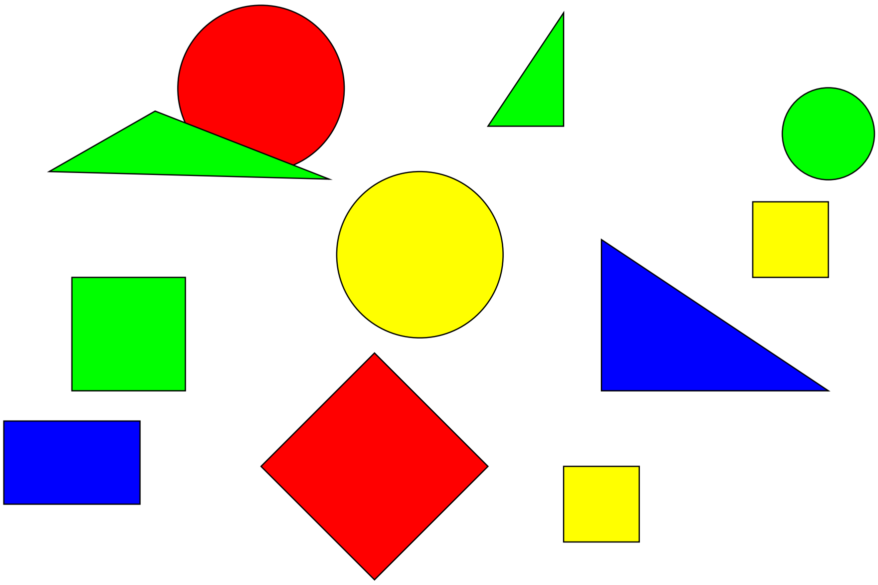
Cvičení 5

Příklad 1: Uvažujme konkrétní interpretaci, kde universem je množina geometrických objektů znázorněných na následujícím obrázku.



Objekty v tomto universu jsou rozmístěny na ploše, mají různé barvy a mohou se vzájemně překrývat.

Předpokládeme dále, že máme následující predikáty:

- Q — unární predikát reprezentující vlastnost *„být čtverec“* (tj. $\mathsf{Q}(x)$ znamená „x *je čtverec*“)
- R — unární predikát reprezentující vlastnost *„být obdelník“* (tj. $\mathsf{R}(x)$ znamená „x *je obdelník*“)
- T — unární predikát reprezentující vlastnost *„být trojúhelník“* (tj. $\mathsf{T}(x)$ znamená „x *je trojúhelník*“)
- C — unární predikát reprezentující vlastnost *„být kruh“* (tj. $\mathsf{C}(x)$ znamená „x *je kruh*“)
- U — unární predikát reprezentující vlastnost *„být pětiúhelník“* (tj. $\mathsf{U}(x)$ znamená „x *je pětiúhelník*“)
- B — unární predikát reprezentující vlastnost *„být modrý“* (tj. $\mathsf{B}(x)$ znamená „x *je modrý*“)
- G — unární predikát reprezentující vlastnost *„být zelený“* (tj. $\mathsf{G}(x)$ znamená „x *je zelený*“)
- D — unární predikát reprezentující vlastnost *„být červený“* (tj. $\mathsf{D}(x)$ znamená „x *je červený*“)
- Y — unární predikát reprezentující vlastnost *„být žlutý“* (tj. $\mathsf{Y}(x)$ znamená „x *je žlutý*“)
- M — unární predikát reprezentující vlastnost *„být fialový“* (tj. $\mathsf{M}(x)$ znamená „x *je fialový*“)
- H — binární predikát reprezentující vztah *„zabírat větší plochu“* (tj. $\mathsf{H}(x, y)$ znamená „x *zabírá větší plochu než* y“)

- K — binární predikát reprezentující vztah *„částečně překrývá“* (tj. $K(x,y)$ znamená *„x částečně překrývá y“*, resp. *„objekt y je částečně překryt objektem x“*)

Pro každou z následujících formulí proveďte následující:

- Zformulujte v přirozené řeči tvrzení vyjádřené příslušnou formulí.
- Určete, zda je dané tvrzení pravdivé v případě výše uvedené interpretace.

