2. KONEČNÉ HRY 2 HRÁČŮ

Definice 2.1:

Konečná hra dvou (racionálních) hráčů je speciální případ hry v normálním tvaru (viz definice 1.1.2)

$$\langle I, \{A_i: i\in I\}, \{H_i: i\in I\}\rangle$$

kde $I=\{1,2\}$ a kde systémy strategií A_1, A_2 obou (racionálních) hráčů jsou konečnými množinami.

Poznámky 2.2:

1. Formální popis her dvou hráčů můžeme výrazně zjednodušit tím, že systémy strategií A_1, A_2 označíme po řadě A a B, tj. položíme-li:

$$A_1=A=\{a_1,a_2,...,a_m\},$$
$$A_2=B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$$

a obdobně výplatní funkce H_1, H_2 označíme po řadě H a G. Tyto funkce představují zobrazení kartézského součinu A×B do množiny reálných čísel a mohou být reprezentovány dvěma maticemi $\boldsymbol{H}=(h_{ij})$, $\boldsymbol{G}=(g_{ij})$ typu m×n, kde $h_{ij}=H(a_i,b_j)$ a $g_{ij}=G(a_i,b_j)$ a nebo jedinou bimaticí $(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})=(h_{ij}, g_{ij})$ téhož typu - viz následující maticové schéma:

$$\begin{array}{ccccc} & b_1 & b_2 & ... & b_n \\ a_1 & (h_{11}, g_{11}) & (h_{12}, g_{12}) & ...... & (h_{1n}, g_{1n}) \\ a_2 & (h_{21}, g_{21}) & (h_{22}, g_{22}) & ...... & (h_{2n}, g_{2n}) \\ ... & ...... & ...... & & ...... \\ a_m & (h_{m1}, g_{m1}) & (h_{m2}, g_{m2}) & ...... & (h_{mn}, g_{mn}) \end{array}$$

Všimněme si, že bimaticí $(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})=(h_{ij}, g_{ij})$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$ je konečná hra dvou hráčů jednoznačně zadána a tedy můžeme tuto hru s touto bimaticí ztotožnit. Řádkům bimatice odpovídají strategie prvého hráče a sloupcům strategie druhého hráče (proto také nazýváme prvého hráče řádkovým a druhého hráče sloupcovým). Hru zadanou bimaticí typu m×n

$$(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$$

nazýváme také ***bimaticovou hrou typu*** m×n .

2. Konečné hry dvou hráčů mohou být roztříděny následujícím způsobem:
   - Antagonistické (maticové) hry
   - Neantagonistické (bimaticové) hry
     - Nekooperativní hry
     - Kooperativní hry
       - Hry s nepřenosnou výhrou
       - Hry s přenosnou výhrou

   Všechny uvedené typy her budou dále podrobně pojednány.

2.1. Antagonistické hry

Definice 2.1.1:

Antagonistická hra typu m×n je hra v normálním tvaru $\langle I, \{A_i: i\in I\}, \{H_i: i\in I\}\rangle$

- se dvěma racionálními hráči, tj. $I=\{1,2\}$,
- s m strategiemi prvého a n strategiemi druhého hráče, tj. $A_1=\{a_1^{(1)},a_1^{(2)},...,a_1^{(m)}\}$, $A_2=\{a_2^{(1)},a_2^{(2)},...,a_2^{(n)}\}$,
- s nulovým součtem, tj. pro všechna $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$ platí $H_1(a_1,a_2) + H_2(a_1,a_2) = 0$, neboli $H_2(a_1,a_2) = - H_1(a_1,a_2)$.

Poznámky 2.1.1:

1. Nulový součet výplat vyjadřuje antagonističnost hry: zájmy obou hráčů jsou přesně protichůdné, výše výhry jednoho hráče je přesně rovna výši prohry druhého hráče

2. Antagonistickou hru můžeme také definovat jako speciální případ bimaticové hry (***H,G***) - viz definice a poznámky 2.1 - pro kterou platí:

$$(\forall i)(\forall j)\ [\ g_{ij} = -\ h_{ij}\ ]$$

neboli, což je totéž,

$$(\forall i)(\forall j)\ [\ h_{ij} + g_{ij} = 0].$$

3. Vzhledem k právě uvedeným vztahům je zřejmé, že antagonistická hra je jednoznačně určena jedinou libolně zvolenou maticí z dvojice matic ***H,G*** - proto antagonistické hry nazýváme také ***maticovými hrami***. Zpravidla volíme matici ***H,*** to souvisí s tím, že hru většinou komentujeme a analyzujeme z pozice 1.hráče (ztotožňujeme se s ním) a 2.hráči přisuzujeme úlohu protivníka.
4. Princip realizace hry. Hráči volí své strategie navzájem nezávisle. Je-li prvek matice ***H*** ležící na průsečíků zvolených strategií (řádku a sloupce) kladné číslo, pak 1.hráč vyhrál a 2.hráč vyplatí 1.hráči částku rovnou tomuto číslu. Je-li hodnota prvku vyjádřena záporným číslem, pak vyhrál 2.hráč a 1.hráč vyplatí 2.hráči obnos rovný absolutní hodnotě tohoto záporného čísla.
5. Oba hráči jsou při svém rozhodování plně informováni (jedná se o hru s úplnou informací), tj. oba znají celou matici ***H***. Každý hráč je racionální, sleduje výhradně svůj zájem a totéž předpokládá i o svém protivní kovi. Navíc: každý hráč ví, že protivník je racionální (navíc: každý hráč ví, že každý hráč ví, že protivník je racionální, atd.). Všechny tyto znalosti tvoří tzv. ***společnou znalost*** (common knowledge).

Definice 2.1.2:

Nechť $f(x,y)$ je funkce definovaná pro $x\in X$ a $y\in Y$. Bod $(x_0,y_0)\in X\times Y$ se nazývá ***sedlovým bodem*** funkce $f(x,y)$ vzhledem k množině $X\times Y$, jestliže platí

$$f(x,y_0) \le f(x_0,y_0) \le f(x_0,y)$$

pro všechna $x\in X$ a $y\in Y$.

Věta 2.1.1:

Nechť $f(x,y)$ je funkce definovaná pro $x\in X$ a $y\in Y$ a nechť existují veličiny

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \quad \text{a} \quad \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Potom platí:

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \ \le\ \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Důkaz:

Z definice minima a maxima vyplývá platnost následujících dvou nerovností:

$$\min_{y\in Y} f(x,y) \le f(x,y) \quad \text{pro každé pevně zvolené } x\in X,$$

$$f(x,y) \in \max_{x\in X} f(x,y) \ \text{ pro každé pevně zvolené } y\in Y.$$

Spojením právě uvedených nerovností dostáváme

$$\min_{y\in Y} f(x,y) \le \max_{x\in X} f(x,y),$$

a odtud, vzhledem k tomu, že levá strana poslední nerovnosti nezávisí na y, můžeme psát

$$\min_{y\in Y} f(x,y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Nyní, jelikož prává strana nezávisí na x, lze získanou nerovnost přepsat do tvaru

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x,y) \ \le\ \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y),$$

což mělo být dokázáno.

Věta 2.1.2:

Bod $(x_0,y_0)\in X\times Y$ je sedlovým bodem funkce $f(x,y)$ vzhledem k množině $X\in Y$ právě tehdy, když platí:

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x,y) \ = \ \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x,y) \ = \ f(x_0,y_0).$$

Důkaz:

1. Nechť $(x_0,y_0)\in X\times Y$ je sedlovým bodem funkce $f(x,y)$. Potom pro všechna $x\in X$ a $y\in Y$ platí

$$f(x,y_0) \le f(x_0,y_0) \le f(x_0,y).$$

Odtud dostáváme

$$\max_{x\in X} f(x_0,y) \le f(x_0,y_0) \le \min_{y\in Y} f(x,y_0),$$

a dále

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) \le f(x_0,y_0) \le \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y).$$

Podle předchozí věty však máme

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \ \le\ \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x,y)$$

a tedy musí platit

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) = f(x_0,y_0) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y).$$

Definice 2.1.3:

Uvažujme hru zadanou maticí $\boldsymbol{H}=(h_{ij})$ typu $m\times n$ a definujme veličiny

$$\alpha_i = \min_j \{h_{ij}\},\ \ i=1,2,...,m,$$
$$\alpha = \max_i \{\alpha_i\} = \max_i \{ \min_j \{h_{ij}\}\},$$
$$\beta_j = \max_i \{h_{ij}\},\ \ j=1,2,...,n,$$
$$\beta = \min_j\{\beta_j\} = \min_j\{ \max_i \{h_{ij}\}\}.$$

Veličina α se nazývá ***dolní cenou hry*** a veličina β ***horní cenou hry***.

Maximinová strategie 1.hráče je strategie 1.hráče s indexem i^* pro který platí:

$$\alpha_{i*} = \alpha = \max_i \{\alpha_i\}.$$

Minimaxová strategie 2.hráče je strategie 2.hráče s indexem j^* pro který platí:

$$\beta_{j*} = \beta = \min_j \{\beta_j\}.$$

Minimaxové strategie ve hře jsou maximinová strategie 1.hráče a minimaxová strategie 2.hráče.

Poznámky 2.1.2:

1. Veličiny α_i, α, β_j, β a minimaxové strategie mužeme počítat např. v následující tabulce 2.1.1.

A/B	b_1	b_2	....	b_n	$\alpha_i=\min_j\{h_{ij}\}$
a_1	h_{11}	h_{12}	....	h_{1n}	α_1
a_2	h_{21}	h_{22}	....	h_{2n}	α_2
....	....	....	....	....	....
a_m	h_{m1}	h_{m2}	....	h_{mn}	α_m
$\beta_j=\max_i\{h_{ij}\}$	β_1	β_2	....	β_n	

Tab.2.1.1.

2. Veličiny α_i, α, β_j, β mají následující názorný význam:
   - α_i je zaručená minimální výhra 1.hráče pokud volí svou i-tou strategii, tj. při $a_i\in A$.
   - α je zaručená minimální výhra 1.hráče pokud volí svou maximinovou strategii a_{i*}.
   - β_j je největší možná prohra 2.hráče (nejnižší možná výhra 1.hráče) pokud volí svou j-tou strategii, tj. při $\beta_j\in B$.
   - β je největší možná prohra 2.hráče (nejnižší možná výhra 1.hráče) pokud volí svou minimaxovou strategii b_{j*}.
3. Podle věty 2.1.1 je vždy $\alpha \le \beta$.
4. Je-li speciálně $\alpha=\beta$, pak podle věty 2.1.2 minimaxové strategie definují sedlový bod výplatní matice. Hodnotu $\nu=\alpha=\beta$ pak nazýváme ***cenou hry***. V tomto případě existuje jednoduché řešení hry. Jsou jím minimaxové strategie. Odchýlí-li se jeden hráč od své minimaxové strategie a druhý se své minimaxové stra tegie přidržuje, pak ten, který se odchýlil, prodělává a ten, který se se neodchýlil, získává. V případě $\alpha=\beta$ představují minimaxové strategie optimální (rovnovážné, stabilní) řešení hry. Je-li $\alpha\le\beta$, pak neexistuje optimální řešení hry vymezené definicí 2.1.1.

Definice 2.1.4:

Strategie a_s 1.hráče dominuje strategií a_r téhož hráče ($a_r, a_s\in A$), jestliže pro j=1,2,..,n (pro všechna $b_j\in B$) platí:

$$h_{rj} \le h_{sj}.$$

Jestliže platí ostrá nerovnost $h_{rj} < h_{sj}$, pak říkáme, že s***trategie a_s dominuje strategií a_r silně***.

Strategie a^* je dominantní strategií 1.hráče, jestliže dominuje všechny ostatní strategie 1.hráče.

Strategie b_s 2.hráče dominuje strategií b_r téhož hráče ($b_r, b_s\in B$), jestliže pro i=1,2,..,m (pro všechna $a_i\in A$) platí:

$$h_{ir} \ge h_{is}.$$

Jestliže platí ostrá nerovnost $h_{ir} > h_{is}$, pak říkáme, že s***trategie b_s dominuje strategií b_r silně***.

Strategie b^* je dominantní strategií 2.hráče, jestliže dominuje všechny ostatní strategie 2.hráče.

