

Cvičení 1

Příklad 1: Pro každý z následujících formálních zápisů množin uveďte (svými slovy), jaké prvky daná množina obsahuje:

- a) $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$
- b) $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
- c) $\{n \mid n = 2m \text{ pro nějaké } m \in \mathbb{N}\}$
- d) $\{n \mid n = 2m \text{ pro nějaké } m \in \mathbb{N} \text{ a } n = 3k \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}\}$
- e) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = n + 1\}$

Řešení:

- a) Lichá přirozená čísla
- b) Sudá celá čísla
- c) Přirozená čísla dělitelná dvěma beze zbytku
- d) Přirozená čísla dělitelná šesti beze zbytku
- e) Žádné, jedná se o prázdnou množinu

Příklad 2: Popište vhodným formálním zápisem následující množiny:

- a) Množina obsahující čísla 1, 10 a 100.
- b) Množina obsahující všechna celá čísla větší než 5.
- c) Množina obsahující všechna přirozená čísla menší než 5.
- d) Množina neobsahující žádné prvky.
- e) Množina všech podmnožin dané množiny X .

Řešení:

- a) $\{1, 10, 100\}$.
- b) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n > 5\}$.
- c) $\{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$ nebo $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- d) \emptyset
- e) $\{Y \mid Y \subseteq X\}$

Příklad 3: Uvažujme množiny $A = \{x, y, z\}$ a $B = \{x, y\}$.

- a) Je $A \subseteq B$?
- b) Je $A \supseteq B$?
- c) Co je $A \cup B$?
- d) Co je $A \cap B$?
- e) Co je $A \times B$?
- f) Co je $\mathcal{P}(B)$?

Řešení:

- a) Ne
- b) Ano
- c) A
- d) B
- e) $\{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y), (z, x), (z, y)\}$
- f) $\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$

Příklad 4: Rozhodněte, zda platí:

a) $a \in \{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}$

Řešení: ne

b) $\{a, \{a\}\} \cap \mathcal{P}(\{a, \{a\}\}) = \emptyset$

Řešení: ne

c) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

Řešení: ano

Příklad 5: Určete všechny prvky následujících množin:

a) $\{a, \{a\}\} \cup \{a, \{b\}, c\}$

Řešení: $a, \{a\}, \{b\}, c$

b) $\{a, \{a\}\} \cap \{a, \{b\}, c\}$

Řešení: a

c) $\{a, \{a\}\} - \{a, \{b\}, c\}$

Řešení: $\{a\}$

Příklad 6: Jestliže množina A má a prvků a množina B má b prvků, kolik prvků má množina $A \times B$? Vaši odpověď vysvětlete.

Řešení: $a \cdot b$

Příklad 7: Jestliže množina C má c prvků, kolik prvků má množina $\mathcal{P}(C)$? Vaši odpověď vysvětlete.

Řešení: 2^c

Příklad 8: Připomeňte si, co je to relace, a jaké znáte typy relací (homogenní vs. nehomogenní, unární, binární, atd.).

- a) Přesně definujte, co to znamená, že relace je reflexivní, ireflexivní, symetrická, asymetrická, antisymetrická, tranzitivní, funkční.
- b) Uvědomte si souvislost mezi binárními relacemi a orientovanými grafy (které mohou být i nekonečné) a popište, co jednotlivé vlastnosti uvedené v předchozím bodě znamenají z hlediska grafu reprezentujícího příslušnou relaci.
- c) Připomeňte si, co to znamená, že relace je ekvivalence. Jak pojem ekvivalence souvisí s pojmem rozkladu?

Příklad 9: Uveďte příklad binární relace, která je:

- a) Reflexivní a symetrická, ale není tranzitivní.

Řešení: Například následující relace na množině \mathbb{R} :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x - y| \leq 1\}$$

Nebo následující relace na množině $\{a, b, c\}$:

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$$

- b) Reflexivní a tranzitivní, ale není symetrická.

Řešení: Například relace \leq na množině \mathbb{N} nebo relace

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, c)\}$$

na množině $\{a, b, c\}$.

- c) Symetrická a tranzitivní, ale není reflexivní.

Řešení: Například relace

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}$$

na množině $\{a, b, c, d\}$ nebo prázdná relace \emptyset nad jakoukoliv neprázdnou množinou.

Příklad 10: Připomeňte si, co to znamená, že relace je uspořádání. Jaké znáte typy uspořádání? Uveďte příklad uspořádání na množině přirozených čísel, které není úplným uspořádáním.

Řešení: Například relace dělitelnosti na přirozených číslech.

Příklad 11: Nechť $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $Y = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Unární funkce $f : X \rightarrow Y$ a binární funkce $g : X \times Y \rightarrow Y$ jsou popsány následujícími tabulkami:

n	f(n)
1	6
2	7
3	6
4	7
5	6

g	6	7	8	9	10
1	10	10	10	10	10
2	7	8	9	10	6
3	7	7	8	8	9
4	9	8	7	6	10
5	6	6	6	6	6

- a) Jaká je hodnota $f(2)$?
- b) Co definičním oborem a oborem hodnot funkce f ?
- c) Jaká je hodnota $g(2, 10)$?
- d) Co definičním oborem a oborem hodnot funkce g ?
- e) Jaká je hodnota $g(4, f(4))$?