  V některých případech závisí pravdivostní hodnota tvrzení na konkrétní valuaci, tj. na konkrétních hodnotách přiřazených proměnným. V takovém případě si zvolte nějaké konkrétní přiřazení hodnot proměnným sami a vyhodnoťte pravdivostní hodnotu formule při této vámi zvolené valuaci.

  Pokud je to možné, snažte se najít příklad valuace, kdy formule platí, a příklad valuace, kdy formule neplatí.

1. $Q(x)$
2. $\forall x Q(x)$
3. $\exists x Q(x)$
4. $D(x) \to C(x)$
5. $\exists x(G(x) \wedge T(x))$
6. $\forall x(C(x) \to Y(x))$
7. $\exists x(U(x) \vee M(x))$
8. $\forall x(D(x) \to \neg Q(x) \wedge \neg R(x))$
9. $\forall x(R(x) \to Q(x))$
10. $\forall x(Q(x) \to R(x))$
11. $\exists x(G(x) \wedge C(x)) \wedge \forall y(R(y) \vee \neg B(y)) \to \exists z(G(z) \wedge T(z))$
12. $\exists x \exists y H(x,y)$
13. $\forall x \forall y(H(x,y) \vee H(y,x))$
14. $\exists x \forall y H(y,x)$
15. $\forall x \exists y K(x,y)$
16. $\forall x((\exists y \exists z(K(y,x) \wedge K(z,x) \wedge H(y,z)) \to \exists y H(x,y))$
17. $\forall x(Q(x) \to H(x,y))$
18. $Q(x) \wedge \exists x T(x)$

Příklad 2: Vezměme si stejné predikáty, jaké byly zavedeny v předchozím cvičení. Zapište následující tvrzení jako formule predikátové logiky:

a) Existuje modrý čtverec.

   Řešení: $\exists x(B(x) \wedge Q(x))$

b) Každý kruh je modrý, zelený nebo žlutý.

   Řešení: $\forall x(C(x) \to (B(x) \vee G(x) \vee Y(x)))$

c) Ke každému modrému objektu existuje žlutý objekt, který zabírá větší plochu.

Řešení: $\forall x(B(x) \to \exists y(Y(y) \wedge H(y,x)))$

d) Existuje objekt, který částečně překrývá objekt x.

Řešení: $\exists y K(y,x)$

e) Pro každé dva objekty x a y platí, že x částečně překrývá y nebo y částečně překrývá x.

Řešení: $\forall x \forall y(K(x,y) \vee K(y,x))$

f) Neexistuje objekt, který by částečně překrýval sám sebe.

Řešení: $\neg\exists x K(x,x)$

g) Jestliže je nějaký objekt fialový, tak jsou všechny objekty červené.

Řešení: $\exists x M(x) \to \forall x D(x)$

h) Pro každý čtverec platí, že pokud není zelený, tak není částečně překrýván žádným objektem.

Řešení: $\forall x(Q(x) \to (\neg G(x) \to \neg\exists y K(y,x)))$

i) Pokud x částečně překrývá y, tak existuje z takové, že z částečně překrývá y a x částečně překrývá z.

Řešení: $K(x,y) \to \exists z(K(z,y) \wedge K(x,z))$

j) Ne všechny trojúhelníky jsou fialové.