Poznámky 2.1.3:

1. Používání dominované strategie je pro každého hráče nevýhodné a racionální hráč ji proto nepoužívá. Pro 1. hráče užití dominované strategie znamená, že jeho výhra nebude nikdy (tj. nezávisle na tom jakou strategii použije protivník) větší než při použití dominující strategie. Pro 2.hráče užití dominované strategie znamená, že jeho prohra bude vždy (tj. nezávisle na tom jakou strategii použije 1.hráč) aspoň tak velká jako při použití dominující strategie.
2. ***Analýza dominování*** by měla vždy předcházet vlastnímu řešení hry. Vyloučení dominovaných strategií vede k jednodušší ekvivalentní hře se stejným řešením.

Příklad 2.1.1:

Uvažujme maticovou hru typu 3×3 zadanou následující tabulkou 2.1.2:

A/B	b_1	$\mathbf{b_2}$	b_3	$\beta_i=\min_j\{h_{ij}\}$
a_1	4	-3	-2	-3
a_2	0	-1	3	-1
$\mathbf{a_3}$	3	**1**	2	**1**
$\beta_j=\max_i\{h_{ij}\}$	4	**1**	3	

Tab. 2.1.2.

V tomto příkladě jest $\alpha=\beta=1$, hra má sedlový bod a existuje optimální (rovnovážné, stabilní) řešení dané minimaxovými strategiemi, tj. trojicí:

$$(a_{i*}, b_{j*}, \nu) = (a_3, b_2, 1).$$

Jakékoliv jednostranné odchýlení od tohoto řešení má za následek snížení výplaty tomu hráči, který změnil svou strategii.

Příklad 2.1.2:

Uvažujme maticovou hru typu 3×3 zadanou následující tabulkou 2.1.3:

A/B	b_1	b_2	b_3	$\alpha_i=\min_j\{h_{ij}\}$
a_1	0	3	2	**0**
a_2	2	-2	4	-2
a_3	-1	0	1	-1
$\beta_j=\max_i\{h_{ij}\}$	**2**	3	4	

Tab. 2.1.3.

V tomto příkladě jest $\alpha=0<2=\beta$, tj. dolní cena je menší než horní cena. Neexistuje tedy cena hry a tedy ani stabilní řešení hry. Bude-li 2.hráč držet svou minimaxovou strategii b_1, pak je pro 1.hráče výhodné přejít od minimaxové strategie a_1 k strategii a_2 a tak zvýšit svou výhru z 0 na 2. Bude-li 1.hráč držet strategii a_2, pak je pro 2.hráče výhodné změnit strategii b_1 na b_2, a změnit tak prohru -2 na výhru 2, atd., atd... Při tomto postupu dojde k následujícímu cyklickému střídání strategií a cen hry:

$$(a_1, b_1, 0), (a_2, b_1, 2), (a_2, b_2, -2), (a_1, b_2, 3), (a_1, b_1, 0), (a_2, b_1, 2), \ldots$$

Toto pravidelné střídání strategií není optimálním řešením. K tomu, abychom mohli obecně formulovat pojem optimálního řešení, a toto řešení nalézt, potřebujeme zobecnit pojem maticové hry (viz definice 2.1.5).

Na hře zadané tabulkou 2.1.3 si všimněme, že strategie a_3 1.hráče je dominována strategií a_1. Podobně strategie b_3 2.hráče je dominována strategií b_1. Dominované strategie racionální hráči nikdy nepoužijí a proto je můžeme z popisu hry vyloučit. Místo hry popsané tabulkou 2.1.3 mužeme uvažovat ekvivalentní hru (tj. hru se stejným řešením) definovanou tabulkou 2.1.4.

A/B	b_1	b_2	$\alpha_i=\min_j\{h_{ij}\}$
a_1	0	3	**0**
a_2	2	-2	-2
$\beta_j=\max_i\{h_i\}$	**2**	3	

Tab. 2.1.4.

Definice 2.1.5:

Mějme maticovou hru s prostory strategií $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ a s výplatní maticí $\boldsymbol{H}=(h_{i,j})$, kde $h_{ij}=\boldsymbol{H}(a_i,b_j)$. ***Smíšené rozšíření této hry*** je hra s prostory strategií

$$P=\{\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,...,p_m)^T : \sum p_i=1, \boldsymbol{p}\geq\boldsymbol{0}\},\quad Q=\{\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,...,q_n)^T : \sum q_i=1, \boldsymbol{q}\geq\boldsymbol{0}\}$$

a s výplatní funkcí

$$\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \sum_i\sum_j p_i h_{ij} q_j = \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{q}\ .$$

Poznámky 2.1.4:

1. Strategie a_i, b_j původní maticové hry nazýváme ***ryzími(čistými)strategiemi*** a jejich konečné množiny A, B prostory ryzích (čistých) strategií. Strategie $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ rozšířené hry nazýváme ***smíšenými strategiemi*** a jejich nekonečné množiny P, Q prostory smíšených strategií. Smíšená strategie představuje pravděpodobnostní rozdělení (distribuci) na množině čistých strategií.
2. Čistá strategie je speciální případ smíšené strategie, např. čistá strategie $a_i\in A$ je smíšená strategii $\boldsymbol{p}$ s $p_i=1$ a $p_k=0$ pro $k\neq i$.
3. Výplatní funkce $\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ udává střední (očekávanou) hodnotu výplaty používá-li 1.hráč smíšenou strategii $\boldsymbol{p}\in P$ a 2.hráč strategii $\boldsymbol{q}\in Q$. Podle konvence je $\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ střední hodnota výplaty pro 1.hráče; výplata pro 2. hráče je opačná, tj. $-\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$.

Definice 2.1.6:

Řešením maticové hry (rozšířené maticové hry) nazýváme trojici $(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0,\nu)$, pro kterou platí

$$(\forall\boldsymbol{p}\in P)(\forall\boldsymbol{q}\in Q)\ [\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}_0) \leq \underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0) \leq \underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q})],\qquad \nu=\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0).$$

Strategie $\boldsymbol{p}_0\in P$, $\boldsymbol{q}_0\in Q$ nazýváme ***rovnovážnými*** (***optimálními***) ***strategiemi*** 1. a 2.hráče a hodnotu ν nazýváme ***cenou hry***.

Poznámky 2.1.5:

1. Setrvává-li 1.hráč na své optimální strategii $\boldsymbol{p}_0$, pak jakákoliv odchylka 2.hráče od jeho optimální strategie $\boldsymbol{q}_0$ (tj. volba jiné strategii $\boldsymbol{q}\in Q$, $\boldsymbol{q}\neq\boldsymbol{q}_0$) má za následek jeho ztrátu, neboť $\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0)\leq\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q})$. Obráceně, setrvává-li 2.hráč na své optimální strategii $\boldsymbol{q}_0$, pak jakákoliv odchylka 1.hráče od jeho optimální strategie $\boldsymbol{p}_0$ (tj. volba jiné strategii $\boldsymbol{p}\in P$, $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{p}_0$) má za následek jeho ztrátu, neboť $\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}_0)\leq\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0)$. V tomto smyslu jsou optimální strategie rovnovážnými strategiemi.
2. Je-li cena hry nulová, tj. $\nu=\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0)=0$, nazýváme hru ***spravedlivou***.
3. Bod $(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0)$ splňující podmínku z definice 2.1.6 nazýváme také ***Nashovým rovnovážným bodem***. Obecnější definice Nashovova rovnovážného bodu (nikoliv jenom pro hry s nulovým součtem a jenom s dvěma hráči) bude podána později.

Věta 2.1.3:

Nechť $(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0,\nu)$ je řešením maticové hry s výplatní maticí ryzích strategií $\boldsymbol{H}=(h_{i,j})$. Potom $(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0,\nu+c)$ je řešením maticové hry s výplatní maticí $\boldsymbol{H}' = (h'_{i,j}) = \boldsymbol{H}+\boldsymbol{C}$, kde $h'_{i,j} = h_{i,j}+c$.

Neboli: zvětšení všech prvků výplatní matice o tutéž konstantu má za následek stejné zvětšení ceny hry, optimální strategie obou hráčů se však nemění.

Důkaz:

Pro výplatní matici smíšených strategií platí

$$\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}'(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{H}'\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}^T\underline{\mathbf{Hq}} + \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{q} = \underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})+\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{q} = \underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})+c.$$

Poslední rovnost vyplývá z řetězce rovností:

$$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{q} = \sum_i\sum_j p_i c q_j = c\sum_i\sum_j p_i q_j = c\sum_i p_i\sum_j q_j = c.1.1 = c.$$

Protože $\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0$ jsou optimálními strategiemi hry s maticí $\boldsymbol{H}$ platí pro všechna $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ (viz definice 3.1.5)

$$\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}_0) \leq \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0) \leq \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}).$$

Odtud plyne

$$\underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}_0)+c \le \underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0)+c \le \underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q})+c,$$

neboli

$$\underline{\underline{H}}'(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}_0) \le \underline{\underline{H}}'(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0) \le \underline{\underline{H}}'(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}).$$

Tedy $\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0$ jsou také optimálními strategiemi hry s maticí **H'** a pro cenu této hry platí

$$\nu' = \underline{\underline{H}}'(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0) = \underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0)+c = \nu+c.$$

Věta 2.1.4 (***základní věta teorie maticových her,*** J.v.Neumann)**:**

Smíšené rozšíření každé maticové hry má (optimální, rovnovážné řešení) řešení.

Důkaz:

Na základě věty 2.1.3 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že všechny prvky matice $\boldsymbol{H}$ jsou kladné, tj. $h_{i,j} > 0$. Kdyby tomu tak nebylo, stačí přičíst ke všem prvkům matice **H** dostatečně velké kladné číslo. Získáme tak hru, která má stejné optimální strategie jako hra původní.

Má-li matice $\boldsymbol{H}$ všechny prvky kladné, pak jistě existuje kladné číslo ν takové, že pro libovolně pevně zvolené $\boldsymbol{p}_0 \in P$ a pro všechna $\boldsymbol{q} \in Q$ platí

$$\nu \le \boldsymbol{p}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{q} = \underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{q}). \tag{1}$$

Funkce $f(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{q}$ je na omezené, neprázdné a uzavřené množině Q spojitá a tedy musí mít na množine Q bod minima. Protože $f(\boldsymbol{q})$ je na celé množině Q kladná, musí být i její minimum kladné. Vezměme ν za toto minimum.

