ ***je stabilní***, jestliže každá koalice této struktury je stabilní.

Poznámky 3.2.5:

1. Podmínka (a) požaduje rozdělení celé koaliční výhry mezi členy koalice. Podmínka (b) požaduje, aby v žádné podkoalici L (včetně jednoprvkových podkoalic) koalice K nebylo možné členům podkoalice zaručit větší součet výher než v koalici K. Pro žádnou podmnožinu členů koalice K není pak výhodné koalic i opustit. Koalice K je tedy stabilní.
2. Podmínky (a),(b) jsou zobecněním podmínek (i),(iii), resp. (i),(ii),(iii), z definice 3.2.4. Jestliže speciálně K=I={1,2,...,k} (tj. je-li K velká koalice), pak splnitelnost podmínek (a),(b) vyjadřuje skutečnost, že velká koalice představuje stabilní (optimální) koaliční strukturu.
3. V soustavě podmínek je jedna rovnice a 2^s - 2 nerovností.
4. Jednočlenné koalice jsou vždy stabilní: soustava podmínek se redukuje na jedinou rovnici (a), která je vždy splnitelná. Nebo jinak: z jednočlenné koalice nelze vystoupit.
5. Stabilní koaliční strukturu nalezneme tímto postupem:
   - Určíme jádro J hry - viz definice 3.2.4.
     Je-li $J\neq\emptyset$, pak velká koalice I={1,2,...,k} představuje stabilní koaliční strukturu.
     Je-li $J=\emptyset$, pak přejdeme k následujícímu bodu.
   - Hledáme největší (tj. s největším počtem členů) stabilní koalici, tj. testujeme splnitelnost podmínek (a), (b) nejdříve pro všechny (k-1)-členné koalice, dále pro všechny (k-2)-členné koalice, atd., dokud nenalezneme stabilní koalici, která podmínky (a), (b) splňuje. Je-li takových koalic více, pak vezmeme tu koalici K, která má nejvyšší hodnotu charakteristické funkce.
   - Hráči, kteří se nedostali do koalice K zjišťují zda koalice I-K je stabilní. Je-li, pak **K**={K,I-K} stabilní koaliční strukturou. Není-li I-K stabilní koalicí, pak hráči z I-K hledají největší možnou
   - stabilní podkoalici $L\subset I$-K. Po jejím nalezení zbylí nezařazení hráči z I-K-L postupují stejně jako v předchozím kroku hráči z I-K. Atd.,atd.,... dokud všichni hráči nejsou zařazeni.

   Následuje formální popis algoritmu.

Algoritmus 3.2.1 (nalezení stabilní koaliční struktury):

Stavové veličiny algoritmu:

- N ..... množina hráčů dosud nezařazených do žádné koalice
  $|N|$ ... početnost množiny N
- r .... počet ustavených stabilních koalic
- j .... početnost koalic právě testovaných na stabilitu

Vlastní algoritmus:

(1) Položíme N := I={1,2,...,n}, r :=1 a přejdeme k bodu (2).
(2) Položíme j := $|N|$ a přejdeme k bodu (3).
(3) Hledáme stabilní j-členné koalic vybrané z hráčů množiny N, tj. testujeme všechny tyto koalice na podmínky (a), (b).
(4) Je-li množina stabilních koalic nalezených v bodě (3) prázdná, pak položíme j := j-1 a vrátíme se k bodu (3).
Je-li množina stabilních koalic nalezených v bodě (3) neprázdná, pak z této množiny vybereme koalici s nejvyšší hodnotou charakteristické funkce a označíme ji K_r. Dále položíme N := N-K_r. a přejdeme k bodu (5).
(5) Je-li $N \neq \emptyset$, pak položíme r := r+1 a vrátíme se k bodu (2).
Je-li $N = \emptyset$, pak algoritmus ukončil svou práci a hledaná stabilní koaliční struktura je

$$\mathbf{K}=\{K_1,K_2, \dots ,K_r\}.$$

Poznámky 3.2.6:

1. Testování vícečlenných koalic zda splňují podmínky (a), (b) může být obtížné a numericky náročné.

Věta 3.2.1 (Existence stabilní koaliční struktury):

Existuje-li charakteristická funkce hry, pak existuje talé stabilní koaliční struktura (vzhledem k dané charakteristické funkci).

Důkaz:

Platnost věty plyne z následujících skutečností:

- Popsaný algoritmus vyšetřuje stabilitu možných koalic a hledá stabilní koalice metodou shora dolů, tj. od nejpočetnější velké koalice až po nejméně početné jednočlenné koalice.
- Jednočlenné koalice jsou stabilní.

Algoritmus 3.2.2 (nalezení řešení hry):

(1) Nalezneme stabilní koaliční strukturu $\boldsymbol{K}=\{K_1,K_2, \dots ,K_r\}$ podle algoritmu 3.2..1.

(2) Pro každou koalici $K=\{i_1,i_2,\dots,i_s\}$, $K\in\boldsymbol{K}$, určíme strategie $\boldsymbol{a}^0{}_K=(a^0{}_{i1},a^0{}_{i2},\dots,a^0{}_{is})$ jejich členů tak, aby bylo dosaženo zaručené koaliční výhry $v(K)$.

(3) Pro každou koalici $K=\{i_1,i_2,\dots,i_s\}$, $K\in\boldsymbol{K}$, určíme rozdělení výher $\boldsymbol{h}^0{}_K=(h^0{}_{i1},h^0{}_{i2},\dots,h^0{}_{is})$ jako střední hodnotu rovnoměrného pravděpodobnostního rozložení na množině vektorů rozdělení výher $\boldsymbol{h}_K=(h_{i1},h_{i2},\dots,h_{is})$ splňujících podmínky:

(a) $\sum_{i\in K} h_i = v(K)$,

(b) $\sum_{i\in L} h_i \geq v(L)$ pro všechna $L\subset K$.

