Cvičení 3

Ing. Martin Kot

20. října 2003

Matematický důkaz nějakého tvrzení je konečná posloupnost kroků, kde každý krok obsahuje

- axiomů - obecně platných pravd
- předpokladů
- výroků odvozených z předchozích pomocí odvozovacích pravidel
- poslední krok obsahuje jako výrok závěr tvrzení P

Matematická indukce je také odvozovacím pravidlem, ale vyšší třídy. Pokud dokážeme výrok pro $n = c$, potom, že za předpokladu platnosti pro n platí výrok pro $n + 1$ a pomocí pravidla matematické indukce z toho vyvodíme, že výrok platí pro všechna $n \geq c$.

Příklad 1 *Dokažte indukcí vztahy:*

- $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$
- $\sum_{i=1}^{n} i2^i = (n - 1)2^{n+1} + 2$

Příklad 2 *Dokažte vzorec:*

$$\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r+1 \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r+2 \\ r \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ r+1 \end{pmatrix}$$

a) *Matematickou indukcí*

b) *Kombinatoricky*

Pozn. Přejme si určit, kolika různými způsoby můžeme sečíst r přirozených čísel tak, abychom dostali součet n. Můžeme si představit pozice pro n jedniček a $r - 1$ plusů mezi sčítanci. Z těchto $n + r - 1$ pozic vybereme těch $r - 1$ pro plus všemi možnými způsoby. Pozice mezi plusy jsou potom jedničky a jejich součet dává jednotlivé sčítance. Pokud byly vybrány pozice hned vedle sebe, je sčítanec roven 0. Proto je počet možných sčítání roven: $\begin{pmatrix} m+r+1 \\ r-1 \end{pmatrix}$

Příklad 3 *Dokažte vztah:*

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Pozn. Uvědomte si platnost:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Příklad 4 *(nestihlo se na cvičení) Dokažte:* $n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Příklad 5 *Kolika způsoby lze roztáhnout* 4 *závěsy kolem* 4 *oken tak, aby všechna okna byla odkrytá. V každém místě mezi okny i na kraji může být závěsů libovolný počet.*

Příklad 6 *(nestihlo se na cvičení) Dítě má 5 červených, 4 modré, 3 bílé, 3 zelené, 1 černou a 1 žlutou kostku. Kolik různých věží ze všech kostek postavených na sebe může postavit?*

Příklad 7 *(nestihlo se na cvičení) Kolika způsoby lze rozestavit 5 vodníků a 7 čarodějnic do řady tak, že žádní dva vodnící nestojí vedle sebe?*

Příklad 8 *(nestihlo se na cvičení) Dokažte, že libovolná přirozená mocnina lichého čísla je liché číslo, tedy* $(2k+1)^n = (2l+1)$ *pro celá čísla k, l, n.*

- *Matematickou indukcí*
- *Pomocí binomické věty*