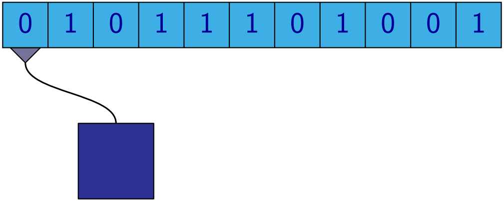
Konečné automaty

Rozpoznávání jazyka

Příklad: Uvažujme slova nad abecedou $\{0, 1\}$.

Chtěli bychom rozpoznávat jazyk L, který je tvořen slovy, ve kterých se vyskytuje sudý počet symbolů 1.

Chceme navrhnout zařízení, které přečte slovo, a sdělí nám, zda toto slovo patří do jazyka L či ne.

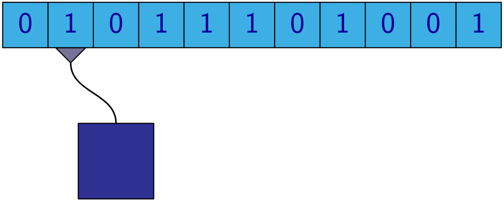


Rozpoznávání jazyka

Příklad: Uvažujme slova nad abecedou $\{0, 1\}$.

Chtěli bychom rozpoznávat jazyk L, který je tvořen slovy, ve kterých se vyskytuje sudý počet symbolů 1.

Chceme navrhnout zařízení, které přečte slovo, a sdělí nám, zda toto slovo patří do jazyka L či ne.

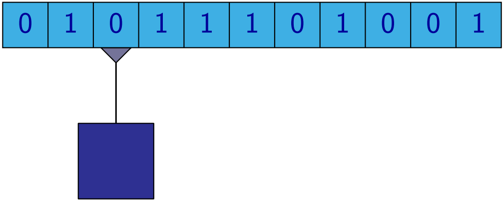


Rozpoznávání jazyka

Příklad: Uvažujme slova nad abecedou $\{0, 1\}$.

Chtěli bychom rozpoznávat jazyk L, který je tvořen slovy, ve kterých se vyskytuje sudý počet symbolů 1.

Chceme navrhnout zařízení, které přečte slovo, a sdělí nám, zda toto slovo patří do jazyka L či ne.

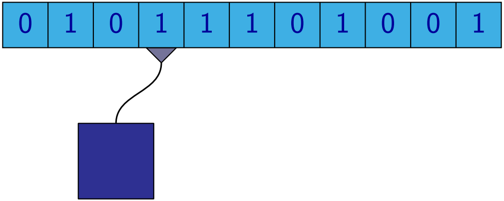


Rozpoznávání jazyka

Příklad: Uvažujme slova nad abecedou $\{0, 1\}$.

Chtěli bychom rozpoznávat jazyk L, který je tvořen slovy, ve kterých se vyskytuje sudý počet symbolů 1.

Chceme navrhnout zařízení, které přečte slovo, a sdělí nám, zda toto slovo patří do jazyka L či ne.

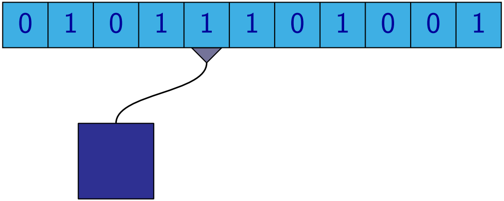


Rozpoznávání jazyka

Příklad: Uvažujme slova nad abecedou $\{0, 1\}$.

Chtěli bychom rozpoznávat jazyk L, který je tvořen slovy, ve kterých se vyskytuje sudý počet symbolů 1.

Chceme navrhnout zařízení, které přečte slovo, a sdělí nám, zda toto slovo patří do jazyka L či ne.

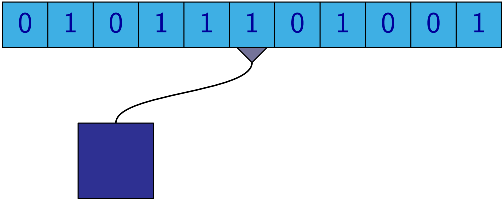


Rozpoznávání jazyka

Příklad: Uvažujme slova nad abecedou $\{0, 1\}$.

Chtěli bychom rozpoznávat jazyk L, který je tvořen slovy, ve kterých se vyskytuje sudý počet symbolů 1.

Chceme navrhnout zařízení, které přečte slovo, a sdělí nám, zda toto slovo patří do jazyka L či ne.

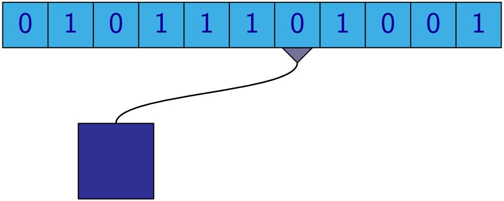


Rozpoznávání jazyka

Příklad: Uvažujme slova nad abecedou $\{0, 1\}$.

Chtěli bychom rozpoznávat jazyk L, který je tvořen slovy, ve kterých se vyskytuje sudý počet symbolů 1.

Chceme navrhnout zařízení, které přečte slovo, a sdělí nám, zda toto slovo patří do jazyka L či ne.

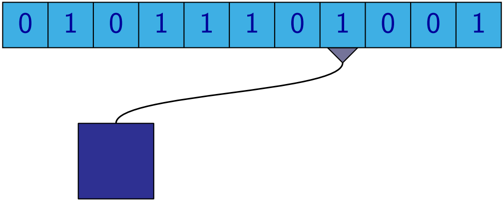


Rozpoznávání jazyka

Příklad: Uvažujme slova nad abecedou $\{0, 1\}$.

Chtěli bychom rozpoznávat jazyk L, který je tvořen slovy, ve kterých se vyskytuje sudý počet symbolů 1.

Chceme navrhnout zařízení, které přečte slovo, a sdělí nám, zda toto slovo patří do jazyka L či ne.

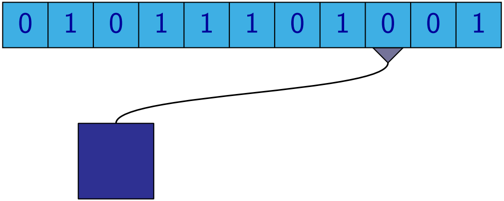


Rozpoznávání jazyka

Příklad: Uvažujme slova nad abecedou $\{0, 1\}$.

Chtěli bychom rozpoznávat jazyk L, který je tvořen slovy, ve kterých se vyskytuje sudý počet symbolů 1.

Chceme navrhnout zařízení, které přečte slovo, a sdělí nám, zda toto slovo patří do jazyka L či ne.

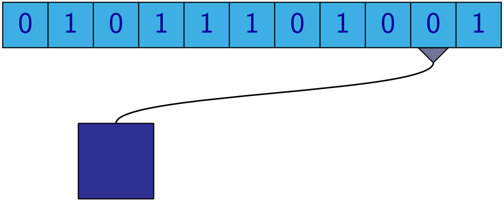


Rozpoznávání jazyka

Příklad: Uvažujme slova nad abecedou $\{0, 1\}$.

Chtěli bychom rozpoznávat jazyk L, který je tvořen slovy, ve kterých se vyskytuje sudý počet symbolů 1.

Chceme navrhnout zařízení, které přečte slovo, a sdělí nám, zda toto slovo patří do jazyka L či ne.

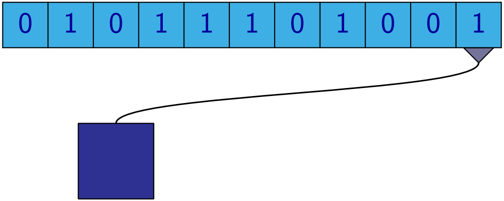


Rozpoznávání jazyka

Příklad: Uvažujme slova nad abecedou $\{0,1\}$.

Chtěli bychom rozpoznávat jazyk L, který je tvořen slovy, ve kterých se vyskytuje sudý počet symbolů 1.

Chceme navrhnout zařízení, které přečte slovo, a sdělí nám, zda toto slovo patří do jazyka L či ne.