K tomu, aby nerovnost (1) platila, je nutné a stačí, aby platila pro všechny ryzí strategie, tj. pro vektory **q** tvaru (1,0,...,0), (0,1,...,0),..., (0,0,...,1). Dosadíme-li tyto strategie do (1) obdržíme následující systém nerovností:

$$\begin{aligned} h_{11}\,p_{01} + h_{21}\,p_{02} + \ldots + h_{m1}\,p_{0m} &\ge \nu \\ h_{12}\,p_{01} + h_{22}\,p_{02} + \ldots + h_{m2}\,p_{0m} &\ge \nu \\ &\ldots \\ h_{1n}p_{01} + h_{2n}\,p_{02} + \ldots + h_{mn}\,p_{0m} &\ge \nu \end{aligned} \tag{2}$$

Jelikož $\boldsymbol{p}_0$ je pravděpodobnostní distribuce, dále platí

$$p_{01} + p_{02} + \ldots + p_{0m} = 1, \qquad p_{0i} \ge 0 \ \text{ pro i}=1,2,\ldots,m. \tag{3}$$

Strategie $\boldsymbol{p}_0$ bude rovnovážnou (optimální) strategií 1.hráče a ν bude cena hry, jestliže vedle nerovnosti $\nu \le \boldsymbol{p}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{q}$ bude současně platit také nerovnost

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{q}_0 \le \nu \tag{4}$$

pro libovolně pevně zvolené $\boldsymbol{q}_0 \in Q$ a pro všechna $\boldsymbol{p} \in P$. K tomu stačí, aby tato nerovnost byla splněna pro vektory $\boldsymbol{p}$ tvaru (1,0,...,0), (0,1,...,0),..., (0,0,...,1), tj. bude-li platit

$$\begin{aligned} h_{11}\,q_{01} + h_{12}\,q_{02} + \ldots + h_{1n}\,q_{0n} &\le \nu \\ h_{21}\,q_{01} + h_{22}\,q_{02} + \ldots + h_{2n}\,q_{0n} &\le \nu \\ &\ldots \\ h_{m1}q_{01} + h_{m2}\,q_{02} + \ldots + h_{mn}\,q_{0n} &\le \nu \end{aligned} \tag{5}$$

Vzhledem k tomu, že $\boldsymbol{q}_0$ je pravděpodobnostní distribuce platí

$$q_{01} + q_{02} + \ldots + q_{0n} = 1, \qquad q_{0j} \ge 0 \ \text{ pro } j=1,2,\ldots,n. \tag{6}$$

Přejdeme-li od proměnných p_{0i}, q_{0j} k proměnným

$$x_i = p_{0i}/\nu, \quad i=1,2,\ldots,m; \quad y_j = q_{0j}/\nu, \quad j=1,2,\ldots,n \tag{7}$$

můžeme soustavy nerovností (2) přepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} h_{11}\,x_1 + h_{21}\,x_2 + \ldots + h_{m1}\,x_m &\ge 1 \\ h_{12}\,x_1 + h_{22}\,x_2 + \ldots + h_{m2}\,x_m &\ge 1 \\ &\ldots \\ h_{1n}x_1 + h_{2n}\,x_2 + \ldots + h_{mn}\,x_m &\ge 1 \end{aligned} \tag{8}$$

a soustavu nerovností (5) přepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} h_{11}\,y_1 + h_{12}\,y_2 + \ldots + h_{1n}\,y_n &\le 1 \\ h_{21}\,y_1 + h_{22}\,y_2 + \ldots + h_{2n}\,y_n &\le 1 \\ &\ldots \end{aligned} \tag{9}$$

$$h_{m1}y_1 + h_{m2}\ y_2 + \ldots + h_{mn}\ y_n \le 1$$

Rovnice (3), (6) pak dostávají podobu

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1/\nu, \qquad x_i \ge 0 \text{ pro } i=1,2,\ldots,m. \tag{10}$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1/\nu, \qquad x_j \ge 0 \text{ pro } j=1,2,\ldots,n. \tag{11}$$

1.hráč usiluje o maximalizaci veličiny ν a tedy o minimalizaci funkce

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \min \tag{12}$$

na množině přípustných řešení vymezené nerovnostmi (8) a (10). Na druhé straně 2.hráč usiluje o minimalizaci veličiny ν a tedy o maximalizaci funkce

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \max \tag{13}$$

na množině přípustných řešení vymezené nerovnostmi (9) a (11). Jedná se dvojici vzájemně duálních úloh lineárního programování. Jejich vyřešením nalezneme hodnoty veličin

$$x_1, x_2, \ldots ,x_m,\ y_1, y_2, \ldots ,y_n,\ \nu$$

a pomocí nich podle (7) smíšené řešení rozšířené maticové hry ($\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0,\nu$), kde cenu hry třeba snížit o konstantu, o kterou byly zvětšeny všechny prvky matice $\boldsymbol{H}$.

Poznámky 2.1.6:

1. Připomeňme, že obecnou úlohu lineárního programování (dvojici úloh navzájem duálních) lze formulovat v přehledném maticovém zápisu takto: jsou dány reálná matice $\boldsymbol{A}$ typu $m\times n$, reálné vektory $\boldsymbol{c}$ typu $m\times 1$, $\boldsymbol{b}$ typu $n\times 1$ a hledají se reálné vektory $\boldsymbol{x}$ typu $m\times 1$, $\boldsymbol{y}$ typu $n\times 1$ pro které platí:

$$\boxed{\begin{array}{c}\boldsymbol{Ay}\le\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{y}\ge\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \max\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \min\end{array}}$$

V prvé úloze hledáme nezáporný vektor $\boldsymbol{y}$ maximalizující lineární formu $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ při dodržení podmínky $\boldsymbol{Ay}\le\boldsymbol{c}$ a v druhé úloze hledáme nezáporný vektor $\boldsymbol{x}$ minimalizující lineární formu $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ při dodržení podmínky $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{b}$. Úlohy jsou navzájem duální: při přechodu od jedné úlohy k druhé úloze:

- matice jedné úlohy ($\boldsymbol{A}$ nebo $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$) vznikne transponováním matice druhé úlohy,
- vektory $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ si navzájem vymění místa,
- symbol nerovnosti ≤ se změní na ≥ nebo obráceně,
- symboly *max* se změní na *min* nebo obráceně.

Dvojice úloh na kterou se převádí řešení maticových her je speciální případ dvojice duálních úloh lineárního programovaní, ve kterých:

- $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H} = (h_{ij})$ s $h_{ij}>0$ pro všechna i,j,
- $\boldsymbol{b}$ je vektor tvaru $(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$ dimenze n a $\boldsymbol{c}$ je vektor téhož tvaru dimenze m.

2. Celkový postup řešení maticové hry je následující:
   - Výpočet dolní a horní ceny hry. Jestliže se sobě rovnají, pak řešení je dáno ryzími (čistými) minimaxovými strategiemi, které představují řešení. Jestliže se navzájem nerovnají, pak je třeba hledat řešení v oblasti smíšených strategií.
   - Analýza dominanování a vyloučení dominovaných strategií, pokud existují. Eliminace dominovaných strategií není nutná, ale zjednodušuje další řešení
   - Má-li matice hry $\boldsymbol{H}=(h_{i,j})$ některé prvky nekladné (záporné nebo nulové), pak hodnotu všech prvků zvětšíme o stejnou konstantu tak, aby všechny prvky matice byly kladné. Podle věty 2.1.3 má nová hra stejné optimální strategie obou hráčů jako hra původní (nikoliv však stejnou cenu).
   - Po této úpravě je problém nalezení optimálních smíšených strategií je převeden na řešení úlohy lineárního programování: minimalizovat účelovou funkci (12) při splnění podmínek (8), nebo maximalizovat účelovou funkci (13) při splnění podmínek (9). Toto řešení nalezneme standardními metodami, např. simplexovou metodou - viz dále věta 2.1.5 a příklad 2.1.4.
   - Pokud jsme v předpředchozím bodě upravovali matici hry přičtením konstanty ke všem jejím prvkům, pak nyní opravíme cenu hry, vypočtenou v předchozím bodě, odečtením této konstanty.

3. Je-li maticová hra typu 2×2 nebo 2×n nebo m×2, pak můžeme úlohu lineárního programování řešit jednoduchými analytickými postupy (bez znalosti obecných metod lineárního programování) - viz následující příklad 2.1.3..

Příklad 2.1.3:

Budeme hledat řešení maticové hry typu 3×3 zadané v příkladu 2.1.2 tabulkou 2.1.3, která po eliminaci dominovaných strategií přejde na maticovou hru typu 2×2 zadanou tabulkou 2.1.4. Nejprve upravíme vyplatní matici na tvar se všemi prvky kladnými (přičtením konstanty 3 ke všem jejím prvkům). Dostaneme tak tab.2.1.5.

A/B	b_1 q_{01}	b_2 q_{02}	$\alpha_i=\min_j\{h_{ij}\}$
a_1 p_{01}	3	6	**3**
a_2 p_{02}	5	1	1
$\beta_j=\max_i\{h_i\}$	**5**	6	

Tab. 2.1.5

Dále budeme hledat optimální řešení hry dvojím nezávislým způsobem:

1) Obecnou metodou spočívající v převodu na úlohu lineárního programování (viz důkaz věty 3.1.4).
2) Speciální grafickou metodou použitelnou pouze pro řešení her typu 2×2, 2×n nebo m×2.

Ad 1)

V našem konkrétním příkladě mají rovnice (2),(3), (5),(6), formulující podmímky pro rovnovážné řešení, n ásledující konkrétní tvar (2'),(3'), (5'),(6'):

$$\begin{aligned} 3p_{01} + 5p_{02} &\geq v \\ 6p_{01} + \ p_{02} &\geq v \qquad (2') \\ p_{01} + \ p_{02} &= 1 \qquad (3') \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3q_{01} + 6q_{02} &\leq v \\ 5\,q_{01} + \ q_{02} &\leq v \qquad (5') \\ q_{01} + \ q_{02} &= 1 \qquad (6') \end{aligned}$$

Odpovídající dvojice duálních úloh lineárního programovaní (8'),(12') a (9'),(13') je speciálním případem o becných úloh (8),(12) a (9),(13):

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\geq 1 \\ 6x_1 + \ x_2 &\geq 1 \qquad (8') \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &= \min \qquad (12') \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3y_1 + 6y_2 &\leq 1 \\ 5y_1 + \ y_2 &\leq 1 \qquad (9') \\ y_1, y_2 &\geq 0 \\ y_1 + y_2 &= \max \qquad (13') \end{aligned}$$

Řešením dvojice duálních úloh nalezneme:

$$(x_1, x_2) = (3/27, 4/27) \qquad\qquad (y_1, y_2) = (5/27, 2/27)$$
$$x_1 + x_2 = 7/27 \qquad\qquad y_1 + y_2 = 7/27$$

Vrátíme-li se zpět od úlohy lineárního programování k řešení dané hry, dostaneme podle (10), (11) pro cenu hry

$$v' = 1/(x_1 + x_2) = 1/(y_1 + y_2) = 27/7$$

a dále pro otimální smíšené strategie podle (7)

$$(p_{01}, p_{02}) = (x_1 v', x_2 v') = (3/7, 4/7), \qquad (q_{01}, q_{02}) = (y_1 v', y_2 v') = (5/7, 2/7)\,.$$

Cena hry v' se vztahuje ke hře dané tabulkou 2.1.5. Cena původní hry definované tabulkou 2.1.4 je

$$v = v' - 3 = 6/7.$$

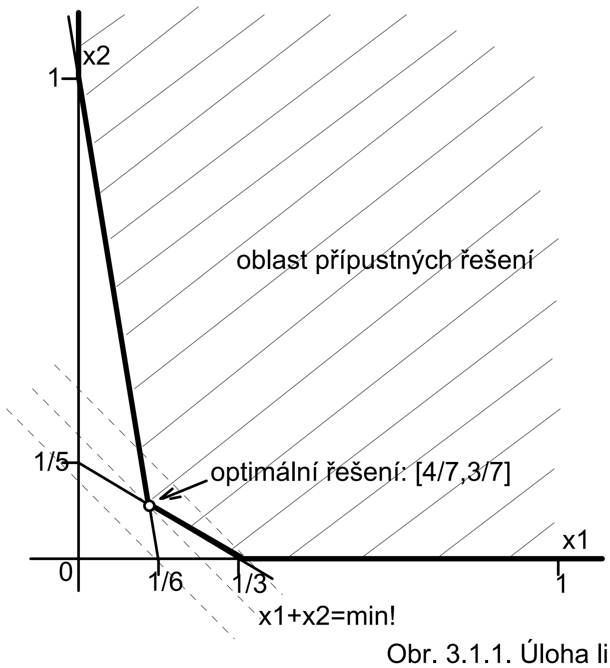
Řešení této hry je tedy trojice

$$(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0, v) = ((4/7, 3/7), (5/7, 2/7), 6/7)$$

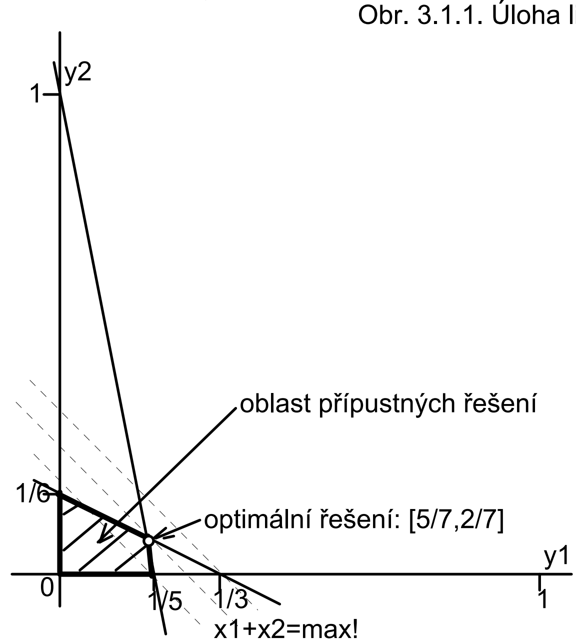
a řešení prapůvodní hry popsané tabulkou 2.1.3 je trojice

$$(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0, v) = ((4/7, 3/7, 0), (5/7, 2/7, 0), 6/7)\,.$$

Na obr. 3.1.1, resp. 3.1.2 je vyšrafováním zobrazena oblast přípustných řešení (8') primární úlohy, resp .oblast přípustných řešení (9') duální úlohy a je označen bod ve kterém účelová funkce (12') dosahuje svéhominima, resp. bod ve kterém účelová funkce (13') dosahuje svého maxima.