Řešení: $\neg\forall x(T(x) \to M(x))$

Příklad 3: Vezměme si následující predikáty:

- M — unární predikát reprezentující vlastnost *„být muž“*
- W — unární predikát reprezentující vlastnost *„být žena“*
- P — binární predikát reprezentující vztah *„být rodičem“* (tj. $P(x,y)$ znamená *„x je rodičem y“*)
- Q — binární predikát reprezentující vztah *„být sourozencem“* (tj. $Q(x,y)$ znamená *„x je sourozencem y“*)
- R — binární predikát reprezentující vztah *„mít rád“* (tj. $R(x,y)$ znamená *„x má rád y“*)

Zapište formulemi predikátové logiky následující tvrzení:

a) Jestliže je x rodičem y, tak x má rád y.

Řešení: $P(x,y) \to R(x,y)$

b) Pro každou ženu x a každé y takové, že x je rodičem y, existuje muž, který je rodičem y.

Řešení: $\forall x(W(x) \to \forall y(P(x,y) \to \exists z(M(z) \wedge P(z,y))))$

c) Jestliže x a y jsou sourozenci, tak mají alespoň jednoho společného rodiče.

Řešení: $Q(x,y) \to \exists z(P(z,x) \wedge P(z,y))$

d) Existuje žena, která nemá žádné sourozence.

Řešení: $\exists x(W(x) \wedge \neg\exists y(Q(y,x)))$

e) Každý má někoho rád.

Řešení: $\forall x \exists y R(x,y)$

f) Neexistuje nikdo, kdo by měl rád všechny.

Řešení: $\neg\exists x \forall y R(x,y)$

Příklad 4: Vezměme si predikáty M, W a P z předchozího cvičení. Přidejme k těmto predikátům, ještě binárnární predikát D, kde $D(x,y)$ vyjadřuje, že x a y jsou dvě různé osoby (tj. $D(x,y)$ je nepravda právě v těch případech, kdy x a y je jeden a tentýž člověk).

Pomocí formulí predikátové logiky vyjádřete následující příbuzenské vztahy, přičemž ale použijte jen výše uvedené predikáty (tj. nezavádějte žádné další nové predikáty). Formule by měly co nepřesněji vyjadřovat, co se danými pojmy myslí v běžné řeči (např. „*x je matkou y*“ znamená, že x je rodičem y a x je žena).

Poznámka: Předpokládejte, že prvky universa jsou lidé.

a) x je matkou y

Řešení: $P(x,y) \wedge W(x)$

b) x je otcem y

Řešení: $P(x,y) \wedge M(x)$

c) x je synem y

Řešení: $P(y,x) \wedge M(x)$

d) x je sourozencem y

Řešení: $D(x,y) \wedge \exists z(P(z,x) \wedge P(z,y))$

e) x je sestrou y

Řešení: $D(x,y) \wedge W(x) \wedge \exists z(P(z,x) \wedge P(z,y))$

f) x je babičkou y

Řešení: $W(x) \wedge \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))$

g) x je bratrancem y

Řešení: $M(x) \wedge \exists v \exists w \exists z(P(z,v) \wedge P(v,x) \wedge P(z,w) \wedge P(w,y)) \wedge \neg\exists u(P(u,x) \wedge P(u,y))$

Příklad 5: Pro každou z následujících sekvencí symbolů rozhodněte, zda se jedná o dobře utvořenou formuli predikátové logiky (používejte běžné konvence pro vypouštění závorek). Pokud se v daném případě jedná o dobře utvořenou formuli, proveďte následující:

- Nakreslete abstraktní syntaktický strom dané formule.
- Určete, jaké predikátové symboly se v dané formuli nachází a jaká je jejich arita.
- Pro každý jednotlivý výskyt proměnné určete, zda je tento výskyt volný nebo vázaný. V případě vázaného výskytu určete, kterým kvantifikátorem je tento výskyt vázán.