(4) ***Řešením hry*** (optimálním řešením hry) je trojice

$$<\{K_1,K_2,\dots,K_r\},\ \{\boldsymbol{a}^0{}_{K1},\boldsymbol{a}^0{}_{K2},\dots,\boldsymbol{a}^0{}_{Kr}\},\ \{\boldsymbol{h}^0{}_{K1},\boldsymbol{h}^0{}_{K2},\dots,\mathbf{h}^0{}_{Kr}\}>,$$ kde

$\{K_1,K_2,\dots,K_r\}$ je (disjunktní) rozklad na množině hráčů představující stabilní koaliční strukturu,
$\{\boldsymbol{a}^0{}_{K1},\boldsymbol{a}^0{}_{K2},\dots,\boldsymbol{a}^0{}_{Kr}\}$ je množina optimálních strategií jednotlivých koalic koaliční struktury a
$\{\boldsymbol{h}^0{}_{K1},\boldsymbol{h}^0{}_{K2},\dots,\boldsymbol{h}^0{}_{Kr}\}$ je množina optimálních rozdělení koaličních výher uvnitř jednotlivých koalic koaliční struktury.

Poznámky 3.2.7:

1. Řešení hry můžeme ekvivalentním způsobem definovat také jako množinu trojic
$$\{<K_1, \boldsymbol{a}^0{}_{K1}, \boldsymbol{h}^0{}_{K1}>, <K_2, \boldsymbol{a}^0{}_{K2}, \boldsymbol{h}^0{}_{K2}>, \dots, <K_r, \boldsymbol{a}^0{}_{Kr}, \boldsymbol{h}^0{}_{Kr}>\}$$
a při výpočtu řešení s výhodou postupovat tak, že ke každé právě ustanovené stabilní koalici K_j podle algoritmu 3.2.1 se ihned nalezne optimální koaliční strategie $\boldsymbol{a}^0{}_{Kj}$ a optimální rozdělení koaliční výhry $\boldsymbol{h}^0{}_{Kj}$.
2. I když volba koaliční strategie je pro každou koalici K taková, aby byla zaručena aspoň výhra $v(K)$ udaná charakteristickou funkcí v, může se při realizaci hry stát, že skutečná koaliční výhra $v'(K)$ je větší než $v(K)$. Potom v bodě (3) algoritmu 3.2.2 v podmínce (a) nahradíme zaručenou výhru $v(K)$ skutečnou výhrou $v'(K)$, tj. mezi členy koalice rozdělujeme nikoliv zaručenou, ale vyšší skutečnou celkovou koaliční výhru.
3. Výpočet střední hodnoty rovnoměrného rozložení na konvexním polyedru definovaném vztahy (a), (b) - viz bod (3) algoritmu 4.2.2 - může být obtížný. Pro přibližný počítačový výpočet se zde nabízí užití metody Monte Carlo.

Věta 3.2.2 (Existence řešení hry):

Existuje-li charakteristická funkce hry, pak existuje také řešení hry (vzhledem k dané charakteristické funkci).

Důkaz:

Existuje-li charakteristická funkce hry $v(K)$, pak existuje i stabilní koaliční struktura $\boldsymbol{K}=\{K_1,K_2,\dots,K_r\}$ - věta 3.2.1. Existuje-li stabilní koaliční struktura $\{K_1,K_2,\dots,K_r\}$, pak také existuje řešení hry
$$<\{K_1,K_2,\dots,K_r\},\ \{\boldsymbol{a}^0{}_{K1},\boldsymbol{a}^0{}_{K2},\dots,\boldsymbol{a}^0{}_{Kr}\},\ \{\boldsymbol{h}^0{}_{K1},\boldsymbol{h}^0{}_{K2},\dots,\boldsymbol{h}^0{}_{Kr}\}>,$$
neboť optimální strategie koalic $\{\boldsymbol{a}^0{}_{K1},\boldsymbol{a}^0{}_{K2},\dots,\boldsymbol{a}^0{}_{Kr}\}$ a optimální rozdělení koaličních výher $\{\boldsymbol{h}^0{}_{K1},\boldsymbol{h}^0{}_{K2},\dots,\boldsymbol{h}^0{}_{Kr}\}$ mezi členy koalic jsou jednoznačně určeny koaliční strukturou $\boldsymbol{K}=\{K_1,K_2,\dots,K_r\}$ a charakteristickou funkcí hry $v(K)$.

Příklad 3.2.1:

Uvažujme tříčlennou výběrovou komisi (ve složení: předseda (1.člen) a dva obyčejní členové (2. a 3.člen)) , která hlasuje o přidělení veřejné zakázky jedné ze dvou firem: firmě α nebo firmě β. Každý člen komise (včetně předsedy) má jeden hlas, žádný se nesmí zdržet hlasování a zakázka bude přidělena té firmě pro kterou hlasovali aspoň dva členové.

V případě, že zakázka bude přidělena firmě α, budou členové komise, kteří pro firmu α hlasovali, firmou α odměněni takto: předseda 4, člen komise 2. Bude-li zakázka přidělena firmě β, budou členové komise, kteří pro firmu β hlasovali, firmou β odměněni takto: předseda 6, člen komise 1.