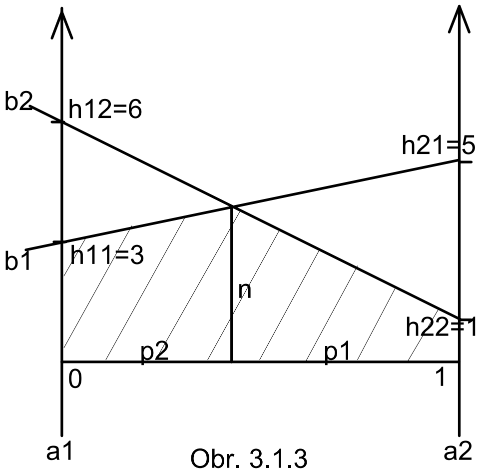
Obr. 3.1.1. Úloha lin.programování



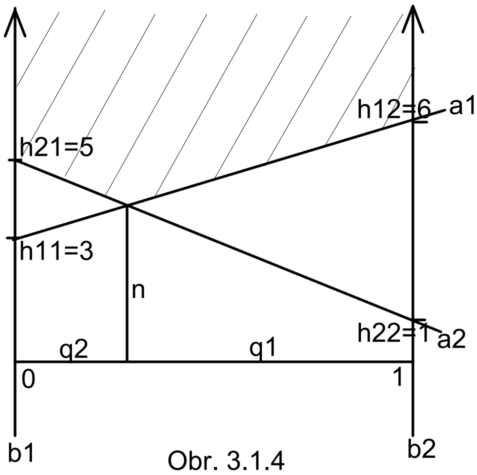
Obr. 3.1.2. Duální úloha lin.programování

Ad 2)

Na obr. 3.1.3 a 3.1.4 je ilustrován speciální způsob řešení antagonistických her neodkazující na obecné metody lineárního programování. Na obr. 3.1.3 je řešena hra z pohledu 1.hráče. Pořadnice a1, a2 označují ryzí strategie 1. hráče a přímky b1,b2 ryzí strategie 2.hráče. Bod na vodorovné úsečce 0-1 označuje smíšenou strategii 1.hráče ($p1$,$p2$). Je-li $p1$=1 a tedy $p2$=0, dostáváme ryzí strategii $a1$, je-li obráceně $p2$=1 a tedy $p1$=0, dostáváme ryzí strategii $a2$. Velikost pořadnice vztyčená v libovolném bodě úsečky 0-1 až do průsečíku s přímkou b1, resp. b2 udává velikost výhry 1.hráče volí-li 2.hráč ryzí strategii b1, resp. b2. Optimální smíšená strategie 1.hráče je daná bodem na úsečce 0-1 ve kterém vztyčená pořadnice prochází průsečíkem přímek b1 a b2. Délka této pořadnice udává cenu hry. Jakákoliv odchylka od této smíšené strategie umožňuje 2.hráči snížit výhru 1.hráče. Na obr. 3.1.4 je hra řešena z pohledu 2.hráče.



Obr. 3.1.3



Obr. 3.1.4

Věta 2.1.5 (***obecný algoritmus řešení maticových her - přizpůsobená simplexová metoda***)**:**

Řešení každé maticové hry s výplatní maticí $\boldsymbol{H}=(h_{ij})$ lze nalézt následujícím postupem:

(1) *Případná úprava výplatní matice*. Nejsou-li všechny prvky matice kladné, pak toho docílíme přičtením vhodné konstanty ke všem prvkům. Tato operace nemá vliv na výpočet optimálních strategií, ale jen zvýší cenu hry o tuto konstantu (viz věta 2.1.3). V tomto případě se vypočtená cena hry po skončení práce algoritmu o zvolenou konstantu opět sníží. V dalším již předpokládáme $h_{ij}>0$ pro všechna i,j.

(2) *Zobrazení simplexovou tabulkou*. Tvar této tabulky a její počáteční vyplnění - viz tab.2.1.6. Tabulka je vždy tvořena čtyřmi částmi: maticí (na počátku je totožná s výplatní maticí), dolním řádkem (s počátku je obsazen minus jedničkami), pravým sloupcem (s počátku je obsazen jedničkami) a pravým dolním rohem (s počátku obsahuje nulu).

	y_1	y_2	....	y_n	
x_1	h_{11}	h_{12}	....	h_{1n}	1
x_2	h_{21}	h_{22}	....	h_{2n}	1
....	....	....	....	....	....
x_m	h_{m1}	h_{m2}	....	h_{mn}	1
	-1	-1	....	-1	0

Tab. 2.1.6

(3) *Výběr pivotního prvku*. Pivotní prvek leží na průsečíku pivotního řádku a pivotního sloupce. Pivotním sloupcem může být vybrán libovolný sloupec, který obsahuje v dolním řádku záporné číslo. Pivotní řádek musí být vybrán tak, aby pivotní prvek byl kladný a tak, aby v pivotním řádku byl poměr prvku v pravém sloupci ku pivotnímu prvku co nejmenší.

(4) *Jordanova transformace tabulky podle vybraného pivotního prvku*. Nová tabulka vznikne z výchozí tabulky způsobem naznačeným v tab.2.1.7.a,b. Tabulka 2.1.7.a představuje stav simplexové tabulky (včetně dolního řádku, pravého sloupce a pravého dolního rohu) před transformací, přičemž vybraný pivotní prvek je vyšrafován. Tabulka 2.1.7.b představuje stav simplexové tabulky po provedené transformaci. Všechny prvky mají novou hodnotu: pivotní prvek s hodnotou a má nyní hodnotu $1/a$, prvek pivotního řádku (různý od pivotního prvku) s hodnotou b změní hodnotu na b/a, prvek pivotního sloupce (různý od pivotního prvku) s hodnotou c změní hodnotu na $-c/a$ a ostatní prvky neležící ani v pivotním řádku ani v pivotním sloupci změní původní hodnotu d na hodnotu $d - b.c/a$, přičemž b je hodnota prvku ležícího na průsečíku pivotního řádku a sloupce transformovaného prvku a c je hodnota prvku ležícího na průsečíku pivotního sloupce a řádku taransformovaného prvku. Navíc se prohodí označení pivotního řádku a sloupce: bylo-li původně x_i, y_j, pak v nové tabulce bude y_j, x_i - viz tab.2.1.7a,b.

		y_j			
		...	...	...	
x_i		a	...	b	
		...	...	...	
		c	...	d	
		...	...	...	

Tab.2.1.7.a

⇒

		x_i			
		...	...	...	
y_j		$1/a$	...	b/a	
		...	...	...	
		$-c/a$	...	$d-b.c/a$	
		...	...	...	

Tab.2.1.7.b

(5) *Test.* Zbývají-li v dolním řádku tabulky (bez pravého dolního rohu) nějaké záporné prvky, pak návrat k bodu (3), jinak pokračování bodem (6).
(6) *Odečtení výsledků z výsledné tabulky.* Hodnota prvku v pravém dolním rohu je převrácenou hodnotou ceny hry. Optimální strategie 1. hráče se určí takto: Proměnné x_i, jejíž označení zůstane na levé straně tabulky, je přiřazena nulová pravděpodobnost. Proměnné x_i, jejíž označení se přesune nad tabulku, je přiřazena pravděpodobost rovná hodnotě prvku v dolním řádku vyděleném hodnotou prvku v pravém dolním rohu. Optimální strategie 2. hráče se určí obdobně: Proměnné y_j, jejíž označení zůstane nad tabulkou, je přiřazena nulová pravděpodobnost. Proměnné y_j, jejíž označení se přesune před levou stranu tabulky, je přiřazena pravděpodobost rovná hodnotě prvku v levém sloupci vyděleném hodnotou prvku v pravém dolním rohu.
(7) *Případná úprava ceny hry.* Pokud v kroku (1) byla upravována výplatní matice, pak je třeba odečíst od vypočtené ceny hry kladnou konstantu o kterou byly v kroku (1) zvětšeny všechny prvky výplatní matice, abychom získaly cenu původní hry.

Příklad 2.1.4:

Řešme maticovou hru zadanou výplatní maticí **H** = (h_{ij}) zapsanou v tabulce 2.1.8.a.

1	-2	5
-1	0	-2
-3	1	0

Tab.2.1.8.a

Dolní cena hry je $\alpha = \max_i \{ \min_j \{h_{ij}\}\} = -2$, a horní cena $\beta = \min_j\{ \max_i \{h_{ij}\}\} = 1$. Hra tedy nemá řešení v ryzích strategiích a je třeba hledat řešení v prostoru smíšených strategií. Analýzou dominování dále zjistíme, že žádná ryzí strategie 1.hráče nedominuje žádnou jinou jeho ryzí strategií a stejně tomu tak je i v případě 2.hráče. Hru tedy nelze redukovat, zůstává hrou typu 3×3 a nezbývá než ji řešit převodem na úlohu lineárního programování. Prvním krokem je úprava výplatní matice podle věty 2.1.3 (přičtení konstanty 4 ke všem jejím prvkům) tak, aby všechny její prvky byly kladné. Získáme tak matici ***H'*** = (h'_{ij}), kde $h'_{ij}=h_{ij}+4$ - viz tab.2.1.8.b.

5	2	9
3	4	2
1	5	4

Tab.2.1.8.b

Tab.2.1.8.c představuje výchozí simplexovou tabulku příslušnou k upravené výplatní matici ***H'***. Za pivotní sloupec je možné volit libovolný sloupec (v dolním řádku pod výplatní maticí jsou samá záporná čísla), volme tedy 1. sloupec. Pro volbu pivotního řádku zkoumáme poměry prvků v pravém sloupci ku prvkům v pivo tním sloupci: 1/5, 1/3, 1/1. Nejmenší je 1/5 a tedy za pivotní řádek volíme 1. řádek.

	y_1	y_2	y_3	
x_1	5	2	9	1
x_2	3	4	2	1
x_3	1	5	4	1
	-1	-1	-1	0

Tab.2.1.8.c

Následuje Jordanova transformace tabulky 2.1.8.c podle určeného pivotního prvku (v tabulce je vyšrafován), výsledkem je tabulka 2.1.8.d (nezapomeneme na prohození proměnných příslušných k pivotnímu prvku: $x_1 \leftrightarrow y_1$).V dalším kroku je výběr pivotního sloupce jednoznačný, neboť v řádku pod maticí je jen jediný záporný prvek. Pro výpočet pivotního řádku počítáme opět poměry: (1/5)/(2/5)=1/2, (2/5)/(14/5)=1/7, (4/5)/(23/5)=4/23. Nejmenší hodnota je 1/7 a tedy pivotním řádkem bude 2. řádek.

	x_1	y_2	y_3	
y_1	1/5	2/5	9/5	1/5
x_2	-3/5	14/5	-17/5	2/5
x_3	-1/5	23/5	11/5	4/5
	1/5	-3/5	4/5	1/5

Tab.2.1.8.d

Následuje Jordanova transformace tabulky 2.1.8.c podle určeného pivotního prvku (prvek (x_2,y_2) - v tabulce vyšrafován), výsledkem je tabulka 2.1.8.e. Označení pivotního řádku a sloupce je přehozeno: $x_2 \leftrightarrow y_2$.

	x_1	x_2	y_3	
y_1	2/7	-2/14	16/7	1/7
y_2	-3/14	5/14	- 17/14	1/7
x_3	5/14	-23/14	103/14	1/7
	1/14	3/14	1/14	2/7

Tab.2.1.8.e

Tab.2.1.8.e je výsledná, neboť všechny prvky dolního řádku pod maticí jsou nezáporné. Z výsledné tabulky odečítáme řešení hry s maticí $\boldsymbol{H'} = (h'_{ij})$ takto:

$v' = 1/(2/7)) = 7/2$, $(x_1, x_2, x_3) = (1/14,\ 3/14, 0)$, $(y_1, y_2, y_3) = (1/7,\ 1/7, 0)$

Cena hry je převrácená hodnota pravého dolního prvku; x_3=0 protože x_3 zůstalo označením řádku; y_3=0 protože y_3 zůstalo označením sloupce. Optimální smíšené strategie jsou:

$(p_1, p_2, p_3) = (x_1 v', x_2 v', x_3 v') = (1/4,\ 3/4, 0)$

$(q_1, q_2, q_3) = (y_1 v', y_2 v', y_3 v') = (1/2,\ 1/2, 0)$

a kompletním řešením hry s maticí $\boldsymbol{H'}$ = je trojice

$((1/4, 3/4, 0), (1/2, 1/2, 0), 7/2)$.