Řešení:

- a) 7
- b) Definiční obor je $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, obor hodnot je $\{6, 7\}$.
- c) 6
- d) $\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$
- e) 8

Příklad 12: Připomeňte si, co to znamená, že funkce je injektivní (prostá), surjektivní (na) a bijektivní. Je funkce $f(x) = x + 1$ injektivní, surjektivní a/nebo bijektivní na množině přirozených čísel \mathbb{N} ? A na množině celých čísel \mathbb{Z} ?

Řešení: Na množině \mathbb{Z} je funkce f injektivní, surjektivní i bijektivní, na množině \mathbb{N} je injektivní, ale není surjektivní ani bijektivní (pro žádné $x \in \mathbb{N}$ není $f(x) = 0$).

Příklad 13: Připomeňte si pojem binární operace na množině a co to znamená, že daná operace je asociativní, a co to znamená, že je komutativní. Uveďte příklad operace, která:

- a) je asociativní, ale není komutativní,
- b) je komutativní, ale není asociativní.
- c) není asociativní ani komutativní.

***Příklad 14:** Uvažujme asociativní operaci \circ na množině S . Ukažte, že hodnota výrazu $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n$, kde $x_i \in S$, je dobře definovaná, neboť tato hodnota nezávisí na konkrétním uzávorkování.

Řešení:

Uzavorkované výrazy definujme následovně: x , kde $x \in S$, je uzavorkovaný výraz, a $(\alpha_1 \circ \alpha_2)$, kde α_1 a α_2 jsou uzavorkované výrazy, je uzavorkovaný výraz (a žádné další uzavorkované výrazy neexistují). Velikost výrazu α , kterou označíme $size(\alpha)$, je definována tak, že $size(x) = 1$ pro $x \in S$ a $size((\alpha_1 \circ \alpha_2)) = size(\alpha_1) + size(\alpha_2)$. Hodnotu výrazu α označme $val(\alpha)$. Zápisem $\alpha = \beta$ budeme označovat, že α a β jsou identické výrazy. Zápis $val(\alpha) = val(\beta)$ znamená, že výrazy α a β nabývají stejných hodnot. Pro libovolné uzavorkované výrazy α, β, γ tedy platí $((\alpha \circ \beta) \circ \gamma) \neq (\alpha \circ (\beta \circ \gamma))$ a $(val(\alpha) \circ val(\beta)) \circ val(\gamma) = val(\alpha) \circ (val(\beta) \circ val(\gamma))$ (protože \circ je asociativní). Je také očividné, že $val((\alpha_1 \circ \alpha_2)) = val(\alpha_1) \circ val(\alpha_2)$.

Řekněme, že α je uzavorkovaný výraz vzniklý nějakým libovolným doplněním závorek do výrazu $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n$. V dalším textu budeme zápisem α_k , kde $0 \leq k \leq n$, označovat výraz

tvaru $((\dots((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \dots) \circ x_k) \circ (x_{k+1} \circ (x_{k+2} \circ (\dots \circ (x_{n-1} \circ x_n) \dots)))$. Speciálně tedy $\alpha_1 = (x_1 \circ (x_2 \circ (\dots \circ (x_{n-1} \circ x_n) \dots)))$ a $\alpha_{n-1} = ((\dots((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \dots) \circ x_n)$. Pozn.: Pro $n = 1$ je $\alpha_1 = \alpha_0 = x_1$.

Díky asociativitě operace \circ zjevně platí $val(\alpha_k) = val(\alpha_{k+1})$ pro každé k , kde $1 \leq k < n - 1$, takže $val(\alpha_1) = val(\alpha_2) = \dots = val(\alpha_{n-1})$.

Pro dokázání toho, že na uzávorkování výrazu α nezáleží, stačí dokázat, že $val(\alpha) = val(\alpha_1) = val(\alpha_{n-1})$. To se dá lehce dokázat indukcí podle $size(\alpha)$. Pokud $size(\alpha) = 1$, tvrzení zjevně platí, protože $\alpha = x_1$, což je jediné možné uzávorkování. Předpokládejme tedy, že $size(\alpha) > 1$, takže $\alpha = (\beta \circ \gamma)$, pro nějaké uzávorkované výrazy β a γ takové, že $size(\beta) < size(\alpha)$ a $size(\gamma) < size(\alpha)$.

Podle indukčního předpokladu je $val(\beta) = val(\beta_{k-1})$, kde $k = size(\beta)$ a $\beta_{k-1} = ((\dots((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \dots) \circ x_k)$, a $val(\gamma) = val(\gamma_1)$, kde $\gamma_1 = (x_{k+1} \circ (x_{k+2} \circ (\dots \circ (x_{n-1} \circ x_n) \dots)))$, takže $val(\alpha) = val((\beta \circ \gamma)) = val(\beta) \circ val(\gamma) = val(\beta_{k-1}) \circ val(\gamma_1) = val((\beta_{k-1} \circ \gamma_1)) = val(\alpha_k)$. Protože $val(\alpha) = val(\alpha_k)$ a $val(\alpha_k) = val(\alpha_1) = val(\alpha_{n-1})$, dostáváme $val(\alpha) = val(\alpha_1) = val(\alpha_{n-1})$, čímž je důkaz hotov.