Popsanou situaci budeme formalizovat jako konečnou hru 3 hráčů $<I,\{A_i: i\in I\},\{H_i: i\in I\}>$, kde $I=\{1,2,3\}$, $A_1=A_2=A_3=\{\alpha, \beta\}$ a hodnoty výplatních funkcí H_1, H_2, H_3 jsou zadány zarámovanou částí tabulky 3.2.1. Všichni hráči jsou racionální (úplatní) a snaží se maximalizovat svou výplatu a to i tvorbou koalic.

předseda a_1:	α	α	α	α	β	β	β	β
člen a_2:	α	α	β	β	α	α	β	β
člen a_3:	α	β	α	β	α	β	α	β
$H_1(a_1,a_2,a_3)$:	4	4	4	0	0	6	6	6
$H_2(a_1,a_2,a_3)$:	2	2	0	1	2	0	1	1
$H_3(a_1,a_2,a_3)$:	2	0	2	1	2	1	0	1
vítězná firma:	α	α	α	β	α	β	β	β
$\sum H_i(a_1,a_2,a_3)$:	8	6	6	2	4	7	7	8

Tab. 3.2.1

Výpočet charakteristických funkcí koaliční hry:

Existuje celkem 2^3-1=7 koalic, a to: {1,2,3},{1,2},{1,3},{2,3},{1},{2},{3}. Vypočteme hodnoty obou charakteristických funkcí $v_{mm}(K)$ a $v_{av}(K)$ (viz definice 2.3.3) pro tyto koalice. Vzhledem k tomu, že se nejedná o hru s nulovým (konstantním) součtem je užití maximinové charakteristické funkce $v_{mm}(K)$ nevhodné. Paralelní výpočet výpočet obou charakteristických funkcí slouží jen k porovnání.

Z posledního řádku tab. 3.2.1 vyplývá, že

$$v_{mm}(\{1,2,3\}) = v_{av}(\{1,2,3\}) = \max_{a1,a2,a3} [H_1(a_1,a_2,a_3)+H_2(a_1,a_2,a_3)+H_3(a_1,a_2,a_3)]= 8.$$

V tabulkách 3.2.2.a,b,c,d,e,f jsou jsou počítány postupně hodnoty obou charakteristických funkcí pro koalice {1,2},{1,3},{2,3},{1},{2},{3}.

$A(\{1,2\}) \setminus A(\{3\})$	α	β	v_{mm}	v_{av}
α,α	4+2=6	4+2=6	6	(6+6)/2=6
α,β	4+0=4	0+1=1	1	(4+1)/2=2.5
β,α	0+2=2	6+0=6	2	(2+6)/2=4
β,β	6+1=7	6+1=7	**7**	(7+7)/2=**7**
			$v_{mm}(\{1,2\})=7$	$v_{av}(\{1,2\})=7$

Tab. 3.2.2.a

$A(\{1,3\}) \setminus A(\{2\})$	α	β	v_{mm}	v_{ma}
α,α	4+2=6	4+2=6	6	(6+6)/2=6
α,β	4+0=4	0+1=1	1	(4+1)/2=2.5
β,α	0+2=2	6+0=6	2	(2+6)/2=4
β,β	6+1=7	6+1=7	**7**	(7+7)/2=**7**
			$v_{mm}(\{1,3\})=7$	$v_{av}(\{1,3\})=7$

Tab. 3.2.2.b

$A(\{2,3\}) \setminus A(\{1\})$	α	β	v_{mm}	v_{ma}
α,α	2+2=4	2+2=4	4	(4+4)/2=4
α,β	2+0=2	0+1=1	1	(2+1)/2=1.5
β,α	0+2=2	1+0=1	1	(2+1)/2=1.5
β,β	1+1=2	1+1=2	**2**	(2+2)/2=**2**
			$v_{mm}(\{2,3\})=4$	$v_{av}(\{2,3\})=4$

Tab. 3.2.2.c

$A(\{1\})\setminus A(\{2,3\})$	α,α	α,β	β,α	β,β	v_{mm}	v_{av}
α	4	4	4	0	0	(4+4+4+0)/4=3
β	0	6	6	6	0	(0+6+6+6)/4=4.5
					$v_{mm}(\{1\})=0$	$v_{av}(\{1\})=4.5$

Tab. 3.2.2.d

$A(\{2\})\setminus A(\{1,3\})$	α,α	α,β	β,a	β,β	v_{mm}	v_{av}
α	2	2	2	0	0	(2+2+2+0)/4=1.5
β	0	1	1	1	0	(0+1+1+1)/4=0.75
					$v_{mm}(\{2\})=0$	$v_{av}(\{2\})=1.5$

Tab. 3.2.2.e

$A(\{3\})\setminus A(\{1,2\})$	α,α	α,β	β,α	β,β	v_{mm}	v_{av}
α	2	2	2	0	0	(2+2+2+0)/4=1.5
β	0	1	1	1	0	(0+1+1+1)/4=0.75
					$v_{mm}(\{3\})=0$	$v_{av}(\{3\})=1.5$

Tab. 3.2.2.f

Výsledky získané výpočty v tabulkách 3.2.2.a-f jsou sumarizovány v následující tab. 3.2.3.

K	{1,2,3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1}	{2}	{3}
$v_{mm}(K)$	8	7	7	4	0	0	0
$v_{av}(K)$	8	7	7	4	4.5	1.5	1.5

Tab. 3.2.3

Řešení koaliční hry s maximinovou charakteristickou funkcí $v_{mm}(K)$:

- stabilita velké koalice $K=\{1,2,3\}$
  - $h_1 + h_2 + h_3 = 8$ podmínka racionality
  - $h_1 + h_2 \geq 7$ podmínka stability: $L=\{1,2\}$
  - $h_1 + h_3 \geq 7$ podmínka stability: $L=\{1,3\}$
  - $h_2 + h_3 \geq 4$ podmínka stability: $L=\{2,3\}$
  - $h_1 \geq 0$ podmínka stability: $L=\{1\}$
  - $h_2 \geq 0$ podmínka stability: $L=\{2\}$
  - $h_3 \geq 0$ podmínka stability: $L=\{3\}$

Součet prvých tří podmínek stability dává $2(h_1 + h_2 + h_3) \geq 18$ a tedy $h_1 + h_2 + h_3 \geq 9$ a tedy nemůže být splněna podmínka racionality (z celkové koaliční výplaty nelze uspokojit požadavky všech tří dvouprvkových koalic). Jádro hry je prázdné a tedy velká koalice je nestabilní.

