Cvičení 3

Příklad 1: Pro následující formule určete, zda se jedná o tautologie. Pokud ano, dokažte to sémantickým sporem, pokud ne, uveďte příklad pravdivostního ohodnocení, při kterém není daná formule pravdivá (při hledání tohoto ohodnocení postupujte podobným způsobem jako při hledání sémantického sporu).

1. $\neg(p \vee q) \rightarrow p$

   Řešení: je splnitelná, ale není tautologie (ohodnocení $\nu(p) = 0$, $\nu(q) = 0$ není modelem)
2. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

   Řešení: tautologie
3. $(p \rightarrow q \vee p) \wedge (p \rightarrow (\neg p \rightarrow r))$

   Řešení: tautologie
4. $(p \vee \neg(q \wedge r)) \rightarrow ((p \leftrightarrow r) \vee q)$

   Řešení: splnitelná, ale ne tautologie (ohodnocení $\nu(p) = 0$, $\nu(q) = 0$, $\nu(r) = 1$)
5. $(p \wedge q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \leftrightarrow p)$

   Řešení: tautologie

Příklad 2:

a) Řekněme, že φ je taková formule, že pro každou formuli ψ je formule $\varphi \vee \psi$ vždy pravdivá. Co lze říci o pravdivostní hodnotě formule φ?

b) Řekněme, že φ je taková formule, že pro každou formuli ψ je formule $\varphi \wedge \psi$ vždy nepravdivá. Co lze říci o pravdivostní hodnotě formule φ?

Příklad 3: Pro každou z následujících formulí, uveďte příklady formulí φ a ψ takových, aby pro tyto formule byla daná formule tautologií:

a) $\varphi \wedge \psi$

b) $\varphi \vee (\varphi \wedge \neg\psi)$

c) $\varphi \rightarrow \varphi \wedge \neg\psi$

d) $\varphi \rightarrow \neg\varphi$

Příklad 4: Existuje nějaká formule φ, pro kterou je formule $\varphi \wedge \neg\varphi$ tautologií?

Příklad 5: Připomeňte si, co to znamená, že formule výrokové logiky jsou logicky ekvivalentní. Pro které z následujících formulí platí, že jsou logicky ekvivalentní formuli p?

- Pokud pro danou formuli φ ekvivalence $\varphi \Leftrightarrow p$ platí, dokažte to tabulkovou metodou nebo sémantickým sporem.
- Pokud ekvivalence $\varphi \Leftrightarrow p$ neplatí, ukažte příklad konkrétního pravdivostního ohodnocení, při kterém jedna z formulí φ a p platí a druhá ne.

a) $p \vee p$
b) $p \vee q$
c) $p \vee \neg p$
d) $p \wedge p$
e) $p \wedge q$
f) $p \to p$
g) $\neg p \to p$
h) $p \to \neg p$
i) $q \vee \neg q \to p$
j) $p \leftrightarrow p$

Příklad 6: Které z následujících ekvivalencí mezi dvojicemi formulí platí? Vaše odpovědi zdůvodněte:

- Pokud ekvivalence $\varphi \Leftrightarrow \psi$ platí, dokažte to tabulkovou metodou nebo sémantickým sporem.
- Pokud ekvivalence $\varphi \Leftrightarrow \psi$ neplatí, ukažte příklad konkrétního pravdivostního ohodnocení, při kterém jedna z formulí φ a ψ platí a druhá ne.

1. $p \Leftrightarrow p$
2. $p \Leftrightarrow \neg p$
3. $p \Leftrightarrow \neg\neg p$
4. $\neg p \Leftrightarrow \neg\neg p$
5. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
6. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
7. $p \to q \Leftrightarrow q \to p$
8. $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$
9. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
10. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
11. $(p \to q) \to r \Leftrightarrow p \to (q \to r)$
12. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
13. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$
14. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge r$
15. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

    Řešení: ekvivalence neplatí, např. $v(p) = 0$, $v(q) = 1$ je modelem formule $\neg(p \wedge q)$ a není modelem formule $\neg p \wedge \neg q$
16. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
17. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$

    Řešení:

p	**q**	$\mathbf{p \wedge q}$	$\mathbf{\neg(p \wedge q)}$	$\mathbf{\neg p}$	$\mathbf{\neg q}$	$\mathbf{\neg p \vee \neg q}$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
1	1	1	**0**	0	0	**0**

ekvivalence platí, obě formule mají stejné modely

18. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
19. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge q$
20. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
21. $(p \to q) \Leftrightarrow \neg p \wedge q$
22. $(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$
23. $(p \to q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$
24. $(p \to q) \Leftrightarrow p \vee \neg q$
25. $\neg(p \to q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$
26. $\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$
27. $\neg(p \to q) \Leftrightarrow \neg p \to \neg q$
28. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$
29. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
30. $(p \to q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$
31. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \vee (q \to p)$
32. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$

Příklad 7: Pomocí ekvivalentních úprav dokažte, že platí ekvivalence uvedené v bodech (a)–(c). Při ekvivalentních úpravách používejte v jednotlivých krocích jen následující ekvivalence:

- v bodě (a) pouze ekvivalence tvaru $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$,
- v bodě (b) navíc ekvivalence tvaru $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$,

- v bodě (c) navíc ekvivalence tvaru $\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$.