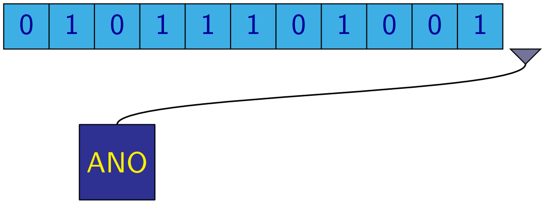


Rozpoznávání jazyka

Příklad: Uvažujme slova nad abecedou $\{0, 1\}$.

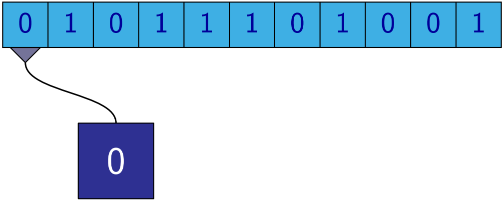
Chtěli bychom rozpoznávat jazyk L, který je tvořen slovy, ve kterých se vyskytuje sudý počet symbolů 1.

Chceme navrhnout zařízení, které přečte slovo, a sdělí nám, zda toto slovo patří do jazyka L či ne.



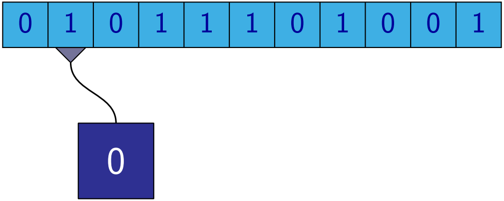
Rozpoznávání jazyka

První nápad: Počítat počet výskytů symbolů 1.

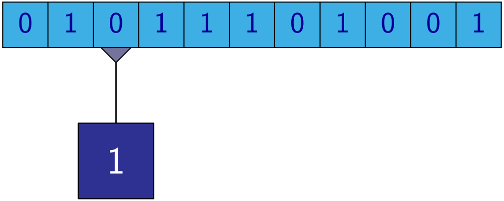


Rozpoznávání jazyka

První nápad: Počítat počet výskytů symbolů 1.

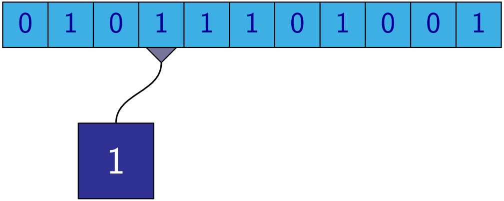


První nápad: Počítat počet výskytů symbolů 1.

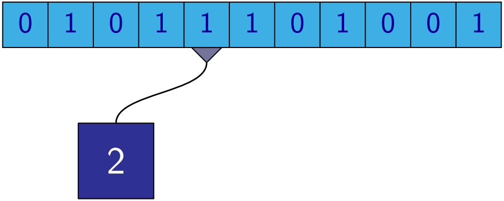


Rozpoznávání jazyka

První nápad: Počítat počet výskytů symbolů 1.

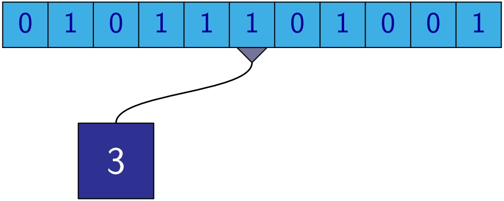


První nápad: Počítat počet výskytů symbolů 1.



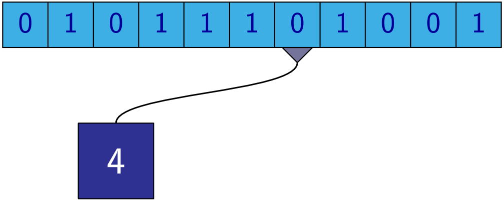
Rozpoznávání jazyka

První nápad: Počítat počet výskytů symbolů 1.



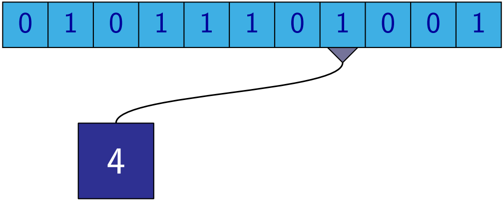
Rozpoznávání jazyka

První nápad: Počítat počet výskytů symbolů 1.



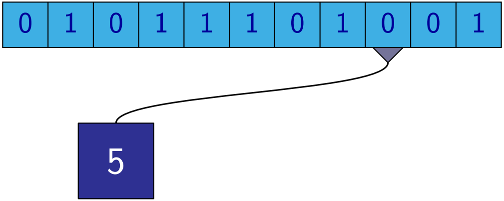
Rozpoznávání jazyka

První nápad: Počítat počet výskytů symbolů 1.



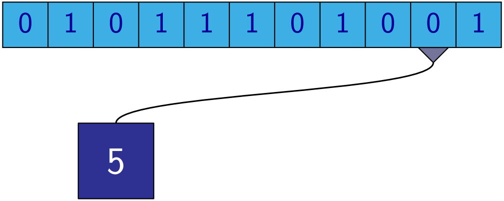
Rozpoznávání jazyka

První nápad: Počítat počet výskytů symbolů 1.



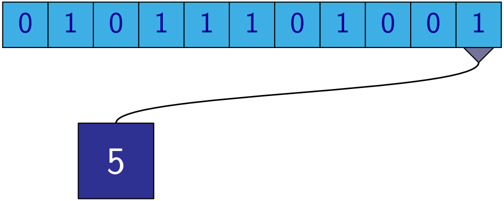
Rozpoznávání jazyka

První nápad: Počítat počet výskytů symbolů 1.



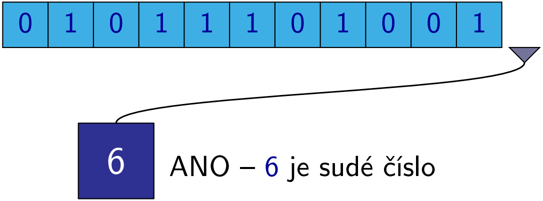
Rozpoznávání jazyka

První nápad: Počítat počet výskytů symbolů 1.



Rozpoznávání jazyka

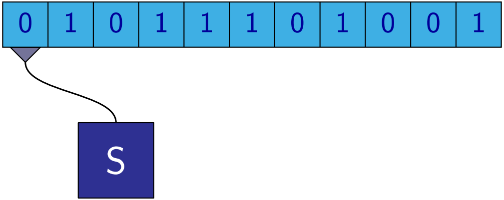
První nápad: Počítat počet výskytů symbolů 1.



ANO – 6 je sudé číslo

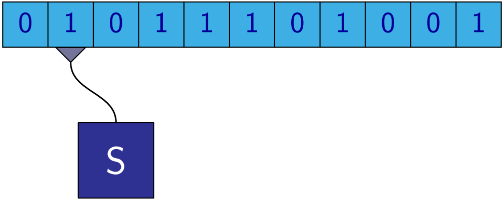
Rozpoznávání jazyka

Druhý nápad: Ve skutečnosti nás zajímá pouze, zda počet dosud přečtených symbolů 1 je sudý nebo lichý (tj. místo čísla si stačí pamatovat jen jeho poslední bit).



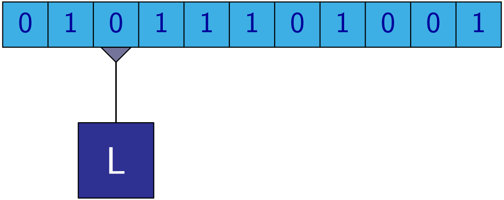
Rozpoznávání jazyka

Druhý nápad: Ve skutečnosti nás zajímá pouze, zda počet dosud přečtených symbolů 1 je sudý nebo lichý (tj. místo čísla si stačí pamatovat jen jeho poslední bit).

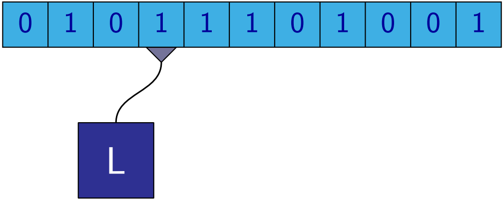


Rozpoznávání jazyka

Druhý nápad: Ve skutečnosti nás zajímá pouze, zda počet dosud přečtených symbolů 1 je sudý nebo lichý (tj. místo čísla si stačí pamatovat jen jeho poslední bit).