- Stabilita koalice {1,2}:
  - $h_1 + h_2 = 7$ podmínka racionality
  - $h_1 \geq 0$ podmínka stability: $L=\{1\}$
  - $h_2 \geq 0$ podmínka stability: $L=\{2\}$

  Vnitrokoaliční jádro je neprázdné a tedy koalice {1,2} je stabilní.
  Optimální strategie je $(a^0{}_1,\ a^0{}_2)=(\beta,\beta)$ a výplaty členům koalice jsou $(h^0{}_1, h^0{}_2)=(3.5, 3.5)$.

- Stabilita koalice {1,3}:
  - $h_1 + h_3 = 7$ podmínka racionality
  - $h_1 \geq 0$ podmínka stability: $L=\{1\}$
  - $h_3 \geq 0$ podmínka stability: $L=\{3\}$

  Vnitrokoaliční jádro je neprázdné a tedy koalice {1,3} je stabilní.
  Optimální strategie je $(a^0{}_1,\ a^0{}_3)=(\beta,\beta)$ a výplaty členům koalice jsou $(h^0{}_1, h^0{}_3)=(3.5, 3.5)$.

- Stabilita koalice {2,3}:

$h_2 + h_3 = 4$ podmínka racionality
$h_2 \geq 0$ podmínka stability: $L=\{2\}$
$h_3 \geq 0$ podmínka stability: $L=\{3\}$

Vnitrokoaliční jádro je neprázdné a tedy koalice {2,3} je stabilní.
Optimální strategie je $(a^0{}_2,\ a^0{}_3)=(\alpha, \alpha)$ a výplaty členům koalice jsou $(h^0{}_2, h^0{}_3)=(2, 2)$.

- Tři stabilní řešení koaliční hry:
  - Koaliční struktura: {{1,2}, {3}}
    Strategie: $((a^0{}_1,a^0{}_2), a^0{}_3) = ((\beta, \beta), \beta)$
    Výplaty: $((h^0{}_1,h^0{}_2), h^0{}_3) = ((3.5, 3.5), 1)$
  - Koaliční struktura: {{1,3}, {2}}
    Strategie: $((a^0{}_1,a^0{}_3), a^0{}_2) = ((\beta, \beta), \beta)$
    Výplaty: $((h^0{}_1,h^0{}_3), h^0{}_2)) = ((3.5, 3.5), 1)$
  - Koaliční struktura: {{2,3}, {1}}
    Strategie: $((a^0{}_2,a^0{}_3), a^0{}_1) = ((\alpha, \alpha), \alpha)$
    Výplaty: $((h^0{}_2,h^0{}_3), h^0{}_1) = ((2, 2), 4)$

Řešení koaliční hry s neurčitostní charakteristickou funkcí $v_{av}(K)$:

- stabilita velké koalice K={1,2,3}

$h_1 + h_2 + h_3 = 8$ podmínka racionality
$h_1 + h_2 \geq 7$ podmínka stability: $L=\{1,2\}$
$h_1 + h_3 \geq 7$ podmínka stability: $L=\{1,3\}$
$h_2 + h_3 \geq 4$ podmínka stability: $L=\{2,3\}$
$h_1 \geq 4.5$ podmínka stability: $L=\{1\}$
$h_2 \geq 1.5$ podmínka stability: $L=\{2\}$
$h_3 \geq 1.5$ podmínka stability: $L=\{3\}$

Součet prvých tří podmínek stability dává $2(h_1 + h_2 + h_3) \geq 18$ a tedy $h_1 + h_2 + h_3 \geq 9$ a tedy nemůže být splněna podmínka racionality (z celkové koaliční výplaty nelze uspokojit požadavky všech tří dvouprvkový ch koalic). Jádro hry je prázdné a tedy velká koalice je nestabilní.

- Stabilita koalice {1,2}:

$h_1 + h_2 = 7$ podmínka racionality
$h_1 \geq 4.5$ podmínka stability: $L=\{1\}$
$h_2 \geq 1.5$ podmínka stability: $L=\{2\}$

Vnitrokoaliční jádro je neprázdné a tedy koalice {1,2} je stabilní.
Optimální strategie je $(a^0{}_1,\ a^0{}_2)=(\beta, \beta)$ a výplaty členům koalice jsou $(h^0{}_1, h^0{}_2)=(5, 2)$.

- Stabilita koalice {1,3}:

$h_1 + h_3 = 7$ podmínka racionality
$h_1 \geq 4.5$ podmínka stability: $L=\{1\}$
$h_3 \geq 1.5$ podmínka stability: $L=\{3\}$

Vnitrokoaliční jádro je neprázdné a tedy koalice {1,3} je stabilní.
Optimální strategie je $(a^0{}_1,\ a^0{}_3)=(\beta, \beta)$ a výplaty členům koalice jsou $(h^0{}_1, h^0{}_3)=(5, 2)$.