Cena původní hry s maticí $\boldsymbol{H} = (h_{ij})$, $h_{ij} = h'_{ij} - 4$, je

$v = v' - 4 = 7/2 - 4 = -1/2$

a tedy kompletním řešením původní hry s výplatní maticí $\boldsymbol{H}$ je trojice

$((1/4, 3/4, 0), (1/2, 1/2, 0), -1/2)$.

Definice 2.1.7:

Nejlepší odpověď 1. hráče na strategii $\boldsymbol{q}\in Q$ zvolenou 2. hráčem je jakákoliv strategie $\boldsymbol{p}\in P$ 1. hráče patřící do množiny

$$\mathrm{BR}_1(\boldsymbol{q}) = \{\boldsymbol{p}\in P\text{: } (\forall \boldsymbol{p'}\in P)\ [\underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p'},\boldsymbol{q}) \leq \underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})]\} = \\ = \{\arg\max_{\boldsymbol{p}\in P} H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\}$$

Nejlepší odpověď 2. hráče na strategii $\boldsymbol{p}\in P$ zvolenou 1. hráčem je jakákoliv strategie $\boldsymbol{q}\in Q$ 2. hráče patřící do množiny

$$\mathrm{BR}_2(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{q}\in Q\text{: } (\forall \boldsymbol{q'}\in Q)\ [\underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \leq \underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q'})]\} = \\ = \{\arg\min_{\boldsymbol{q}\in Q} \underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\}.$$

(BR značí "Best Response", tj. nejlepší odpověď)

Poznámky 2.1.7:

1. Zřejmě platí:

   $(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0)$ je Nashův rovnovážný bod $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{p}_0\in \mathrm{BR}_1(\boldsymbol{q}_0) \wedge \boldsymbol{q}_0\in \mathrm{BR}_2(\boldsymbol{p}_0)$
2. Jestliže známe strategii, kterou volí protivník, pak je vždy rozumné odpovědět strategií, která patří do množiny nejlepších odpovědí. Je-li protivník racionální a volí $\boldsymbol{q}_0$, pak je naší nejlepší odpovědí $\boldsymbol{q}_0$, kde $(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0)$ je Nashův rovnovážný bod hry. Jestliže však protivník racionální není a volí nějakou jinou strategii $\boldsymbol{q'}\neq\boldsymbol{q}_0$ a my tuto strategii známe (její užití předpokládáme), pak není rozumné volit $\boldsymbol{q}_0$, ale nějakou strategii $\boldsymbol{p}\in\mathrm{BR}_1(\boldsymbol{q'})$. Iracionalní rozhodnutí protivníka můžeme využít ke zvýšení své výplaty.

Příklad 2.1.5:

Uvažujme hru zadanou maticí v tab. 2.1.9

A/B	b_1 q_1	b_2 q_2	$\alpha_i=\min_j\{h_{ij}\}$
a_1 p_1	3	6	**3**
a_2 p_2	5	1	1
$\beta_j=\max_j\{h_{ij}\}$	**5**	6	

Tab.2.1.9

Řešením této hry je trojice $(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0,v) = ((4/7, 3/7), (5/7, 2/7), 27/7)$ - viz příklad 2.1.3. Představme si nyní, že 2. hráč použije nikoliv svou optimální strategii $\boldsymbol{q}_0$=(5/7, 2/7), ale strategii $\boldsymbol{q'}$=(1/2, 1/2). Nejlepší odpovědí 1. hráče je potom strategie:

$$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2)\in\mathrm{BR}_1(\boldsymbol{q'}) = \{\arg\max_{\boldsymbol{p}\in P}\underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q'})\} = \{\arg\max_{\boldsymbol{p}\in P}\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Hq'}\} = \\ =\{\arg\max_{\boldsymbol{p}\in P}(p_1,p_2)\boldsymbol{H}(1/2,\ 1/2)^{\mathrm{T}}\} = \{\arg\max_{\boldsymbol{p}\in P}(p_1,p_2)(9/2,\ 6/2)^{\mathrm{T}}\} =$$

$= \{\arg\max_{p\in P}(9/2p_1 + 6/2p_2)\} = \{\arg 3/2\max_{p\in P}(3p_1 + 2p_2)\} = \{(1,0)\}$.
V posledním kroku bereme v úvahu, že $p_1 + p_2 = 1$, což umožňuje převést úlohu na jednorozměrnou extremalizaci. Hodnota výplatní funkce je

$\underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}')\} = (1,0)\boldsymbol{H}(1/2,\ 1/2)^T = 9/2 = 4.5$ ..... best response proti neoptimální,

což je více než

$\underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0)\} = (4/7,\ 3/7)\boldsymbol{H}(5/7,\ 2/7)^T = 27/7 = 3.85$ ..... optimální proti optimální,

nebo také

$\underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}')\} = (4/7,\ 3/7)\boldsymbol{H}(1/2,\ 1/2)^T = 27/7 = 3.85$ ..... optimální proti neoptimální.

2.2. Nekooperativní hry 2 hráčů s obecným součtem

V předchozí kap. 2.1 jsme se zabývali antagonistickými hrami, tj. hrami 2 hráčů s nulovým součtem. Pro tyto hry platí z moci definice

$$(\forall a_i\in A)(\forall b_j\in B)\ [H(a_i,b_j) + G(a_i,b_j) = 0],$$

neboli stručněji

$$(\forall i)(\forall j)\ [\ h_{ij} + g_{ij} = 0]$$

a tedy tato hra mohla být plně popsána jedinou výplatní funkcí $H(a_i,b_j)$, resp. jedinou výplatní maticí $\boldsymbol{H} = (h_{ij}) = (H(a_i,b_j))$.

Nyní se budeme zabývat obecným typem her 2 hráčů (antagonistické hry jsou jejich zvláštním případem), kdy veličiny $h_{ij} = H(a_i,b_j)$, $g_{ij} = G(a_i,b_j)$ jsou obecně nezávislé a jejich součet může mít (obecně má) různou hodnotu pro různé dvojice strategií (a_i, b_j). V tomto případě úplný popis hry vyžaduje znalost obou výplatních funkcí $H(a_i,b_j)$, $G(a_i,b_j)$, resp. obou výplatních matic $\boldsymbol{H} = (h_{ij})$, $\boldsymbol{G} = (g_{ij})$. Obecná konečná hra 2 hráčů je tedy plně zadána bimaticí $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{G}) = ((h_{ij}, g_{ij}))$ - tyto hry nazýváme proto také ***bimaticovými hrami***.

Řešení neantagonistických her je podstatně rozmanitější než her antagonistických. Zájmy hráčů nemusí být nutně protichůdné a v mnoha případech může být účelná spolupráce (kooperace) hráčů. V případě antagonistických her je kooperace nesmyslná, kooperující hráči by v tomto případě nebyly racionálními hráči - jak vždy předpokládáme.

Kooperace hráčů spočívá v uzavření závazných dohod před vlastní realizací hry a to:

- pouze o volbě strategií bez přerozdělení výher (***kooperativní hry s nepřenosnými výhrami***),
- nejen o volbě strategií, ale i o tom, jak si hráči rozdělí součet výplat získaných v důsledku realizace dohodnutých strategií (***kooperativní hry s přenosnými výhrami***).

Jakákoliv kooperace hráčů může být také zakázána nebo reálně nemožná (***nekooperativní hry***).

Definice 2.2.1:

Bimaticová hra typu m×n je hra v normálním tvaru $<I,\{A_i\!: i\in I\},\{H_i\!: i\in I\}>$ se dvěma racionálními hráči, tj. $I=\{1,2\}$ a s konečnými množinami strategií prvého i druhého hráče.

$$A_1=A=\{a_1,a_2,...,a_m\},\ A_2=B=\{b_1,b_2,...,b_n\},$$

Hra je plně zadána dvojicí matic $(h_{ij})=H(a_i,b_j)$, $(g_{ij})=G(a_i,b_j)$, neboli bimaticí (h_{ij}, g_{ij}), $i=1.,2,...,m$; $j=1,2,...,n$ - viz tab.2.2.1.

A/B	b_1	b_2	....	b_n
a_1	h_{11}, g_{11}	h_{12}, g_{12}	....	h_{1n}, g_{1n}
a_2	h_{21}, g_{21}	h_{22}, g_{22}	....	h_{2n}, g_{2n}
....	....	....	....	....
a_m	h_{m1}, g_{m1}	h_{m2}, g_{m2}	....	h_{mn}, g_{mn}

Tab. 2.2.1.

Příklad 2.2.1:

Uvažujme hru zadanou bimaticí v tabulce 2.2.2.

A/B	b_1	b_2	b_3	$\alpha_i=\min_j\{h_{ij}\}$
a_1	2, 2	3, 1	5, 0	**2**, -
a_2	0, 4	1, 9	3, 3	0, -
$\beta_i=\min_i\{g_{ij}\}$	-, **2**	-, 1	-, 0	

Tab. 2.2.2.

Je-li zakázána kooperace, pak optimálním řešením hry je volba strategií (a_1,b_1) s výplatami (2,2). Obě strategie a_1,b_1 jsou maximinové a bod (2,2) je lokálním extrémem bimatice. Strategie a_1,b_1 jsou rovnovážné: jednostranná odchylka kteréhokoliv hráče od těchto strategií vede ke zmenšení jeho výplaty.

Je-li dovolena dohoda o volbě strategií, ale nikoliv o přerozdělení výher, pak optimálním řešením hry je volba strategií (a_2,b_3) s výplatami (3,3). Kooperací dosáhli oba hráči zvýšení své výplaty, aniž by se přerozdělovaly výhry.

Je-li navíc možná i dohoda o přerozdělení výher, pak optimálním řešením hry je volba strategií (a_2,b_2) s výplatami (1,9). Součet výplat je 10 a po rozdělení mohou být výplaty např. (5,5). Pokud by nedošlo k přerozd ělení, 1. hráč by nepřistoupil na dohodu o volbě strategií (a_2,b_2).

V této kapitole 2.2 se budeme zabývat nekooperativními hrami, v kapitole 2.3 kooperativními hrami s nepřenosnými výhrami a v kapitole 2.3 kooperativními hrami s přenosnými výhrami.

Definice 2.2.2:

Nekooperativní hra 2 hráčů typu m×n je bimaticová hra typu m×n, ve které není možná (z moci defini ce) žádná dohoda o volbách strategií (natož pak o přerozdělení výher) jednotlivých hráčů před vlastní realizací hry. Hráči volí své strategie navzájem nezávisle.