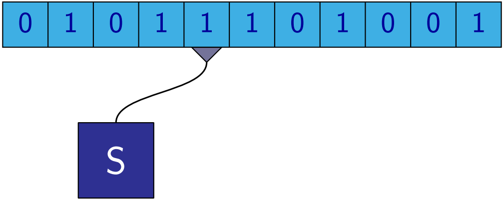


Druhý nápad: Ve skutečnosti nás zajímá pouze, zda počet dosud přečtených symbolů 1 je sudý nebo lichý (tj. místo čísla si stačí pamatovat jen jeho poslední bit).



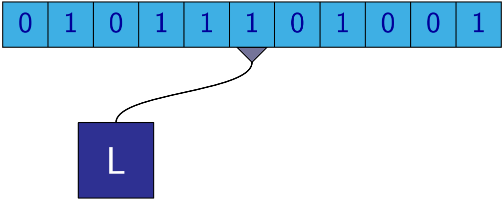
Rozpoznávání jazyka

Druhý nápad: Ve skutečnosti nás zajímá pouze, zda počet dosud přečtených symbolů 1 je sudý nebo lichý (tj. místo čísla si stačí pamatovat jen jeho poslední bit).

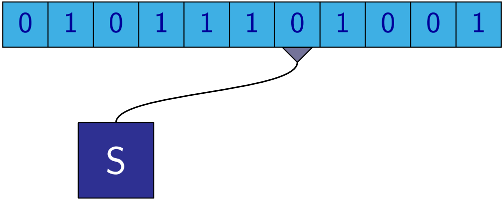


Rozpoznávání jazyka

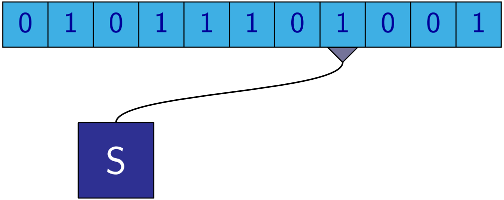
Druhý nápad: Ve skutečnosti nás zajímá pouze, zda počet dosud přečtených symbolů 1 je sudý nebo lichý (tj. místo čísla si stačí pamatovat jen jeho poslední bit).



Druhý nápad: Ve skutečnosti nás zajímá pouze, zda počet dosud přečtených symbolů 1 je sudý nebo lichý (tj. místo čísla si stačí pamatovat jen jeho poslední bit).

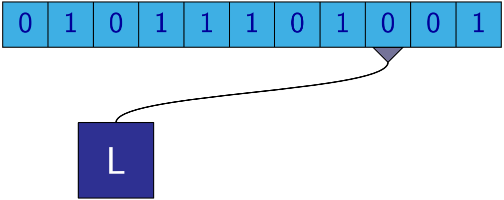


Druhý nápad: Ve skutečnosti nás zajímá pouze, zda počet dosud přečtených symbolů 1 je sudý nebo lichý (tj. místo čísla si stačí pamatovat jen jeho poslední bit).



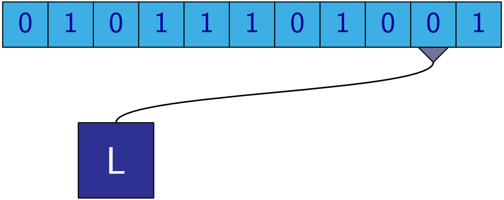
Rozpoznávání jazyka

Druhý nápad: Ve skutečnosti nás zajímá pouze, zda počet dosud přečtených symbolů 1 je sudý nebo lichý (tj. místo čísla si stačí pamatovat jen jeho poslední bit).



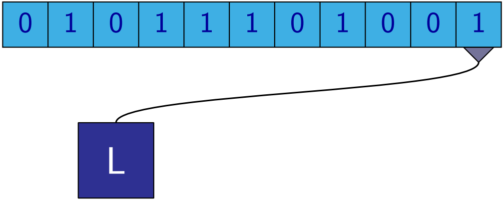
Rozpoznávání jazyka

Druhý nápad: Ve skutečnosti nás zajímá pouze, zda počet dosud přečtených symbolů 1 je sudý nebo lichý (tj. místo čísla si stačí pamatovat jen jeho poslední bit).



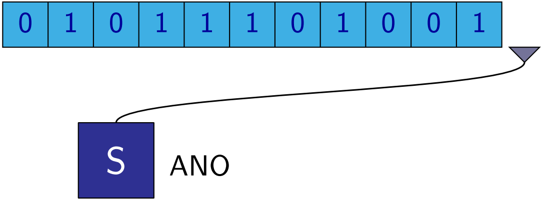
Rozpoznávání jazyka

Druhý nápad: Ve skutečnosti nás zajímá pouze, zda počet dosud přečtených symbolů 1 je sudý nebo lichý (tj. místo čísla si stačí pamatovat jen jeho poslední bit).



Rozpoznávání jazyka

Druhý nápad: Ve skutečnosti nás zajímá pouze, zda počet dosud přečtených symbolů 1 je sudý nebo lichý (tj. místo čísla si stačí pamatovat jen jeho poslední bit).



Rozpoznávání jazyka

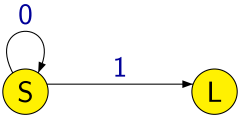
Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:

Rozpoznávání jazyka

Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:

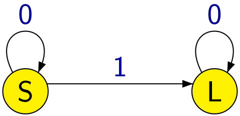
Rozpoznávání jazyka

Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:



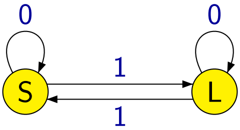
Rozpoznávání jazyka

Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:



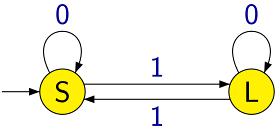
Rozpoznávání jazyka

Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:



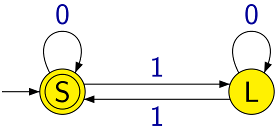
Rozpoznávání jazyka

Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:



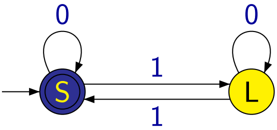
Rozpoznávání jazyka

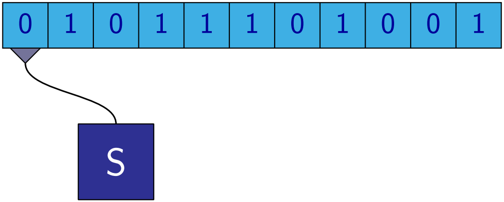
Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:



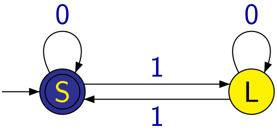
Rozpoznávání jazyka

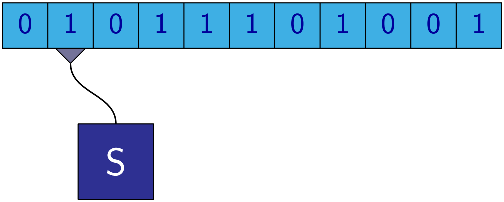
Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:





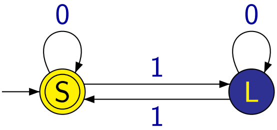
Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:

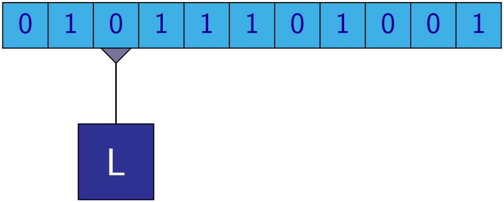




Rozpoznávání jazyka

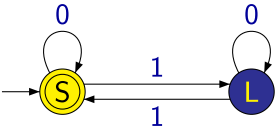
Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:

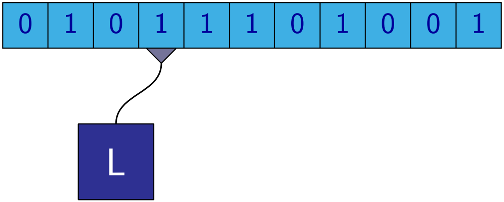




Rozpoznávání jazyka

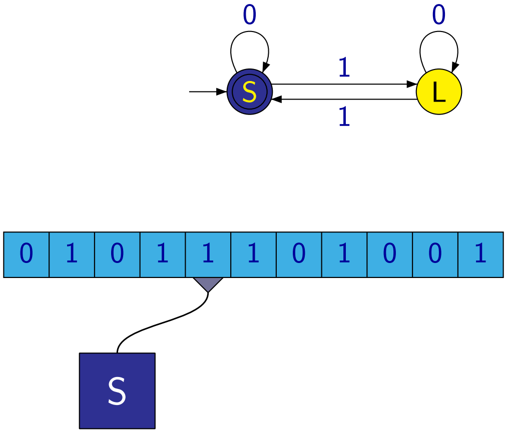
Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:





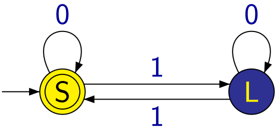
Rozpoznávání jazyka

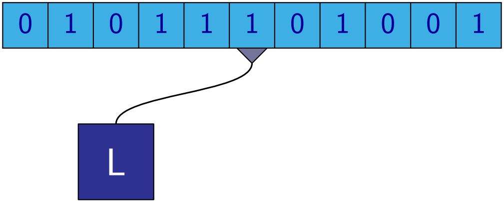
Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:



Rozpoznávání jazyka

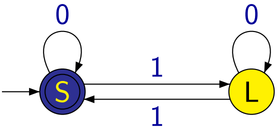
Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:

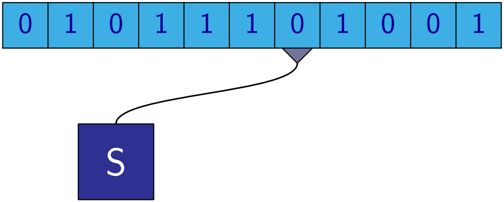




Rozpoznávání jazyka

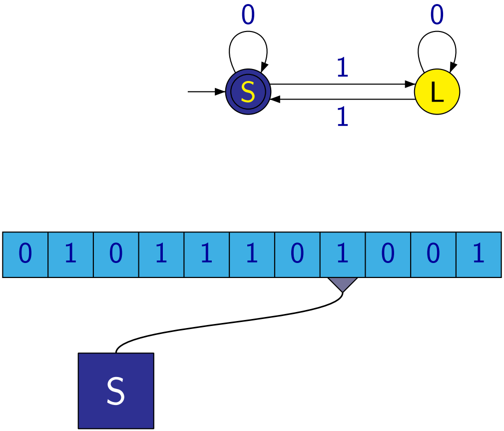
Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:





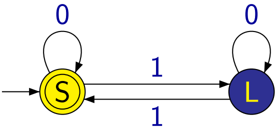
Rozpoznávání jazyka

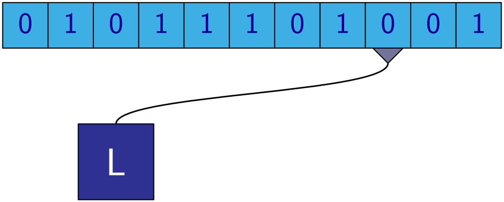
Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:



Rozpoznávání jazyka

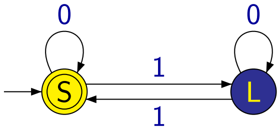
Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:

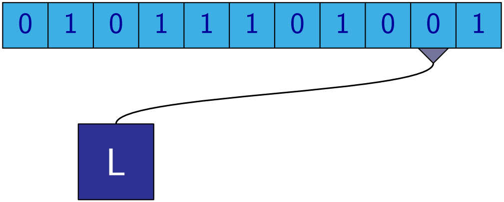




Rozpoznávání jazyka

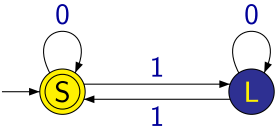
Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:

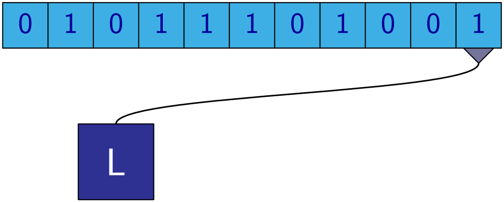




Rozpoznávání jazyka

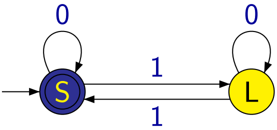
Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:

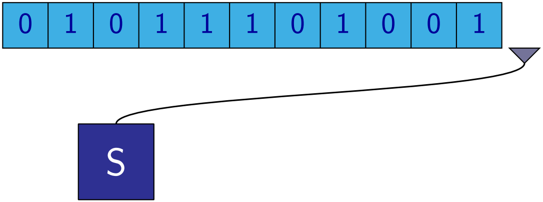




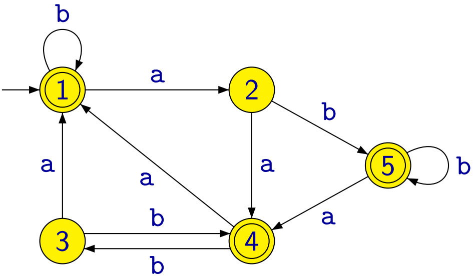
Rozpoznávání jazyka

Chovaní tohoto zařízení můžeme popsat grafem:





Deterministický konečný automat



Deterministický konečný automat se skládá ze **stavů** a **přechodů**. Jeden ze stavů je označen jako **počáteční stav** a některé ze stavů jsou označeny jako **přijímající**.

Deterministický konečný automat

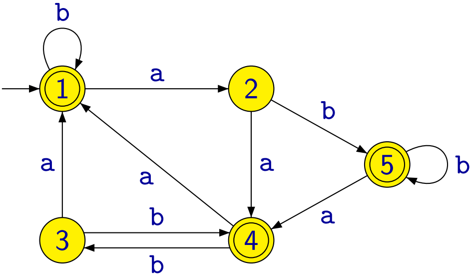
Formálně je **deterministický konečný automat** (**DKA**) definován jako pětice

$$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

kde:

- Q je neprázdná konečná množina **stavů**
- Σ je **abeceda** (neprázdná konečná množina symbolů)
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ je **přechodová funkce**
- $q_0 \in Q$ je **počáteční stav**
- $F \subseteq Q$ je množina **přijímajících stavů**

Deterministický konečný automat



- $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $q_0 = 1$
- $F = \{1, 4, 5\}$

$$
\begin{array}{ll}
\delta(1, \mathtt{a}) = 2 & \delta(1, \mathtt{b}) = 1 \\
\delta(2, \mathtt{a}) = 4 & \delta(2, \mathtt{b}) = 5 \\
\delta(3, \mathtt{a}) = 1 & \delta(3, \mathtt{b}) = 4 \\
\delta(4, \mathtt{a}) = 1 & \delta(4, \mathtt{b}) = 3 \\
\delta(5, \mathtt{a}) = 4 & \delta(5, \mathtt{b}) = 5
\end{array}
$$

Deterministický konečný automat

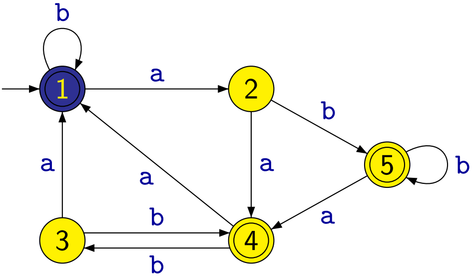
Místo zápisu

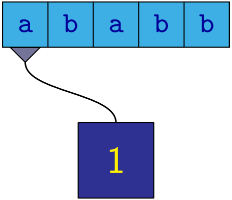
$$
\begin{array}{ll}
\delta(1, \mathtt{a}) = 2 & \delta(1, \mathtt{b}) = 1 \\
\delta(2, \mathtt{a}) = 4 & \delta(2, \mathtt{b}) = 5 \\
\delta(3, \mathtt{a}) = 1 & \delta(3, \mathtt{b}) = 4 \\
\delta(4, \mathtt{a}) = 1 & \delta(4, \mathtt{b}) = 3 \\
\delta(5, \mathtt{a}) = 4 & \delta(5, \mathtt{b}) = 5
\end{array}
$$

budeme raději používat stručnější tabulku nebo grafické znázornění:

δ	a	b
$\leftrightarrow$ 1	2	1
2	4	5
3	1	4
$\leftarrow$ 4	1	3
$\leftarrow$ 5	4	5

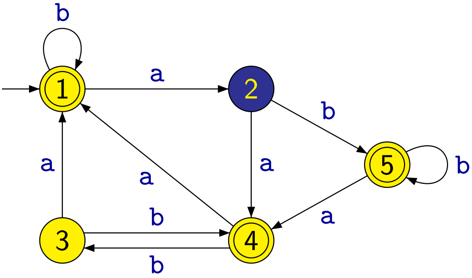
Deterministický konečný automat

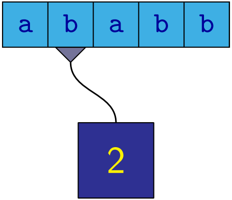




1

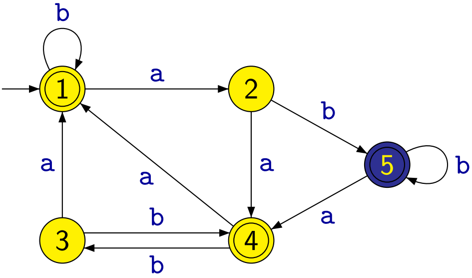
Deterministický konečný automat

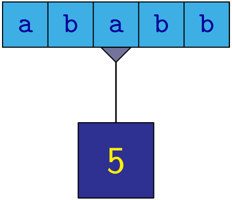




$$1 \xrightarrow{\mathtt{a}} 2$$

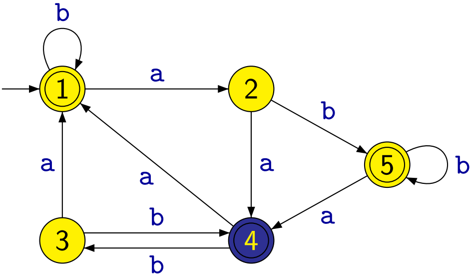
Deterministický konečný automat

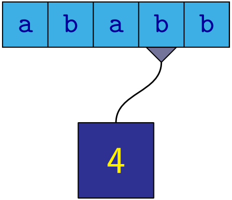




$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 5$$

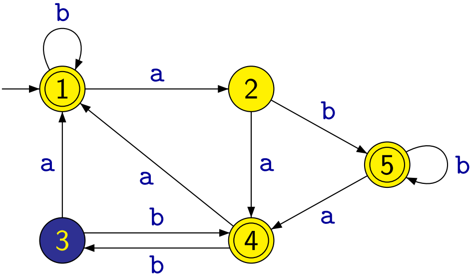
Deterministický konečný automat

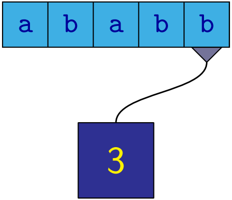




$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 5 \xrightarrow{a} 4$$

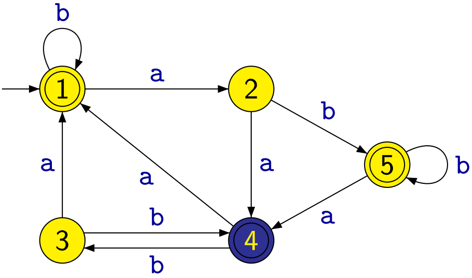
Deterministický konečný automat

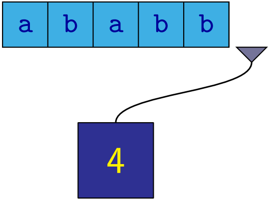




$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 5 \xrightarrow{a} 4 \xrightarrow{b} 3$$

Deterministický konečný automat





$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 5 \xrightarrow{a} 4 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{b} 4$$

Deterministický konečný automat

Definice

Mějme DKA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Zápisem $q \xrightarrow{w} q'$, kde $q, q' \in Q$ a $w \in \Sigma^*$, budeme označovat to, že pokud je automat ve stavu q, tak přečtením slova w přejde do stavu q'.

Poznámka: $\longrightarrow \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$ je ternární relace.

Místo $(q, w, q') \in \longrightarrow$ píšeme $q \xrightarrow{w} q'$.

Pro DKA platí, že pro libovolný stav q a libovolné slovo w existuje právě jeden stav q' takový, že $q \xrightarrow{w} q'$.

Deterministický konečný automat

Relaci $\longrightarrow$ můžeme formálně definovat následující induktivní definicí:

- $q \xrightarrow{\varepsilon} q$ pro libovolné $q \in Q$
- Pro $a \in \Sigma$ a $w \in \Sigma^*$:
  $q \xrightarrow{aw} q'$ právě tehdy, když existuje $q'' \in Q$ takové, že $\delta(q, a) = q''$ a $q'' \xrightarrow{w} q'$.

Deterministický konečný automat

Slovo $w \in \Sigma^*$ je **přijímáno** deterministickým konečným automatem $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ právě tehdy, když existuje stav $q \in F$ takový, že $q_0 \xrightarrow{w} q$.

Definice

Jazyk rozpoznávaný (přijímaný) daným deterministickým konečným automatem $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, označovaný $L(A)$, je množina všech slov přijímaných tímto automatem, tj.

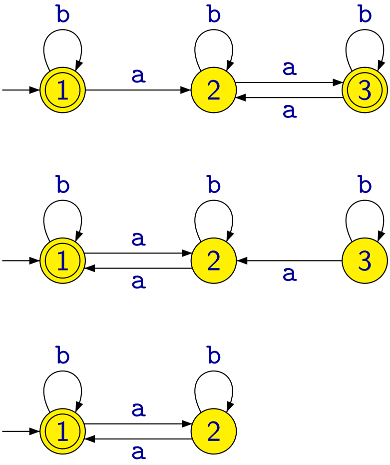
$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F : q_0 \xrightarrow{w} q\}$$

Regulární jazyky

Definice

Jazyk L je **regulární** právě tehdy, když existuje nějaký deterministicý konečný automat A, který jej přijímá, tj. DKA A, takový, že $L(A) = L$.

Ekvivalence automatů



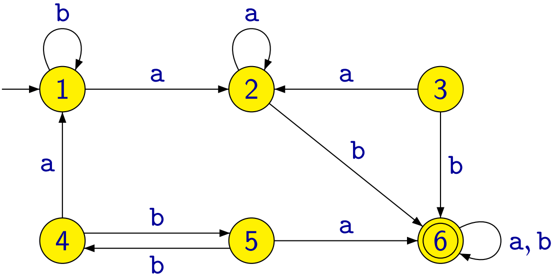
Všechny 3 automaty přijímají jazyk všech slov se sudým počtem *a*.

Ekvivalence automatů

Definice

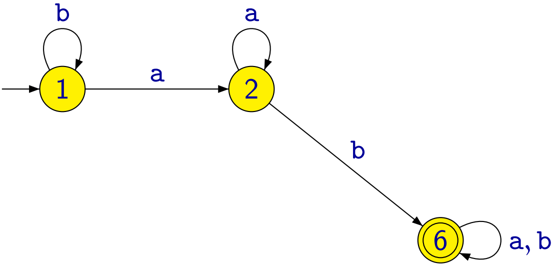
O konečných automatech A_1, A_2 řekneme, že jsou **ekvivalentní**, jestliže $L(A_1) = L(A_2)$.

Nedosažitelné stavy automatu



- Automat přijímá jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } ab\}$
- Pro žádnou posloupnost vstupních symbolů se automat nedostane do stavů 3, 4 nebo 5.

Nedosažitelné stavy automatu



- Automat přijímá jazyk $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } ab\}$
- Pro žádnou posloupnost vstupních symbolů se automat nedostane do stavů 3, 4 nebo 5.
- Pokud tyto stavy odstraníme, pořád automat přijímá stejný jazyk L.