- Stabilita koalice {2,3}:

$h_2 + h_3 = 4$ podmínka racionality
$h_2 \geq 1.5$ podmínka stability: $L=\{2\}$
$h_3 \geq 1.5$ podmínka stability: $L=\{3\}$

Vnitrokoaliční jádro je neprázdné a tedy koalice {2,3} je stabilní.
Optimální strategie je $(a^0{}_2,\ a^0{}_3)=(\alpha, \alpha)$ a výplaty členům koalice jsou $(h^0{}_2, h^0{}_3)=(2, 2)$.

- Tři stabilní řešení koaliční hry:
  - Koaliční struktura: {{1,2}, {3}}
    Strategie: $((a^0{}_1,a^0{}_2),\ a^0{}_3) = ((\beta,\beta),\beta)$

Výplaty: $((h^0_1,h^0_2), h^0_3) = ((5, 2), 1)$

- Koaliční struktura: $\{\{1,3\}, \{2\}\}$
  Strategie: $((a^0_1,a^0_3), a^0_2) = ((\beta, \beta),\beta)$
  Výplaty: $((h^0_1,h^0_3), h^0_2) = ((5, 2), 1)$
- Koaliční struktura: $\{\{2,3\}, \{1\}\}$
  Strategie: $((a^0_2,a^0_3), a^0_1) = ((\alpha, \alpha), \alpha)$
  Výplaty: $((h^0_2,h^0_3), h^0_1) = ((2, 2), 4)$

Diskuse:

Otázkou zůstává, kterou hru ze tří výše uvedených variant budou racionální hráči hrát. Z rozdělení výplat pro tři uvedené koaliční struktury vyplývá:

- Pro každého hráče je výhodné být v koalici s jedním ze spoluhráčů, lhostejno s kterým. Pro žádného hráče není výhodné zůstat sám mimo koalici: výplata 1. hráče (předsedy) se zmenší z 5 na 4, výplata 2. nebo 3. hráče (člena komise) se zmenší ze 2 na 1. Pokud nedojde k dohodě o přerozdělení výplat v koalicích, pak záleží na náhodě, která ze tří uvedených variant hry se bude hrát.
- Všechny koalice mají prostor na přerozdělení výplat. Přerozdělení výplat koalice $\{2,3\}$ je kontraproduktivní: vždy musí poškodit jednoho člena komise, pro kterého pak bude výhodné jít do koalice s předsedou. Naproti tomu přerozdělení výplat koalice $\{1,2\}$ nebo $\{1,3\}$ je produktivní: sleví-li předseda jen nepatrně ze své výplaty, např. z 5 na 4.9, pak to znamená zvýšení výplaty koaličního člena z 2 na 2.1 a to stačí, aby příslušný člen komise šel raději do koalice s předsedou než s druhým členem komise.

Příklad 3.2.2:

Uvažujme situaci, která se od situace popsáné v předchozím příkladě 3.2.1, liší způsobem odměňování členů komise. Kvalitativní odlišnost je dvojí: 1) firmy odměňují všechny členy komise podle stejných principů (nerozlišují mezi předsedou a prostým členem), 2) firmy odměňují nejenom za výsledek hlasování (přidělení zakázky), ale i za snahu (hlasování pro přidělení zakázky), byť neúspěšnou.

Konkrétně a kvantitativně: jestliže firma α zakázku získá v jednomyslném hlasování (3:0) pak každému členu vyplatí 1, jestliže ji získá po "bojovém" hlasování (2:1), pak těm, kteří pro ní hlasovali vyplatí 3, jestliže ji nezíská po "bojovém" hlasování (1:2), pak jedinému členu, který pro ní hlasoval, vyplatí 1 a konečně jestliže ji jednomyslně nezíská (0:3), pak nikomu nedá nic. Firma β postupuje obdobně s jediným rozdílem: při získání zakázky po bojovém hlasování vyplatí těm, kteří pro ni hlasovali nikoliv 3, ale 4.

Popsanou situaci formalizujeme jako konečnou hru 3 hráčů $<I,\{A_i: i\in I\},\{H_i: i\in I\}>$, kde $I=\{1,2,3\}$, $A_1=A_2=A_3=\{\alpha, \beta\}$ a hodnoty výplatních funkcí H_1, H_2, H_3 jsou zadány zarámovanou částí tabulky 3.2.4. Všichni hráči jsou racionální (úplatní) a snaží se maximalizovat svou výplatu a to i tvorbou koalic.

člen a_1:	α	α	α	α	β	β	β	β
člen a_2:	α	α	β	β	α	α	β	β
člen a_3:	α	β	α	β	α	β	α	β
$H_1(a_1,a_2,a_3)$:	1	3	3	1	1	4	4	1
$H_2(a_1,a_2,a_3)$:	1	3	1	4	3	1	4	1
$H_3(a_1,a_2,a_3)$:	1	1	3	4	3	4	1	1
vítězná firma:	α	α	α	β	α	β	β	β
$\sum H_i(a_1,a_2,a_3)$:	3	7	7	9	7	9	9	3

Tab. 3.2.4

K dané hře v normálním tvaru budeme konstruovat hru v koaličním tvaru a to ve dvou variantách: s maximinovou charakteristickou funkcí a s neurčitostní charakteristickou funkcí. Z posledního řádku tabulky 3.2.4 vyplývá:

$$v(\{1,2,3\}) = 9.$$

Z rovnoprávného (symetrického) postavení všech hráčů vyplývá

$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}),$$
$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\})$$

a stači tedy vypočitat pouze např. $v(\{1\})$ a $v(\{1,2\})$ pro $v=v_{mm}$ a pro $v=v_{av}$, což je provedeno v následujících dvou tabulkách 3.2.5a,b.

