Cvičení 1

Příklad 1: Pro každý z následujících formálních zápisů množin uveďte (svými slovy), jaké prvky daná množina obsahuje:

a) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
b) $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$
c) $\{n \mid n = 2m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}\}$
d) $\{n \mid n = 2m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ a $n = 3k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}\}$
e) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = n + 1\}$

Příklad 2: Popište vhodným formálním zápisem následující množiny:

a) Množina obsahující čísla 1, 10 a 100.
b) Množina obsahující všechna celá čísla větší než 5.
c) Množina obsahující všechna přirozená čísla menší než 5.
d) Množina neobsahující žádné prvky.
e) Množina všech podmnožin dané množiny X.

Příklad 3: Uvažujme množiny $A = \{x, y, z\}$ a $B = \{x, y\}$.

a) Je $A \subseteq B$?
b) Je $A \supseteq B$?
c) Co je $A \cup B$?
d) Co je $A \cap B$?
e) Co je $A \times B$?
f) Co je $\mathcal{P}(B)$?

Příklad 4: Rozhodněte, zda platí:

a) $a \in \{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}$
b) $\{a, \{a\}\} \cap \mathcal{P}(\{a, \{a\}\}) = \emptyset$
c) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

Příklad 5: Určete všechny prvky následujících množin:

a) $\{a, \{a\}\} \cup \{a, \{b\}, c\}$
b) $\{a, \{a\}\} \cap \{a, \{b\}, c\}$
c) $\{a, \{a\}\} - \{a, \{b\}, c\}$

Příklad 6: Jestliže množina A má a prvků a množina B má b prvků, kolik prvků má množina $A \times B$? Vaši odpověď vysvětlete.

Příklad 7: Jestliže množina C má c prvků, kolik prvků má množina $\mathcal{P}(C)$? Vaši odpověď vysvětlete.

Příklad 8: Připomeňte si, co je to relace, a jaké znáte typy relací (homogenní vs. nehomogenní, unární, binární, atd.).

a) Přesně definujte, co to znamená, že relace je reflexivní, ireflexivní, symetrická, asymetrická, antisymetrická, tranzitivní, funkční.

b) Uvědomte si souvislost mezi binárními relacemi a orientovanými grafy (které mohou být i nekonečné) a popište, co jednotlivé vlastnosti uvedené v předchozím bodě znamenají z hlediska grafu reprezentujícího příslušnou relaci.

c) Připomeňte si, co to znamená, že relace je ekvivalence. Jak pojem ekvivalence souvisí s pojmem rozkladu?

Příklad 9: Uveďte příklad binární relace, která je:

a) Reflexivní a symetrická, ale není tranzitivní.
b) Reflexivní a tranzitivní, ale není symetrická.
c) Symetrická a tranzitivní, ale není reflexivní.

Příklad 10: Připomeňte si, co to znamená, že relace je uspořádání. Jaké znáte typy uspořádání? Uveďte příklad uspořádání na množině přirozených čísel, které není úplným uspořádáním.

Příklad 11: Nechť $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $Y = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Unární funkce $f : X \to Y$ a binární funkce $g : X \times Y \to Y$ jsou popsány následujícími tabulkami:

n	$f(n)$
1	6
2	7
3	6
4	7
5	6

g	6	7	8	9	10
1	10	10	10	10	10
2	7	8	9	10	6
3	7	7	8	8	9
4	9	8	7	6	10
5	6	6	6	6	6

a) Jaká je hodnota $f(2)$?
b) Co definičním oborem a oborem hodnot funkce f?
c) Jaká je hodnota $g(2, 10)$?
d) Co definičním oborem a oborem hodnot funkce g?

e) Jaká je hodnota $g(4, f(4))$?

Příklad 12: Připomeňte si, co to znamená, že funkce je injektivní (prostá), surjektivní (na) a bijektivní. Je funkce $f(x) = x + 1$ injektivní, surjektivní a/nebo bijektivní na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$? A na množině celých čísel $\mathbb{Z}$?

Příklad 13: Připomeňte si pojem binární operace na množině a co to znamená, že daná operace je asociativní, a co to znamená, že je komutativní. Uveďte příklad operace, která:

a) je asociativní, ale není komutativní,
b) je komutativní, ale není asociativní.
c) není asociativní ani komutativní.

***Příklad 14:** Uvažujme asociativní operaci $\circ$ na množině S. Ukažte, že hodnota výrazu $x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n$, kde $x_i \in S$, je dobře definovaná, neboť tato hodnota nezávisí na konkrétním uzávorkování.