Nedosažitelné stavy automatu

Definice

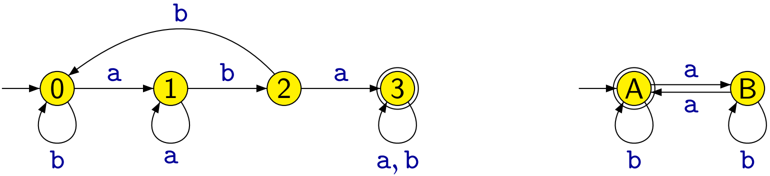
Stav q konečného automatu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je **dosažitelný** pokud existuje nějaké slovo w takové, že $q_0 \xrightarrow{w} q$.

V opačném případě stav nazýváme **nedosažitelný**.

- Do nedosažitelných stavů nevede v grafu automatu žádná orientovaná cesta z počátečního stavu.
- Nedosažitelné stavy můžeme z automatu odstranit (spolu se všemi přechody vedoucími do nich a z nich). Jazyk přijímaný automatem se nezmění.

Automat pro průnik jazyků

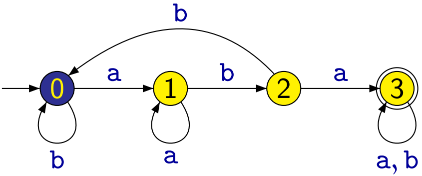
Máme následující dva automaty:

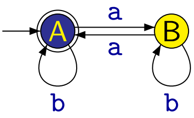


Příjmou oba slovo ababb?

Automat pro průnik jazyků

Máme následující dva automaty:

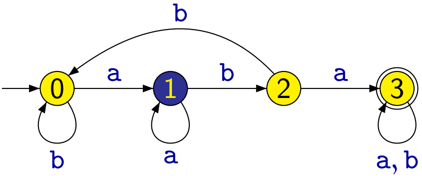


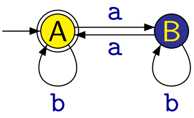


Příjmou oba slovo ababb?

Automat pro průnik jazyků

Máme následující dva automaty:

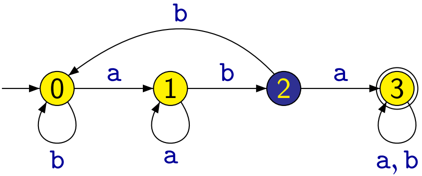


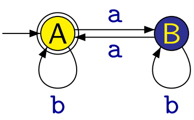


Příjmou oba slovo ababb?

Automat pro průnik jazyků

Máme následující dva automaty:

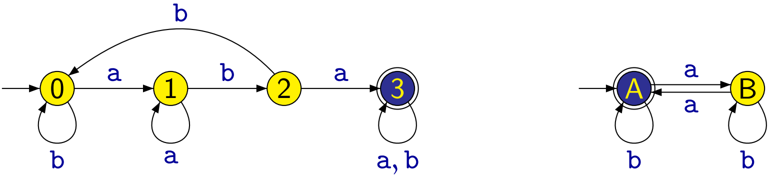




Příjmou oba slovo ababb?

Automat pro průnik jazyků

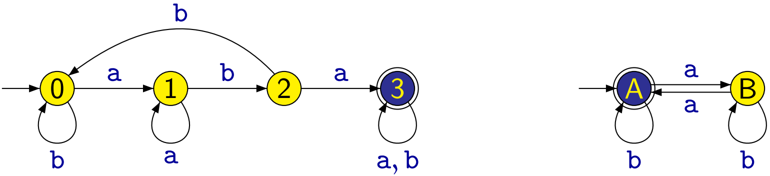
Máme následující dva automaty:



Příjmou oba slovo ababb?

Automat pro průnik jazyků

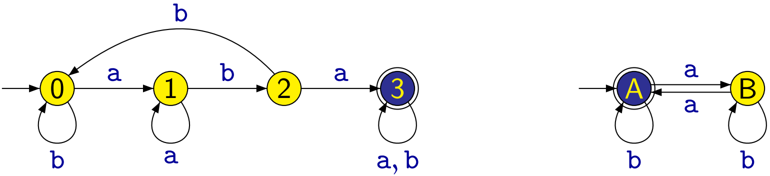
Máme následující dva automaty:



Příjmou oba slovo ababb?

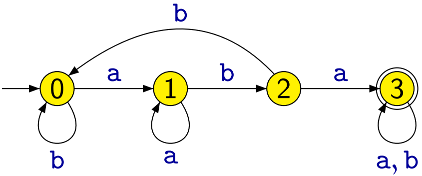
Automat pro průnik jazyků

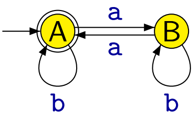
Máme následující dva automaty:



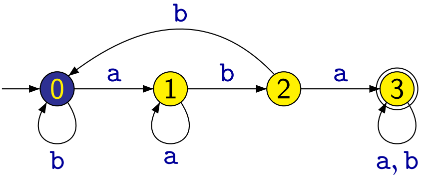
Příjmou oba slovo `ababb`?