$A(\{1,2\}) \setminus A(\{3\})$	α	β	v_{mm}	v_{av}
α,α	1+1=2	3+3=6	2	(2+6)/2=4
α,β	3+1=4	1+4=5	4	(4+5)/2=4.5
β,α	1+3=4	4+1=5	4	(4+5)/2=4.5
β,β	4+4=8	1+1=2	2	(8+2)/2=5
			$v_{mm}(\{1,2\})=4$	$v_{av}(\{1,2\})=5$

Tab.3.2.5.a

$A(\{1\}) \setminus A(\{2,3\})$	α,α	α,β	β,α	β,β	v_{mm}	v_{av}
α	1	3	3	1	1	(1+3+3+1)/4=2
β	1	4	4	1	1	(1+4+4+1)/4=2.5
					$v_{mm}(\{1\})=1$	$v_{av}(\{1\})=2.5$

Tab.3.2.5.b

Výsledky výpočtů jsou sumarizovány v následující tabulce 3.2.6.

K	{1,2,3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1}	{2}	{3}
$v_{mm}(K)$	9	4	4	4	1	1	1
$v_{av}(K)$	9	5	5	5	2.5	2.5	2.5

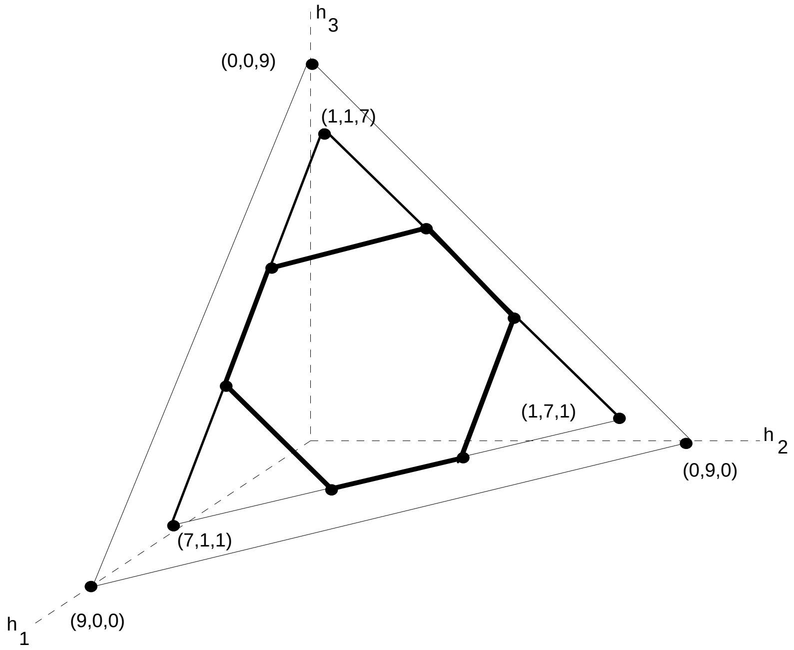
Tab.3.2.6

Nejdříve vyřešíme *koaliční hru s maximinovou charakteristickou funkcí*, tj. hru $<I, v_{mm}>$. Podmínky stability velké koalice {1,2,3} jsou (viz definice 3.2.4):

$h_1 + h_2 + h_3 = 9$	podmínka racionality
$h_1 + h_2 \geq 4$	podmínka stability: $L=\{1,2\}$
$h_1 + h_3 \geq 4$	podmínka stability: $L=\{1,3\}$
$h_2 + h_3 \geq 4$	podmínka stability: $L=\{2,3\}$
$h_1 \geq 1$	podmínka stability: $L=\{1\}$
$h_2 \geq 1$	podmínka stability: $L=\{2\}$
$h_3 \geq 1$	podmínka stability: $L=\{3\}$

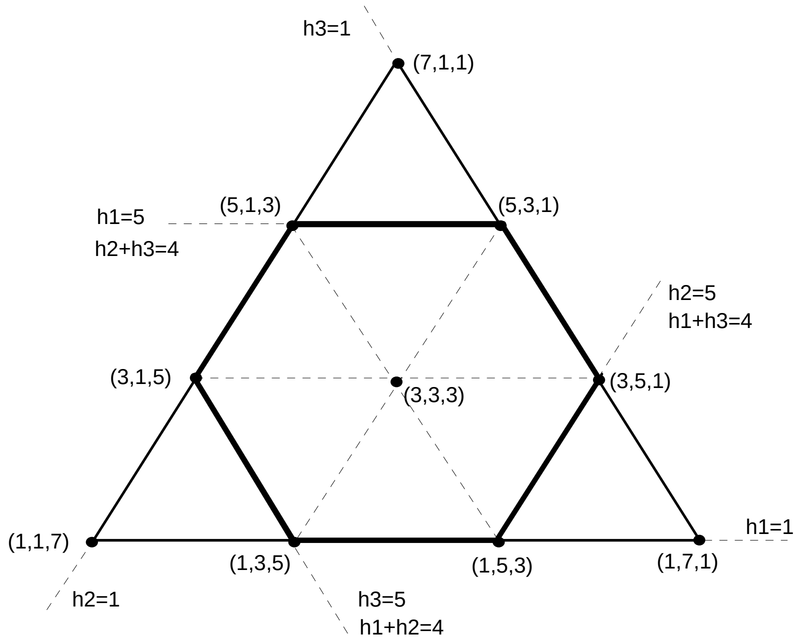
Sečteme-li šest nerovností vyjadřujících podmínky stability dostáváme $3.(h_1 + h_2 + h_3) \geq 15$, neboli $h_1 + h_2 + h_3 \geq 5$, což znamená, že všechny podmínky stability mohou být splněny, aniž by byly vyčerpány zdroje zaručené podmínkou racionality. Jádro hry (=jádro velké koalice hry) je tedy neprázdné a velká koalice je stabilní.