Poznámka: P, Q, R, S jsou predikátové symboly

1. P
2. x
3. $P(x)$
4. $x(P)$
5. Pxy
6. $\forall P(x)$
7. $P(x) \wedge \exists x$
8. $\exists x R(x, y)$
9. $\forall z(R(x, y) \to R(y, x))$
10. $\neg \exists x(\neg P(x, y) \to R(y, x))$
11. $P(P(x, y), z)$
12. $\neg P(x) \wedge \exists x Q(x)$
13. $\forall x \forall y(P(x) \vee P(x, y))$
14. $\forall x \exists y P(x)$
15. $\forall x \exists x P(x)$
16. $\forall x \exists y P(R(x, y))$
17. $\forall x \exists y P(\neg x, y)$
18. $\exists x(P(y, z) \wedge \forall y(\neg Q(y, x) \vee P(y, z)))$
19. $\forall x \forall x \forall x \forall x \forall x \forall x \forall x\, S(x, x, x)$
20. $\exists x(\forall y(\neg P(x, y)) \to \forall y Q(y)) \leftrightarrow R(x, y)$

Příklad 6: Řekněme, že P a Q jsou unární predikátové symboly a R je binární predikátový symbol.
Pro každou z následujících formulí a každou z následujícících interpretací a valuací určete pravdivostní hodnotu dané formule při dané interpretaci a valuaci.
Formule:

1. $R(x, y)$
2. $R(x, y) \to R(z, x)$
3. $\forall x \forall y \forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z))$
4. $\exists x(Q(x) \wedge \forall y R(y, x))$
5. $\exists x(\neg P(x))$
6. $\forall x \exists y \neg R(x, y)$
7. $\forall x \forall y(Q(x) \wedge Q(y) \ \to \ \exists z(R(x, z) \wedge R(z, y) \wedge Q(z)))$

Interpretace:

a) Interpretace $\mathcal{A}$, kde universem je množina $A = \{a, b, c\}$. Predikátům P, Q, R jsou přiřazeny následující relace:

- $P^{\mathcal{A}} = \{a, c\}$
- $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$
- $R^{\mathcal{A}} = \{(a, c),\ (b, b),\ (b, c),\ (c, a)\}$

Předpokládejme valuaci v, kde $v(x) = c$, $v(y) = a$ a $v(z) = a$.

Řešení:

3. Nepravda: Například při valuaci $v(x) = a$, $v(y) = c$, $v(z) = a$ neplatí $R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z)$.
7. Pravda: Protože $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$, bude při jakékoliv valuaci nepravdivá formule $Q(x) \wedge Q(y)$, takže implikace $Q(x) \wedge Q(y) \ \to \ \exists z(R(x, z) \wedge R(z, y) \wedge Q(z))$ bude při každé valuaci pravdivá.

b) Interpretace $\mathcal{B}$, kde univerzem je množina reálných čísel čísel $\mathbb{R}$. Predikátům P, Q, R jsou přiřazeny následující relace:

- $P^{\mathcal{B}}$ je množina všech nezáporných reálných čísel
- $Q^{\mathcal{B}}$ je množina všech racionálních čísel
- $R^{\mathcal{B}}$ je množina všech těch dvojic reálných čísel (x, y), kde $x < y$.

Předpokládejme valuaci v, kde $v(x) = 7$, $v(y) = 2.3$, $v(z) = 9$.

Řešení:

3. Pravda: Pro všechna reálná čísla x, y, z platí, že pokud $x < y$ a $y < z$, tak $x < z$.
7. Nepravda: V dané interpretaci formule tvrdí, že pro každá dvě racionální čísla x a y existuje racionální číslo z takové, že $x < z$ a $z < y$. Toto však neplatí v těch případech, kdy $x \geq y$ (například pokud $x = 1$ a $y = 0$).

Příklad 7: Pro každou z následujících formulí najděte nějakou interpretaci, která je jejím modelem, a nějakou interpretaci, která jejím modelem není.

1. $\exists x \big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$
2. $\forall x \big(P(x) \rightarrow \neg Q(x)\big)$
3. $\exists x \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$
4. $\forall x \exists y \big(P(x) \rightarrow \neg R(x, y)\big)$