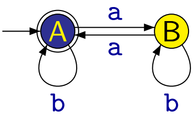
Automat pro průnik jazyků

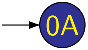




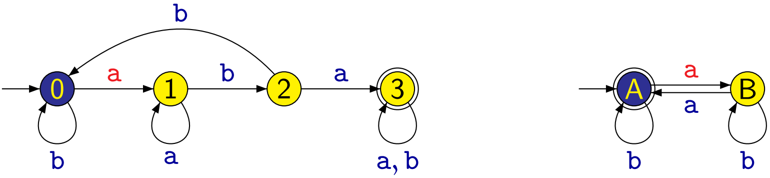
Automat pro průnik jazyků

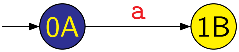




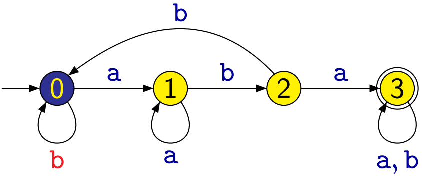


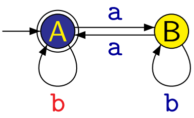
Automat pro průnik jazyků

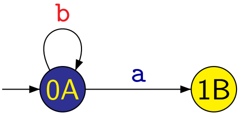


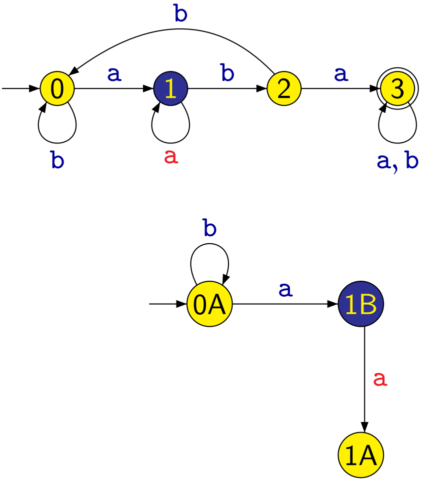


Automat pro průnik jazyků

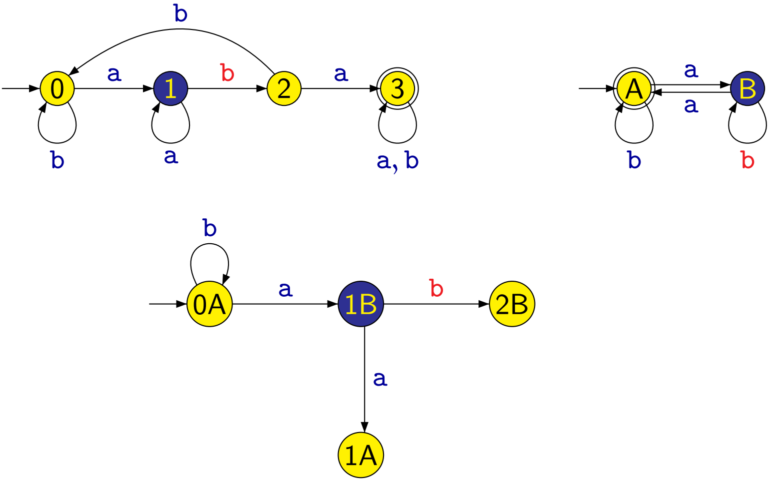




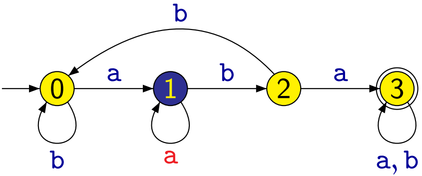


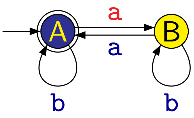

b
a
b
a
0
1
2
3
b
a
a, b
A
B
a
a
b
b
b
0A
a
1B
a
1A

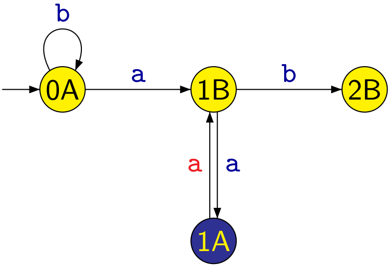
Automat pro průnik jazyků



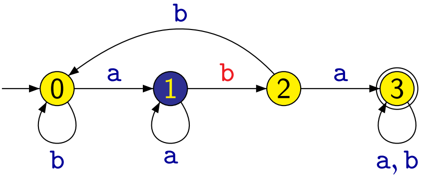
Automat pro průnik jazyků

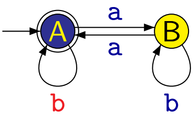


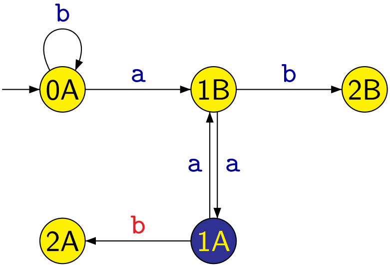




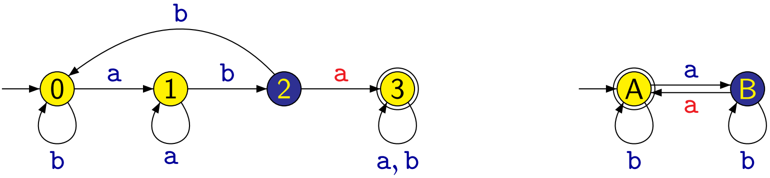
Automat pro průnik jazyků

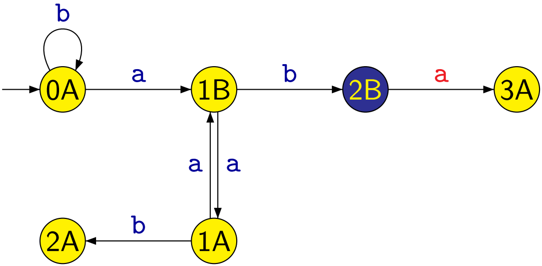




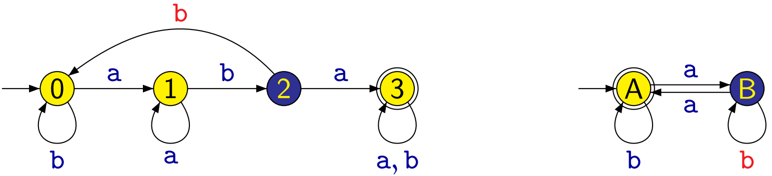


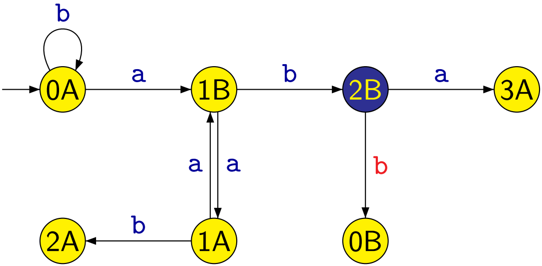