Jádro hry je zobrazeno na obr 3.2.1. Trojice bodů (9,0,0), (0,9,0), (0,0,9) zadává rovinu vyjařující podmínku racionality. Body (7,1,1), (1,7,1), (1,1,7) jsou vrcholy trojúhelníka ležícího v této rovině a všechny body tohoto trojúhelníka splňují kromě podmínky racionality také podmínky stability pro $L=\{1\},\{2\},\{3.\}$ Konečně šestiúhelník vykreslený na obrázku zobrazuje jádro hry, tj. množinu bodů splňujících jak podmínku racionality, tak i všechny podmínky stability.



Obr.3.2.1

Na obr.3.2.2 je trojúhelník o vrcholech (7,1,1), (1,7,1), (1,1,7) zobrazen podrobněji v tzv. barycentrických souřadnicích. Strany pravidelného šestiúhelníka, představujícího jádro hry, leží na přímkách $h_1 = 1$, $h_2 = 1$, $h_3 = 1$, $h_1 = 5$ (neboli, což je totéž $h_2 + h_3 = 4$), $h_2 = 5$ (neboli $h_1 + h_3 = 4$), $h_3 = 5$ (neboli $h_1 + h_2 = 4$) - porovnej s podmínkami stability.



Obr.3.2.2

Řešením koaliční hry $<I, v_{mm}>$ s maximinovou charakteristickou funkcí je následující trojice:

- Koaliční struktura: {{1,2,3}}
- Strategie: $\{(a^0{}_1, a^0{}_2, a^0)\} = \{(\alpha, \beta, \beta), (\beta, \alpha, \beta), (\beta, \beta, \alpha)\}$ - viz tab. 3.2.4,
- Výplaty: $(h^0{}_1, h^0{}_2, h^0{}_3) = (3, 3, 3)$

Nyní vyřešíme *koaliční hru s neurčitostní charakteristickou funkcí*, tj. hru $<I, v_{av}>$. Podmínky stability velké koalice {1,2,3} jsou (viz definice 3.2.4):

$h_1 + h_2 + h_3 = 9$ podmínka racionality

$h_1 + h_2 \geq 5$ podmínka stability: $L=\{1,2\}$

$h_1 + \quad + h_3 \geq 5$ podmínka stability: $L=\{1,3\}$

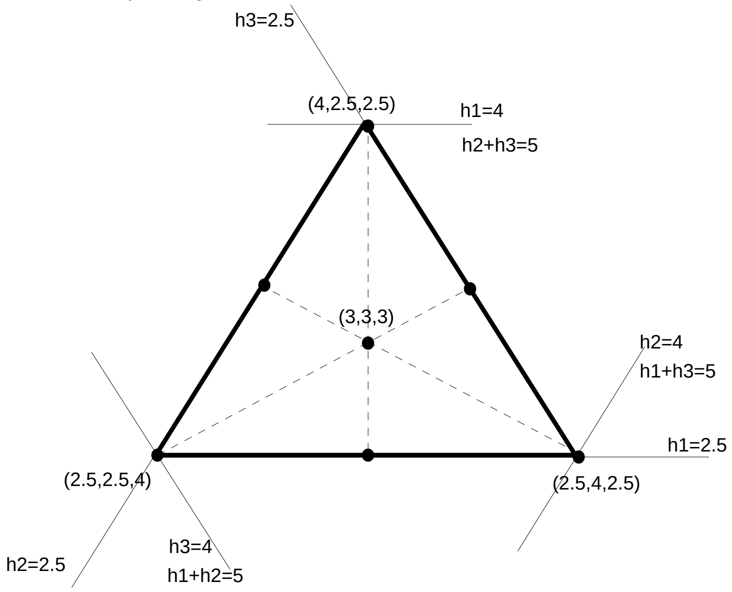
$h_2 + h_3 \geq 5$ podmínka stability: $L=\{2,3\}$

$h_1 \geq 2.5$ podmínka stability: $L=\{1\}$

$h_2 \geq 2.5$ podmínka stability: $L=\{2\}$

$h_3 \geq 2.5$ podmínka stability: $L=\{3\}$

Sečteními šest nerovností vyjadřujících podmínky stability dostáváme $3.(h_1 + h_2 + h_3) \geq 22.5$, neboli $h_1 + h_2 + h_3 \geq 7.5$, což znamená, že všechny podmínky stability mohou být splněny aniž by byla porušena podmínka racionality. Jádro hry (=jádro velké koalice hry) je neprázdné a velká koalice je tedy stabilní. Jádro hry je zobrazeno rovnostranným trojúhelníkem na obr. 3.2.3.



Obr. 3.2.3

Řešením koaliční hry $<I, v_{av}>$ s neurčitostní charakteristickou funkcí je následující trojice:

- Koaliční struktura: $\{\{1,2,3\}\}$
- Strategie: $\{(a^0{}_1, a^0{}_2, a^0)\} = \{(\alpha, \beta, \beta), (\beta, \alpha, \beta), (\beta, \beta, \alpha)\}$ - viz tab. 3.2.4,
- Výplaty: $(h^0{}_1, h^0{}_2, h^0{}_3) = (3, 3, 3)$

Příklad 3.2.3:

Uvažujme hru tří hráčů s dvouprvkovými množinami strategií $A_1=A_2=A_3=\{1, 2\}$ a s hodnotami výplatních funkcí H_1, H_2, H_3 zadanými v zarámované částí tabulky 3.2.7.