(Všechny tyto ekvivalence můžete používat v obou směrech a můžete je aplikovat na podformule.)

a) $p \wedge ((q \wedge r) \wedge (s \wedge t)) \ \Leftrightarrow\ (p \wedge q) \wedge ((r \wedge s) \wedge t)$
b) $(r \wedge q) \wedge (s \wedge p) \ \Leftrightarrow\ p \wedge (q \wedge (r \wedge s))$
c) $(p \wedge q) \wedge p \ \Leftrightarrow\ q \wedge (p \wedge q)$

Příklad 8: Pomocí ekvivalentních úprav dokažte následující ekvivalence:

1. $(p \rightarrow q) \wedge p \ \Leftrightarrow\ p \wedge q$
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow q \ \Leftrightarrow\ p \vee q$
3. $p \wedge (p \vee q) \ \Leftrightarrow\ p$
4. $(p \vee q) \leftrightarrow q \ \Leftrightarrow\ p \rightarrow q$
5. $(p \wedge q) \leftrightarrow p \ \Leftrightarrow\ p \rightarrow q$
6. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \ \Leftrightarrow\ p \wedge q$
7. $((p \vee q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow p \ \Leftrightarrow\ p \wedge q$

Příklad 9: Pomocí ekvivalentních úprav u následujících formulí rozhodněte, o jakou formuli se jedná (tautologie, kontradikce, splnitelná).

1. $((p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow (q \vee p)))$

   Řešení: $\ldots \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee q \vee p) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \rightarrow (q \vee p) \Leftrightarrow (q \vee p) \vee (\neg p \vee q) \Leftrightarrow q \vee p \vee \neg p \vee q \Leftrightarrow q \vee \top \vee q \Leftrightarrow \top$
   Tautologie.
2. $\big((p \vee \neg q) \wedge \neg (p \wedge q)\big) \rightarrow (\neg p \vee q)$
3. $\neg\big((q \wedge p) \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \vee q))\big)$
4. $\big((p \vee \neg (p \wedge q)) \rightarrow (\neg p \vee q \vee p)\big) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$

   Řešení: $\ldots \ \Leftrightarrow\ \big([p \vee (\neg p \vee \neg q)] \rightarrow \top\big) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q) \ \Leftrightarrow\ \top \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q) \ \Leftrightarrow\ (p \leftrightarrow \neg q) \vee \bot \ \Leftrightarrow\ p \leftrightarrow \neg q \ \Leftrightarrow\ (p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow q) \ \Leftrightarrow\ (\neg q \vee \neg p) \wedge (q \vee p) \ \Leftrightarrow\ [\neg q \wedge (q \vee p)] \vee [\neg p \wedge (q \vee p)] \ \Leftrightarrow\ [(\neg q \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)] \vee [(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge p)] \ \Leftrightarrow\ (\neg q \wedge p) \vee (\neg p \wedge q)$
   Splnitelná.

Příklad 10: Následující formule převeďte do KNF a DNF:

1. $\neg (p \wedge \neg r \wedge s)$
2. $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (r \wedge q)$

   Řešení: Formule již je v DNF. KNF může být třeba $(p \vee r) \wedge (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge q \wedge (\neg r \vee q)$ nebo $(p \vee r) \wedge q$ aj.
3. $p \rightarrow (q \wedge r)$

4. $p \leftrightarrow q$
5. $((p \to \neg q) \to r) \wedge \neg p$
6. $((p \wedge (q \vee r)) \vee (q \to \neg r)$

   Řešení: DNF: $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee \neg q \vee \neg r$ nebo také $\neg q \vee p \vee \neg r$, která je současně i v KNF
7. $\neg(\neg(p \to \neg q) \wedge (r \leftrightarrow \neg p))$

Příklad 11: Následující formule převeďte do ÚKNF a ÚDNF pomocí tabulky nebo ekvivalentních úprav.

1. $(p \leftrightarrow \neg q)$

   Řešení:

p	**q**	$\neg$**q**	**p** $\leftrightarrow \neg$**q**	**UEK**	**UED**
0	0	1	0		$p \vee q$
0	1	0	1	$\neg p \wedge q$	
1	0	1	1	$p \wedge \neg q$	
1	1	0	0		$\neg p \vee \neg q$

   UKNF: $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
   UDNF: $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
   $(p \leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \to \neg q) \wedge (\neg p \to q) \Leftrightarrow (\neg \mathbf{q} \vee \neg \mathbf{p}) \wedge (\mathbf{q} \vee \mathbf{p}) \Leftrightarrow \big(\neg q \wedge (q \vee p)\big) \vee (\neg p \wedge (q \vee p)\big) \Leftrightarrow \big((\neg q \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)\big) \vee \big((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge p)\big) \Leftrightarrow (\neg \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}) \vee (\neg \mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$
2. $(p \wedge \neg q) \to (\neg p \to (q \vee p))$
3. $\big((p \to q) \wedge (\neg r \to \neg q)\big) \wedge \neg r \wedge p$