Definice 2.2.3:

Strategie a_s 1. hráče (slabě) dominuje strategií a_r téhož hráče $(a_r,a_s \in A)$, jestliže pro $j=1,2,..,n$ (pro všechna $b_j \in B$) platí:

$$h_{rj} \le h_{sj} \ ,$$

a obdobně ***strategie b_s 2. hráče (slabě) dominuje strategií b_r*** téhož hráče $(b_r,b_s \in B)$, jestliže pro $i=1,2,..,m$ (pro všechna $a_i \in A$) platí:

$$g_{ir} \le g_{js} \, .$$

Strategie a_s 1. hráče silně dominuje strategií a_r téhož hráče $(a_r,a_s \in A)$, jestliže pro $j=1,2,..,n$ (pro všechna $b_j \in B$) platí:

$$h_{rj} < h_{sj} \, ,$$

a podobně ***strategie b_s 2. hráče silně dominuje strategií b_r*** téhož hráče $(b_r,b_s \in B)$, jestliže pro $i=1,2,..,m$ (pro všechna $a_i \in A$) platí:

$$g_{ir} < g_{is} \, .$$

Daná strategie i-tého hráče je (slabě) dominantní strategií i-tého hráče, jestliže (slabě) dominuje všechny ostatní strategie i-tého hráče $(i=1,2)$.

Daná strategie i-tého hráče je silně dominantní strategií i-tého hráče, jestliže ostře dominuje všechny ostatní strategie i-tého hráče $(i=1,2)$.

Poznámky 2.2.1:

1. Relace dominování strategií pro hry s obecným součtem jsou definovány naprosto rovnoprávným způsobem pro oba hráče, na rozdíl od obdobné definice pro antagonistické hry - viz definice 2.1.4.
2. Definice slabé dominance bývá někdy zpřísněna podmínkou $a_r \ne a_s$.
3. Z definice vyplývá, že každá silná dominance je i slabá dominance.
4. Racionální hráč nikdy nehraje dominovanou strategii. Eliminací dominované strategie (jejím vyškrtnutím z množiny strategií) přecházíme k ekvivalentní redukované hře (se stejným řešením, ale menší).

Definice 2.2.4:

Dvojice strategií (a^*,b^*), $a^* \in A$, $b^* \in B$, je ***slabě rovnovážným bodem hry*** (rovnovážným bodem vzhledem k relaci slabého dominování), jestliže a^* je slabě dominantní strategií 1. hráče a b^* je slabě dominantní strategií 2. hráče. Množinu všech rovnovážných bodů hry G vzhledem k relaci slabého dominování označíme symbolem DW(G). (DW =Dominant Weakly.)

Dvojice strategií (a^*,b^*), $a^* \in A$, $b^* \in B$, je ***silně rovnovážným bodem hry*** (rovnovážným bodem vzhledem k relaci silného dominování), jestliže a^* je silně dominantní strategií 1. hráče a b^* je silně dominantní strategií 2. hráče. Množinu všech rovnovážných bodů hry G vzhledem k relaci silného dominování označíme sy mbolem DS(G). (DS =Dominant Strictly.)

Poznámky 2.2.2:

1. Rovnovážné body vyhledem k relacím dominování - pokud existují - lze nalézt iteračním procesem postupného eliminování (vylučování, vyškrtávání) dominovaných strategií: na konci tohoto procesu je pak hra typu 1×1, představující rovnovážný bod. Pokud daná hra rovnovážné body nemá, pak iterační proces vylučování dominovaných strategií muže vést alespoň k redukci hry (k ″zmenšení″ jejího typu) a tím k usnadnění jejího dalšího řešení.
2. Existuje-li silně rovnovážný bod, pak je jen jeden (dokažte sporem) a představuje řešení dané hry. Každá hra má tedy nejvýše jeden silně rovnovážný bod.

Příklady 2.2.2:

- Bimatice v tab.2.2.3 (zarámovaná část tabulky) zadává nekooperativní hru 2 hráčů typu 2×2 (varianta hry ″Vězňovo dilemma″). Zde 1. řádek silně dominuje 2. řádek a 1. sloupec silně dominuje 2. sloupec. Po vyškrtnutí dominovaných 2. řádku a 2. sloupce zbývá dvojice strategií (a_1,b_1) s výplatami (1,1). Tato dvojice strategii představuje silně (a tedy také slabě) rovnovážný bod hry.

A/B	b_1	b_2	$\alpha_i=\min_j\{h_{ij}\}$
a_1	**1, 1**	6, 0	**1**, -
a_2	0, 6	5, 5	0, -
$\beta_j=\min_i\{g_{ij}\}$	- *1*	- 0	

Tab.2.2.3

- Ve hře zadané bimaticí z tabulky 2.2.4 2. řádek slabě dominuje 1. řádek a 2. sloupec slabě dominuje 1. sloupec. Po vyškrtnutí dominovaných 1. řádku a 1. sloupce zbývá dvojice strategií (a_2,b_2) s výplatami (4,3). Tato dvojice strategii představuje slabě (ale *nikoliv* silně) rovnovážný bod hry.

A/B	b_1	b_2	$\alpha_i=\min_j\{h_{ij}\}$
a_1	2, 1	0, 2	0, -
a_2	2, 3	4, 3	***2***, -
$\beta_i=\min_i\{g_{ij}\}$	- 1	- ***2***	

Tab.2.2.4

- Uvažujme hru zadanou bimaticí z tabulky 2.2.5. Postupnými eliminacemi silně dominovaných strategií - viz tabulky 2.2.5.b,c,d (b_3 je dominována b_2, a_2 je dominána a_1, b_1 je dominována b_2) nacházíme nakonec silně dominantní strategie a_1 a b_2, které představují řešení hry s výplatami (1, 2).

A/B	b_1	b_2	b_3	$\alpha_i=\min_j\{h_{ij}\}$
a_1	1, 0	1, 2	0, 1	0, -
a_2	0, 3	0, 1	2, 0	0, -
$\beta_i=\min_i\{g_{ij}\}$	-, 0	-, 1	-, 1	

Tab.2.2.5.a

A/B	b_1	b_2	$\alpha_i=\min_j\{h_{ij}\}$
a_1	1, 0	1, 2	1, -
a_2	0, 3	0, 1	0, -
$\beta_i=\min_i\{g_{ij}\}$	-, 0	-, 1	

Tab.2.2.5.b

A/B	b_1	b_2	$\alpha_i=\min_j\{h_{ij}\}$
a_1	1, 0	1, 2	1, -
$b_j=\min_i\{g_{ij}\}$	-, 0	-, 1	

Tab.2.2.5.c

A/B	b_2	$\alpha_i=\min_j\{h_{ij}\}$
a_1	1, 2	1, -

β_j=min$_i\{g_{ij}\}$	-, 1	

Tab.2.2.5.d

Definice 2.2.5:

Dvojice strategií (a^*,b^*), je ***Nashovým (slabě) rovnovážným bodem*** hry, jestliže platí

$$(\forall a\in A)\ [H(a,b^*) \le H(\underline{a}^*,b^*)]\ \wedge\ (\forall b\in B)\ [G(a^*,b) \le G(a^*,b^*)]\ .$$

Dvojice strategií (a^*,b^*), je ***Nashovým silně rovnovážným bodem*** hry, jestliže platí

$$(\forall a\in A)\ [a\neq a^*\ \Rightarrow\ H(a,b^*) < H(a^*,b^*)]\ \wedge\ (\forall b\in B)\ [b\neq b^*\ \Rightarrow\ G(a^*,b) < G(a^*,b^*)]$$

neboli

$$(\forall a\in A\backslash a^*)\ [H(a,b^*) < H(a^*,b^*)]\ \wedge\ (\forall b\in B\backslash b^*)\ [G(a^*,b) < G(a^*,b^*)]\ .$$

Množinu všech Nashových (slabě) rovnovážných bodů hry G označíme NW(G) a nebo jenom N(G) a množinu všech Nashových silně rovnovážných bodů hry G označíme NS(G).

Příklady 2.2.3:

- Uvažujme hru G zadanou bimaticí v tabulce 2.2.3 (PD, "Prisoner Dilemma", Vězňovo dilema). Zde:

$$\mathrm{DW}(G) = \mathrm{DS}(G) = \mathrm{NW}(G) = \mathrm{NS}(G) = \{(a_1,b_1)\},$$

- Uvažujme hru G zadanou bimaticí v tabulce 2.2.4. Zde:

$$\mathrm{DS}(G) = \emptyset,\quad \mathrm{NS}(G) = \emptyset,\quad \mathrm{DW}(G) = \mathrm{NW}(G) = \{(a_2,b_2)\}$$

- Uvažujme hru G zadanou bimaticí v tabulce 2.2.5.a. Zde:

$$\mathrm{DS}(G) = \mathrm{DW}(G) = \mathrm{NS}(G) = \mathrm{NW}(G) = \{(a_1,b_2)\}$$

- Uvažujme hru G zadanou bimaticí v tab.2.2.6 (SH, "Stag Hunt", Jelen - zajíc)

A/B	b_1	b_2	α_i=min$_j\{h_{ij}\}$
a_1	2, 2	0, 1	0, -
a_2	1, 0	1, 1	1, -
β_i=min$_i\{g_{ij}\}$	- 0	- 1	

Tab.2.2.6

Zde:

$$\mathrm{DS}(G) = \mathrm{DW}(G) = \emptyset,\qquad \mathrm{NW}(G) = \mathrm{NS}(G) = \{(a_1,b_1), (a_2,b_2)\},$$

- Uvažujme hru G zadanou bimaticí v tab.2.2.7 (BoS, "Battle of the Sexes", konflikt mezi manžely).

A/B	b_1	b_2	α_i=min$_j\{h_{ij}\}$
a_1	2, **1**	0, 0	0, -
a_2	0, 0	1, 2	0, -
β_i=min$_i\{g_{ij}\}$	- 0	- 0	

Tab.2.2.7

Zde:

$$\mathrm{DS}(G) = \mathrm{DW}(G) = \emptyset,\qquad \mathrm{NW}(G) = \mathrm{NS}(G) = \{(a_1,b_1), (a_2,b_2)\},$$

- Uvažujme nekooperativní hru 2 hráčů typu 2×2 (MW, "Merchantship-Warship Game", Obchodní loď proti válečné lodi) zadanou bimaticí v tab.2.2.8

A / B	b_1	b_2	α_i=min$_j\{h_{ij}\}$
a_1	0, **1**	1, 0	0, -
a_2	1, 0	0, 1	0, -
β_i=min$_i\{g_{ij}\}$	- 0	- 0	

Tab.2.2.8

Zde:

$$\mathrm{DS}(G) = \mathrm{DW}(G) = \mathrm{NS}(G) = \mathrm{NW}(G) = \emptyset$$

Definice 2.2.6:

Nejlepší odpověďí 1. hráče na strategii $b_j\in B$ zvolenou 2. hráčem je jakákoliv strategie 1. hráče patřící do množiny

$$BR_1(b_j) = \{a\in A: (\forall a_i\in A)\ [H(a,b_j) \geq H(a_i,b_j)]\} =$$
$$= \{\arg\max_{a\in A} H(a,b_j)\}$$

Nejlepší odpovědí 2. hráče na strategii $a\in A$ zvolenou 1. hráčem je jakákoliv strategie 2. hráče patřící do množiny

$$BR_2(a_i) = \{b\in B: (\forall b_j\in B)\ [G(a_i,b) \geq G(a_i,b_j)]\} =$$
$$=\{\arg\max_{b\in B} G(a_i,b)\}.$$

(BR = Best Response, nejlepší odpověď)

Poznámky 2.2.3:

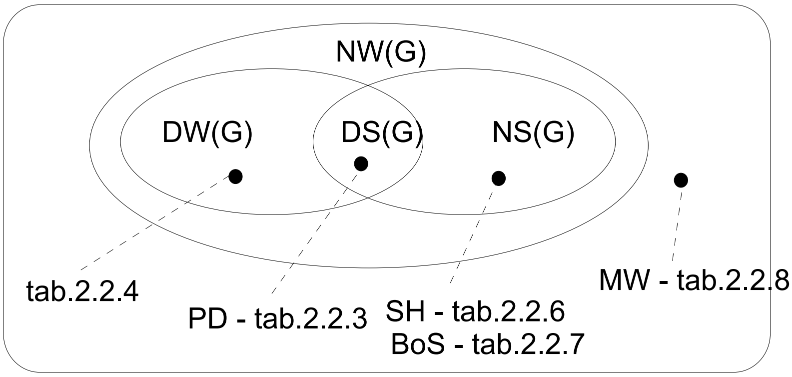
1. Pro množiny rovnovážných bodů DS(G), DW(G), NS(G) a NW(G) dané hry G (viz definice 2.2.4 - 5) platí následující vztahy:

$$DS(G) \subseteq DW(G) \text{ -}$$
$$NS(G) \subseteq NW(G)$$
$$DS(G) \subseteq NS(G)$$
$$DW(G) \subseteq NW(G)$$

První dvě z uvedených inkluzí vyplývají ihned z definic 2.2.4 a 2.2.5. Uvedené čtyři vztahy můžeme přepsat takto:

$$DS(G) \subseteq DW(G) \subseteq NW(G)$$
$$DS(G) \subseteq NS(G) \subseteq NW(G)$$

a nebo znázornit jediným množinovým diagramem - viz obr. 2.2.1.