a_1:	1	1	1	1	2	2	2	2
a_2:	1	1	2	2	1	1	2	2
a_3:	1	2	1	2	1	2	1	2
$H_1(a_1,a_2,a_3)$:	-2	1	1	10	-1	-4	12	-1
$H_2(a_1,a_2,a_3)$:	1	-4	3	-5	-2	2	-6	3
$H_3(a_1,a_2,a_3)$:	1	3	-4	-5	3	2	-6	-2
$\sum H_i(a_1,a_2,a_3)$:	0	0	0	0	0	0	0	0

Tab. 3.2.7

Z tabulky 3.2.7 je zřejmé - viz poslední řádek - že se jedná o hru s nulovým součtem. K jejímu převod u do koaličního tvaru použijeme tedy maximinovou charakteristickou funkci. Z posledního řádku tab. 3.2.7 vyplývá, že

$$v_{mm}(\{1,2,3\}) = 0.$$

Hodnoty maximinové charakteristické funkce pro ostatní koalice jsou počítány v tabulkách 3.2.8.a-f.

$A(\{1,2\}) \setminus (\{3\})$	1	2	v_{mm}
1,1	-2+1=-1	1-4=-3	-3
1,2	1+3=4	10-5=5	4
2,1	-1-2=-3	-4+2=-2	-3
2,2	12-6=6	-1+3=2	2
			$v_{mm}(\{1,2\})$ =4

Tab. 3.2.8.a

$A(\{1,3\}) \setminus (\{2\})$	1	2	v_{mm}
1,1	-2+1=-1	1-4=-3	-3
1,2	1+3=4	10-5=5	4
2,1	-1+3=2	12-6=6	2
2,2	-4+2=-2	-1-2=-3	-3
			$v_{mm}(\{1,3\})$ =4

Tab. 3.2.8.b

$A(\{2,3\}) \setminus (\{1\})$	1	2	v_{mm}
1,1	1+1=2	-2+3=1	1
1,2	-4+3=-1	2+2=4	-1
2,1	3-4=-1	-6-6=-12	-12
2,2	-5-5=-10	3-2=1	-10
			$v_{mm}(\{1,2\})$ =1

Tab. 3.2.8.c

$A(\{1\}) \setminus A(\{2,3\})$	1,1	1,2	2,1	2,2	v_{mm}
1	-2	1	1	10	-2
2	-1	-4	12	-1	-4
					$v_{mm}(\{1\})$=-2

Tab. 3.2.8.d

$A(\{2\}) \setminus A(\{1,3\})$	1,1	1,2	2,1	2,2	v_{mm}
1	1	-4	-2	2	-4
2	3	-5	-6	3	-6
					$v_{mm}(\{2\})$=-4

Tab. 3.2.8.e

$A(\{3\}) \setminus A(\{1,2\})$	1,1	1,2	2,1	2,2	v_{mm}
1	1	-4	3	-6	-6
2	3	-5	2	-2	-5
					$v_{mm}(\{3\})$=-5

Tab. 3.2.8.f

Výsledky výpočtu hodnot charakteristické jsou sumarizovány v následující tabulce 3.2.9.

K	{1,2,3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1}	{2}	{3}
$v_{mm}(K)$	0	4	4	1	-2	-4	-5

Tab. 3.2.9

Podmínky stability velké koalice {1,2,3} jsou (viz definice 3.2.4):

$h_1 + h_2 + h_3 = 0$ podmínka racionality

$h_1 + h_2 \geq 4$ podmínka stability: L={1,2}

$h_1 + \quad + h_3 \geq 4$ podmínka stability: $L=\{1,3\}$
$h_2 + h_3 \geq 1$ podmínka stability: $L=\{2,3\}$
$h_1 \geq -2$ podmínka stability: $L=\{1\}$
$h_2 \geq -4$ podmínka stability: $L=\{2\}$
$h_3 \geq -5$ podmínka stability: $L=\{3\}$

Velká koalice je evidentně nestabilní. Žádnému jednotlivému hráči se sice nevyplatí z velké koalice vystoupit, ale každé dvoučlenné koalici ano. Vzhledem k záporným zaručeným výplatám jednotlivých hráčů se nevyplatí vystupovat ani z dvoučlenných koalic (všechny mají kladnou hodnotu zaručené výplaty). Existují tedy tři stabilní koaliční struktury

- Koaliční struktura: $\{\{1,2\}, \{3\}\}$
  Strategie: $((a^0_1,a^0_2), (a^0_3)) = ((1, 2), 2)$
  Výplaty: $((h^0_1,h^0_2), h^0_3) = ((2, 2), -4)$
- Koaliční struktura: $\{\{1,3\}, \{2\}\}$
  Strategie: $((a^0_1,a^0_3), a^0_2) = ((1,2), 2)$
  Výplaty: $((h^0_1,h^0_3), h^0_2) = ((2, 2), -4)$
- Koaliční struktura: $\{2,3\}, \{1\}\}$
  Strategie: $((a^0_2,a^0_3), a^0_1) = ((1,1), 2)$
  Výplaty: $((h^0_2,h^0_3), h^0_1) = ((0.5, 0.5), -1)$

Porovnáme-li uvedené tři varianty z hlediska výplat jednotlivých hráčů je zřejmé, že je výhodné být v koalici s 1. hráčem, tj. 1. hráč si může vybírat koaličního partnera, kdežto 2. a 3. hráč spolu soutěží o to být v koalici s 1. hráčem. V této soutěži mohou tito hráči nabídnout 1. hráči asymetrické rozdělení koaliční výhry ve svůj neprospěch a ve prospěch 1. hráče, např. místo rozdělení (2, 2) rozdělení (3, 1). V každém případě bude se hrát první nebo druhá varianta.