Obr.2.2.1

2. Nejlepší odpovědi souvisejí s Nashovými rovnovážnými body takto.

$$(a^*,b^*)\in NW(G) \iff a^*\in BR_1(b^*) \wedge b^*\in BR_2(a^*)$$

Dokažte a nebo alespoň ověřte na výše uvedených příkladech.

Postup při řešení nekooperativních her v ryzích strategiích:

1. Má-li hra jediný Nashův rovnovážný bod, pak tento bod představuje optimální řešení hry.
2. Na rozdíl od maticových (antagonistických) her může mít bimaticová hra více Nashových bodů.

Např. hra zadaná bimaticí z tabulky 2.2.6 (SH) má dva rovnovážné body (dvojice strategií (a,b)):

- bod (a_1,b_1) s výplatami (2,2),
- bod (a_2,b_2) s výplatami (1,1).

Racionální hráči, aniž by se domlouvali, volí za řešení prvý bod, které kromě toho, že je stabilní, je také nav íc pro oba výhodnější. Toto řešení je tedy optimálním řešením.

Hra zadaná bimaticí z tabulky 2.2.7 má rovněž dvě rovnovážná řešení:

- bod (a_1,b_1) s výplatami (2,1),
- bod (a_2,b_2) s výplatami (1,2).

1. hráč by rád dal přednost 1. rovnovážnému bodu a 2.hráč 2. bodu. Pokud to však učiní, tj. volí strategie (a_1,b_2) skončí s nejhoršími možnými výplatami (0,0).

Má-li bimaticová hra více rovnovážných strategií, pak je třeba provést podrobnější analýzu hry. Buďto mezi rovnovážnými body nalezneme dominantní otimální bod (hra zadaná tab.2.2.6) a nebo nikoliv (hra zadaná tab.2.2.7) a pak je třeba přejít ke smíšenému rozšíření hry a hledat otimální řešení mezi smíšenými strategiemi (viz dále definice 2.2.7).

3. Navíc existují bimaticové hry, které nemají žádné rovnovážné body (v ryzích strategiích) - viz např. hra MW zadaná bimaticí z tab. 2.2.8.. I v těchto případech je třeba přejít ke smíšenému rozšíření hry a hledat otimální řešení mezi smíšenými strategiemi (viz definice 2.2.7 a dále následující výklad).

Definice 2.2.7:

Mějme bimaticovou hru s prostory strategií $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ a s výplatními maticemi $\boldsymbol{H}=(h_{i,j})$ a $\boldsymbol{G}=(g_{ij})$. ***Smíšené rozšíření této hry*** je hra s prostory strategií

$$P=\{\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,...,p_m)^T : \ \sum p_i=1,\ \mathbf{p}\geq\mathbf{0}\},\quad Q=\{\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,...,q_n)^T : \ \sum q_i=1,\ \mathbf{q}\geq\mathbf{0}\}$$

a s výplatními funkcemi

$$\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \sum_i\sum_j p_i h_{ij} q_j = \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{q}\ ,$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \sum_i\sum_j p_i g_{ij} q_j = \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{q}\ .$$

Nosiče (suporty) smíšených strategií $\boldsymbol{p}\in P$ a $\boldsymbol{q}\in Q$ jsou množiny ryzích strategií, které vstupují do smíšených strategií s nenulovými pravděpodobnostmi, tj.

$$\text{supp}(\boldsymbol{p}) = \{a_i\in A:\ p_i>0\},$$

$$\text{supp}(\boldsymbol{q}) = \{b_j\in B:\ q_j>0\}.$$

Poznámky 2.2.4:

1. Strategie a_i, b_j původní bimaticové hry nazýváme ***ryzími (čistým)i strategiemi*** a jejich konečné množiny A, B prostory ryzích (čistých) strategií. Strategie $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ rozšířené hry nazýváme ***smíšenými strategiemi*** a jejich nekonečné množiny P, Q prostory smíšených strategií. Smíšená strategie představuje pravděpodobnostní rozdělení (distribuci) na množině čistých strategií.
2. Čistá strategie je speciální případ smíšené strategie; např. čistá strategie a_i je smíšená strategii $\boldsymbol{p}$ s $p_i=1$ a $p_k=0$ pro $k\neq i$. Čistá strategie je smíšená strategie jejíž nosič je jednoprvkový.
3. Výplatní funkce $\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ a $\underline{\underline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ udávají střední (očekávané) hodnoty výplat 1. a 2. hráče použije-li 1. hráč smíšenou strategii $\boldsymbol{p}\in P$ a 2. hráč strategii $\boldsymbol{q}\in Q$.

Definice 2.2. 8:

Dvojice strategií $(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)$ je ***Nashův rovnovážný bod smíšeného rozšíření bimaticové hry*** G, tj. $(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)\in \text{N}(G)=\text{NW}(G)$, jestliže platí:

$$(\forall\boldsymbol{p}\in P)[\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}^*) \leq \underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)]\ \wedge\ (\forall\boldsymbol{q}\in Q)[\underline{\underline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}) \leq \underline{\underline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)]$$

Poznámky 2.2.5:

1. Setrvává-li 2. hráč na své rovnovážné strategii $\boldsymbol{q}^*$, pak žádná odchylka 1. hráče od jeho rovnovážné strategie $\boldsymbol{p}^*$ (tj. volba jiné strategii $\boldsymbol{q}\in Q$, $\boldsymbol{q}\neq\boldsymbol{q}^*$) nemůže zvětšit výplatu 1. hráče. Podobně, setrvává-li 1. hráč na své rovnovážné strategii $\boldsymbol{p}^*$, pak jakákoliv odchylka 2. hráče od jeho rovnovážné strategie $\boldsymbol{q}^*$ (tj. volba jiné strategii $\boldsymbol{q}\in Q$, $\boldsymbol{q}\neq\boldsymbol{q}^*$) nemůže zvětšit výplatu 2. hráče. V tomto smyslu jsou rovnovážné strategie optimálními strategiemi.
2. Trojici
$$((\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*),\ \underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*),\ \underline{\underline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*))$$
nazýváme (optimálním) ***řešením bimaticové hry*** zadané bimaticí $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{G})$.
3. Zřejmě platí:
$$(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)\in \text{N}(G) \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{p}^*\in \text{BR}_1(\boldsymbol{q}^*) \wedge \boldsymbol{q}^*\in \text{BR}_2(\boldsymbol{p}^*), \tag{*}$$
kde $\text{BR}_1(\boldsymbol{q}^*)$ resp. $\text{BR}_2(\boldsymbol{p}^*)$ jsou množiny nejlepších odpovědí (Best Responses) 1. hráče na strategii $\boldsymbol{q}^*$ 2. hráče, resp. 2. hráče na strategii $\boldsymbol{p}^*$ 1. hráče, neboli (porovnej s definicí 2.2.6)
$$\text{BR}_1(\boldsymbol{q}^*) = \{\arg\max_{\boldsymbol{p}\in P} H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}^*)\},$$
$$\text{BR}_2(\boldsymbol{p}^*) = \{\arg\max_{\boldsymbol{q}\in Q} G(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q})\}. \tag{**}$$
Výše uvedená ekvivalence (∗) představuje alternativní definici pojmu Nashova rovnovážného bodu. Dokažte platnost ekvivalence.
4. Pro $(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*)\in \text{N}(G)$ zřejmě platí (dokažte):
$$\boldsymbol{p}^*\in \text{BR}_1(\boldsymbol{q}^*) \ \Leftrightarrow\ (\forall\boldsymbol{a}\in \text{supp}(\boldsymbol{p}^*))[\boldsymbol{a}\in \text{BR}_1(\boldsymbol{q}^*)],$$

$$q^* \in \mathrm{BR}_2(p^*) \;\Leftrightarrow\; (\forall b \in \mathrm{supp}(q^*))[b \in \mathrm{BR}_1(q^*)], \qquad (***)$$

tj. spolu se smíšenou nejlepší odpovědí na optimální strategii protihráče jsou nejlepšími odpověďmi také všechny ryzí strategie, které patří do nosiče smíšené strategie. Z vlastností (***) vyplývá, že každý smíšený Nashův rovnovážný bod je jen slabě rovnovovážným bodem (žádný není silně rovnovážným bodem) podle definice 2.2.5.

5. Vlastností (***) lze využít k výpočtu Nashova bodu. Uvažujme např. hru typu 2×2 s $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2\}$. Označme (p^*,q^*) neznámý Nashův rovnovážný bod smíšeného rozšíření hry. Pro nosiče nedegenerovaných smíšených strategií hry typu 2×2 platí $\mathrm{supp}(p^*)=\{a_1,a_2\}$ a $\mathrm{supp}(q^*)=\{b_1,b_2\}$. Potom podle vztahů (**) jsou i ryzí strategie a_1,a_2 (tj. degenerované smíšené strategie (1,0), (0,1)) nejlepšími odpověďmi na q^*. Obdobně ryzí strategie b_1,b_2 (neboli degenerované smíšené strategie (1,0), (0,1)) nejlepšími odpověďmi na p^*. Platí tedy:

$$(1,0).\boldsymbol{H}.(q_1^*,q_2^*)^{\mathrm{T}} = (0,1).\boldsymbol{H}.(q_1^*,q_2^*)^{\mathrm{T}}, \quad q_1^*+q_2^*=1, \qquad \text{(i)}$$

což jsou dvě rovnice o dvou neznámých, ze kterých lze vypočítat $q^*=(q_1^*,q_2^*)$. Podobně ze systému dvou rovnic

$$(p_1^*,p_2^*).\boldsymbol{G}.(1,0)^{\mathrm{T}} = (p_1^*,p_2^*).\boldsymbol{G}.(0,1)^{\mathrm{T}}, \quad p_1^*+p_2^*=1 \qquad \text{(ii)}$$

lze vypočítat $p^*=(p_1^*,p_2^*)$.

Příklady 2.2.4:

Uvažujme hru BoS ("Battle of the Sexes", konflikt mezi manžely) diskutovanou již v rámci serie příkladů 2.2.3. Tato hra je zadaná bimaticí v tab.2.2.9 .

A/B	b_1	b_2
a_1	2, **1**	0, 0
a_2	0, 0	1, 2

Tab.2.2.9

Hra nemá žádné dominantní strategie, má však dva silné Nashovy rovnovážné body (a_1,b_1), (a_2,b_2) s výplatami (2, 1), (1, 2). Bohužel, žádný z těchto bodů nedominuje druhý bod (každý hráč má tedy zájem na jiném rovnovážném bodu) a chceme-li řešit tuto hru, je třeba hledat řešení v obecnějších smíšených strategiích.

Řešení nalezneme postupem vysvětleným v poznámkách 2.2.5. Systémy rovnic (i), (ii) mají v daném případě - po dosazení matic $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{G}$ z tab.2.2.9 - tvar

$$2q_1^* = q_2^*, \qquad q_1^*+q_2^*=1,$$
$$p_1^* = 2p_2^*, \qquad p_1^*+p_2^*=1.$$

Odtud dostáváme:

$$q_1^* = 1/3, \quad q_2^* = 2/3, \quad \text{neboli } \boldsymbol{q}^* = (1/3,\, 2/3)$$
$$p_1^* = 2/3, \quad p_2^* = 1/3, \quad \text{neboli } \boldsymbol{p}^* = (2/3,\, 1/3)$$

Zbývá ještě vypočítat výplaty obou hráčů:

$$\underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) = \Sigma_i\Sigma_j\, p_i^* h_{ij} q_j^* = \boldsymbol{p}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{q}^* = 2/3$$
$$\underline{\underline{G}}(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) = \Sigma_i\Sigma_j\, p_i^* g_{ij} q_j^* = \boldsymbol{p}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{q}^* = 2/3$$

Řešením hry je tedy trojice

$$((\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*),\, \underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*),\, \underline{\underline{G}}(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)) = (((2/3,\, 1/3),\, (1/3,\, 2/3)),\, 2/3,\, 2/3).$$

Jestliže je některému hráči známo, jakou strategii použije druhý hráč, pak této znalosti může využít k případnému zvýšení své výplaty. V této situaci není racionální hrát optimální strategii $\boldsymbol{q}^*$, která je nejlepší za předpokladu, že i protihráč hraje optimálně, tj. $\boldsymbol{p}^*$. Racionální je vždy hrát nejlepší odpověď (best response) na předpoládanou strategii protihráče. Jestliže je např. 2. hráči známo, že 1. hráč hraje strategii $\boldsymbol{p}=(1/2,\, 1/2)$, pak jeho nejlepší odpovědí je

$$\boldsymbol{q} = \mathrm{BR}_2(\boldsymbol{p}) = \{\arg\max_{q\in Q} G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\} = \{\arg\max_{q\in Q} \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{q}\} = \{\arg\max_{q\in Q}(1/2,1/2).\boldsymbol{G}.(q_1,q_2)^{\mathrm{T}}\} =$$
$$= \{\arg\max_{q\in Q}(1/2q_1 + q_2)\} = (0,\, 1)$$

/při výpočtu maxima využíváme vztahu $q_1+q_2=1$/.

Nejlepší odpovědí 2. hráče na předpokládanou strategii 1. hráče $\boldsymbol{p}=(1/2,\, 1/2)$ je tedy strategie $\boldsymbol{q}=(0,\, 1)$, neboli ryzí strategie $b_2 \in B$. Výplata (střední hodnota výplaty) 2. hráče je pak

$$\underline{\underline{G}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \underline{\underline{G}}((1/2,\, 1/2),(0,\, 1)) = (1/2,\, 1/2).\boldsymbol{G}.(0,\, 1)^{\mathrm{T}} = 1$$

a výplata (její střední hodnota) 1. hráče je

$$\underline{\underline{H}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \underline{\underline{H}}((1/2,\ 1/2),(0,\ 1)) = (1/2,\ 1/2).\boldsymbol{H}.(0,\ 1)^T = 1/2.$$

Vidíme tedy, že 1. hráč, který se odchýlil od teoreticky optimální strategie snížil svou výplatu ze 2/3 na 1/2 a 2. hráč, který o tomto odchýlení věděl a reagoval na něj, zvýšil svou výplatu ze 2/3 na 1.

Věta 2.2.1 *(zobecnění věty 2.1.4 pro obecnější hry s libovolným součtem)*:

Smíšené rozšíření každé bimaticové hry má řešení.

Důkaz: ....

2.3. Kooperativní hry 2 hráčů s nepřenosnou výhrou

V této kapitole se budeme zabývat bimaticovými hrami (konečnými hrami 2 hráčů) připouštějících dohodu o vol bě strategií, nikoliv však dohodu o přerozdělení výher (výplat). U her tohoto typu nás zajímají odpovědi na násle dující dvě otázky:

- kdy je výhodné uzavírat závaznou dohodu o volbě strategií ,
- je-li to výhodné, pak na jakých strategiích se dohodnout.

Definice 2.3.1:

Zaručená výhra 1.hráče je částka (výplata)

$$h^z = \max_{a\in A} \min_{b\in B} \{H(a,b)\} = \max_i \min_j \{h_{ij}\}.$$

Obdobně ***zaručená výhra 2.hráče*** je částka (výplata)

$$g^z = \max_{b\in B} \min_{a\in A} \{G(a,b)\} = \max_j \min_i \{g_{ij}\}.$$

Termínem ***zaručené výhry*** rozumíme dvojici výher (h^z,g^z).

Množina dosažitelných výher v dané kooperativní hře je

$$D = \{(h,g)\in H\times G:\ h\geq h^z \ \wedge\ g\geq g^z\}$$

kde h^z, g^z jsou zaručené výhry 1. a 2. hráče ve hře a H, G jsou množiny všech prvků matic $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{G}$.

Množina nedominovaných dosažitelných výher N v dané kooperativní hře je množina dosažitelných výher zmenšená o dominované výhry. Připomeňme, že dosažitelné výhry $(h,g)\in D$ jsou nedominované v D, jestliže neexistují výhry $(h',g')\in D$ takové, že platí

$$((h'\geq h)\ \wedge\ (g'\geq g)),$$

přičemž $(h',g') \neq (h,g)$.

Střed množiny nedominovaných dosažitelných výher N je střední hodnota (h^0,g^0) všech výher $(h,g)\in N$. Pravděpodobnostní rozdělení na množině N předpokládáme zpravidla rovnoměrné.

Optimální výhry dané kooperativní hry 2 hráčů s nepřenosnou výhrou jsou výhry $(h^*,g^*)\in N$, které mají minimální vzdálenost od středu množiny nedominovaných dosažitelných výher (h^0,g^0). Většinou používáme euklidovskou vzdálenost.

Optimální strategie dané kooperativní hry 2 hráčů s nepřenosnou výhrou jsou strategie $(a^*,b^*)\in A\times B$, při nichž se dosahuje optimálních výher $(h^*,g^*)\in N$, tj. strategie pro které platí:

$$(h^*,\ g^*) = (H(a^*,b^*),\ G(a^*,b^*))\ .$$

Poznámky 2.3.1:

1. Zaručená výhra je nejnižší možná výhra, která je hráči garantovaná, volí-li svou maximinovou strategii.
2. Dosažitelné výhry jsou výhry, které každému hráči zajišťují alespoň zaručenou výhru.
3. Užití rovnoměrného rozdělení na množině N při výpočtu středu je nejpřirozenější, ale není exaktně zdůvodněno.
4. Vedle euklidovské vzdálenosti lze při výpočtu optimálních výher používat i různé neeuklidovské metriky.

Příklad 2.3.1:

Uvažujme hru 2 hráčů zadanou bimaticí v tabulce 2.3.1 a řešme ji jako kooperativní hru s nepřenosnou výhrou.

A/B	b_1	b_2	b_3	$\min_j\{h_{ij}\}$
a_1	4, 5	8, 4	7, 7	**4**, -
a_2	1, 1	0, 0	9, 3	0, -
a_3	3, 2	6, 1	7, 2	3, -
$\min_i\{g_{ij}\}$	-, 1	-, 0	-, **2**	

Tab. 2.3.1.

Pomocí tabulky a jednoduchých výpočtů postupně zjišťujeme:

- Zaručené výhry jsou: $(h^z,g^z) = (4,2)$.
- Množina dosažitelných výher je $D = \{(4,5), (8,4), (7,7), (9,3), (7,2)\}$.
- Množina nedominovaných dosažitelných výher je $N = \{(8,4), (7,7), (9,3)\}$. Výhry (4,5) jsou dominovány výhrami (8,4), (7,7) a výhry (7,2) výhrami (8,4), (9,3),(7,7).
- Střed množiny N je $(h^0,g^0) = ((8,4) + (7,7) + (9,3)) / 3 = ((8+7+9)/3, (4+7+3)/3) = (24/3, 14/3) = (8, 4.67)$.
- Optimální výhry jsou $(h^*,g^*) = (8,4)$. Na první pohled je patrno, že ostatní prvky množiny N mají od jejího středu podstatně větší vzdálenost.
- Optimální strategie jsou $(a^*,b^*) = (a_1,b_2)$, neboť $(8,4) = (H(a_1,b_2),G(a_1,b_2))$.

Všimněme si, že v případě, kdy oba hráči volí své maximinové (opatrné) strategie jsou výhry (7,7), což jsou podstatně lepší výhry než garantované výhry (4,2). V případě neexistence závazné dohody o volbě strategií by dvojice strategií (a_1,b_2) nebyla stabilní a nemohla by být proto řešením.

2.4. Kooperativní hry 2 hráčů s přenosnou výhrou

V této kapitole se budeme zabývat bimaticovými hrami (konečnými hrami 2 hráčů) přípouštějících mož nost dohody jak o volbě strategií tak i o způsobu přerozdělení výher (výplat). U her tohoto typu nás zajímají od povědi na následující tři otázky:

- kdy uzavírat dohodu,
- na jakých strategiích se dohodnout,
- jak přerozdělit výhry.

Definice 2.4.1:

Označme

$\alpha = h^z = \max_i \min_j \{h_{ij}\}$ zaručenou výhru 1.hráče,

$\beta = g^z = \max_j \min_i \{g_{ij}\}$ zaručenou výhru 2.hráče,

$\gamma = \max_{i,j} \{h_{ij}+g_{ij}\}$ maximální dosažitelný součet výher obou hráčů

a předpokládejme, že platí:

$$\gamma > \alpha + \beta .$$

V tomto případě optimální dvojicí strategií je dvojice (a^*, b^*) pro kterou platí

$$H(a^*, b^*)+G(a^*, b^*) = \gamma .$$

Rozdělení výher je dvojice (h, g), kde h je částka, která bude po přerozdělení vyplacena 1. hráči a g je částka, která bude vyplacena 2.hráči.

Jádro hry J je množina všech dvojic (h,g), splňujících podmínky

$$h + g = \gamma,\quad h \geq \alpha,\quad g \geq \beta, \quad \text{tj.}$$

$$J = \{(h, g):\ h + g = \gamma,\ h \geq \alpha,\ g \geq \beta\}$$

Za ***optimální rozdělení výher*** považujeme dvojici (h^*,g^*) představující střední hodnotu na množině všech dvojic jádra (pravděpodobnostní rozložení na množině prvků jádra předpokládáme rovnoměrné) .

Poznámky 2.4.1:

1. Dohodu o rozdělení výher má smysl uzavírat jedině tehdy, je-li splněna nerovnost $\gamma>\alpha+\beta$. Vedle

zaručených výher může každý hráč získat něco navíc z přebytku γ-(α+β). Je-li γ=α+β nemá smysl dohodu uzavírat. Teoreticky myslitelný třetí případ γ<α+β nemůže nikdy nastat.

2. Jádro hry je tvořeno všemi takovými rozděleními, kdy celá společná výhra je rozdělena a každý hráč získá alespoň svou zaručenou výhru.
3. Jádro hry obsahuje nekonečně mnoho rozdělení a každý hráč usiluje získat z přebytku γ-(α+β) získat co nejvíce. Definice 2.4.1 (optimální rozdělení výher) doporučuje jako spravedlivé takové rozdělení, při kterém si každý hráč ponechá svou zaručenou výhru a přebytek si hráči rozdělí rovným dílem.

Příklad 2.4.1:

Uvažujme hru z příkladu 2.3.1 (zadanou tabulkou 2.3.1) a řešme ji jako hru s přenosnou výhrou.

V tomto případě jest:

α = 4 ... zaručená výhra 1.hráče (při maximinové strategii a_1),

β = 2 ... zaručená výhra 2.hráče (při maximinové strategii b_3),

γ = 14 ... maximální dosažitelný součet výher obou hráčů (při strategiích a_1,b_3).

Je γ>α+β a racionální hráči se proto domluví na volbě strategií (a_1,b_3), protože $H(a_1,b_3)+G(a_1,b_3)= \gamma$.
Všimněme si, že v daném příkladě se náhodou jedná o maximinové strategie obou hráčů - tyto strategie však nejsou stabilní bez závazné dohody obou hráčů (např. pro 1. hráče je výhodné přejít ze své maximinové strategie a_1 na strategii a_2, pokud 2. hráč svou maximinovou stragii b_3 drží).

Optimální (spravedlivé) rozdělení výher je podle definice 2.4.1:

$(h^*, g^*) = (\alpha + (\gamma - \alpha - \beta)/2,\ \beta + (\gamma - \alpha - \beta)/2) = (4 + 8/2, 2 + 8/2) = (8, 6)$.

Příklady 2.4.2:

Interpretujte nekooperativní hry uváděné v kap. 2.2. jako kooperativní a to jednak jako hry bez přerozdělení výplat a jednak jako hry s přerozdělením výplat. Nalezněte řešení techto her v obou případech.