Automat pro průnik jazyků



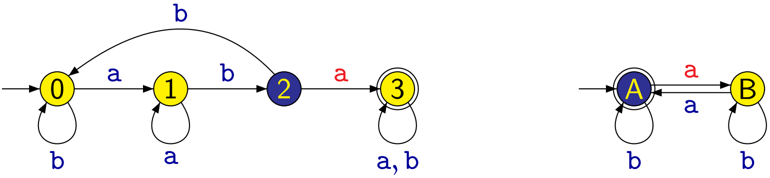


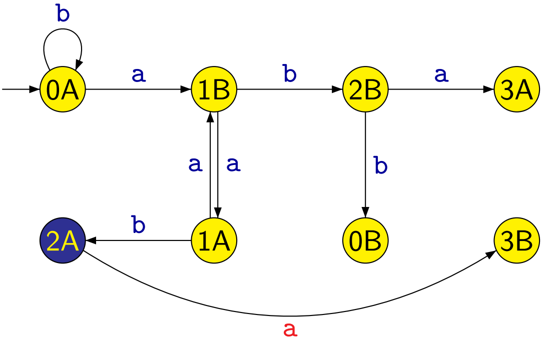
Automat pro průnik jazyků



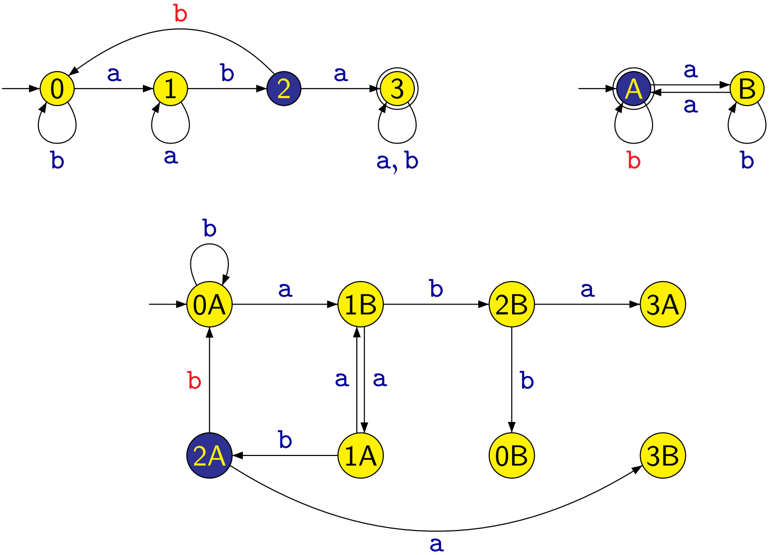


Automat pro průnik jazyků

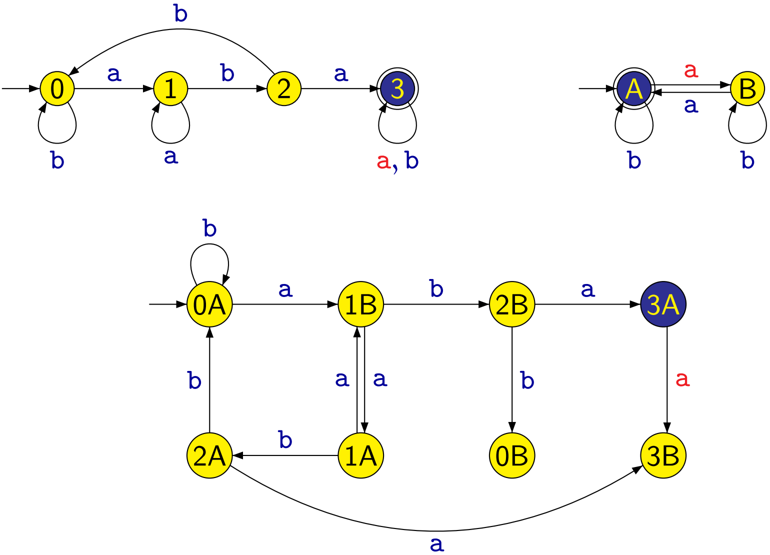




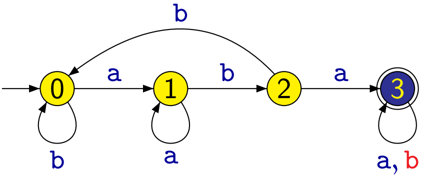
Automat pro průnik jazyků

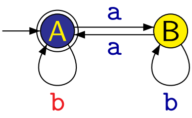


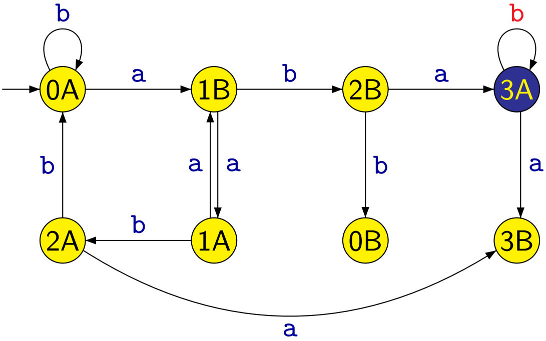
Automat pro průnik jazyků



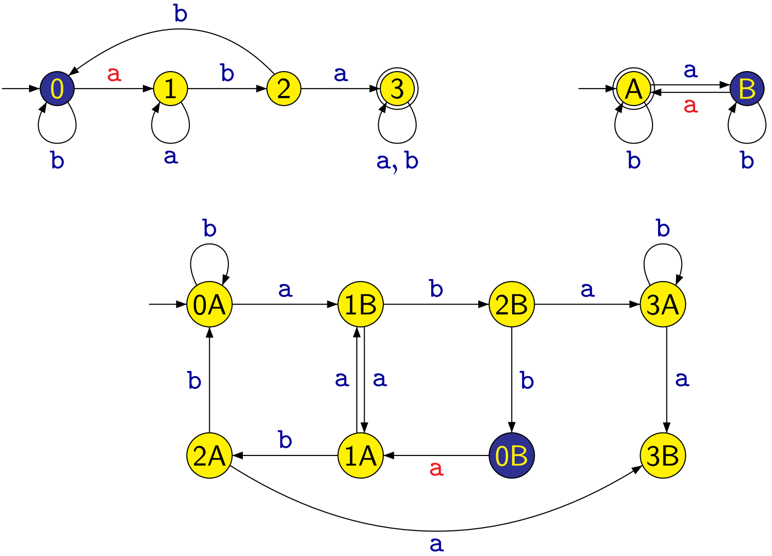
Automat pro průnik jazyků



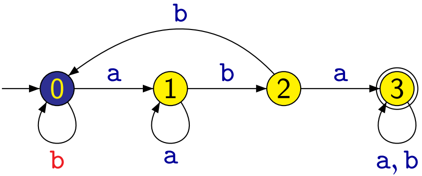


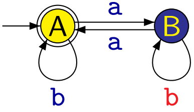


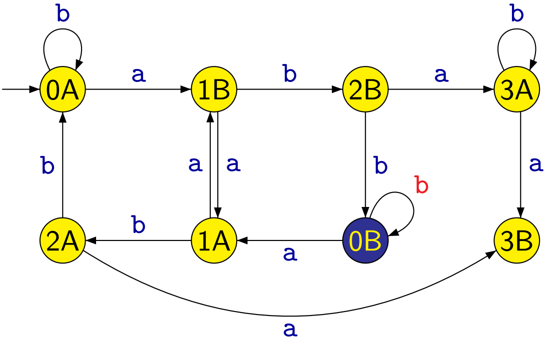
Automat pro průnik jazyků



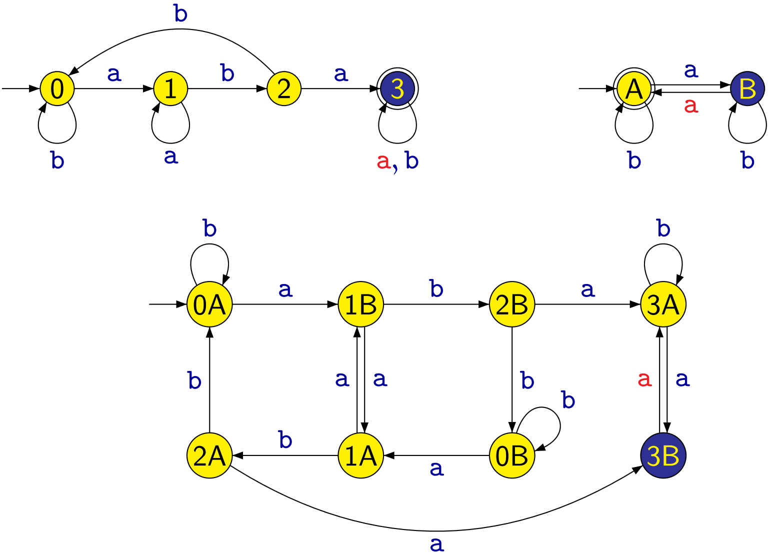
Automat pro průnik jazyků



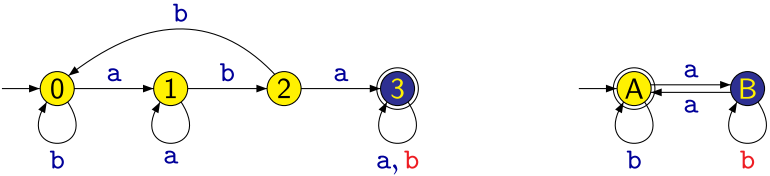


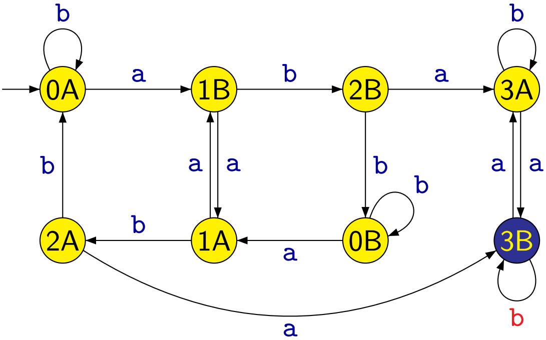


Automat pro průnik jazyků

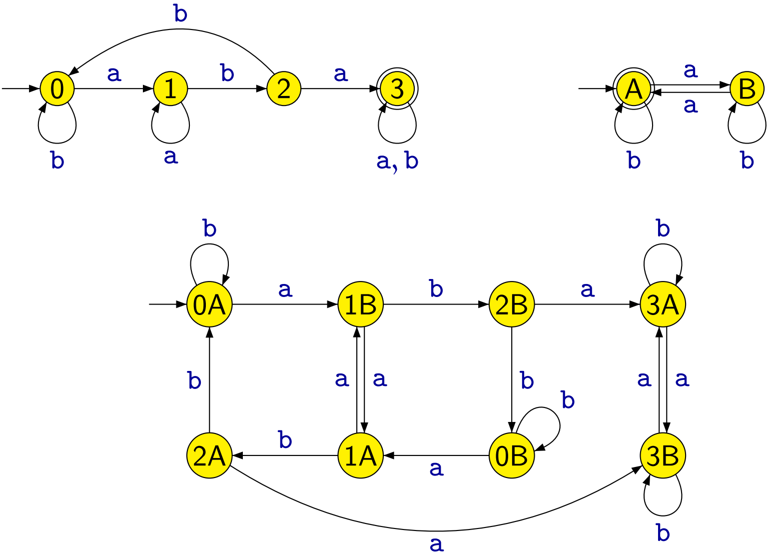


Automat pro průnik jazyků

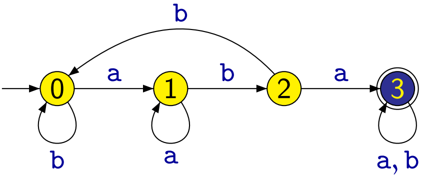


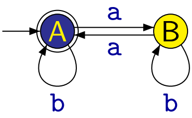


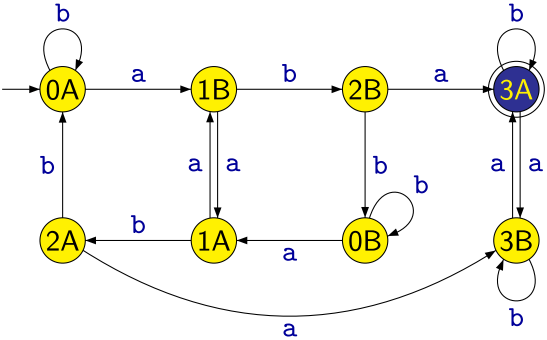
Automat pro průnik jazyků



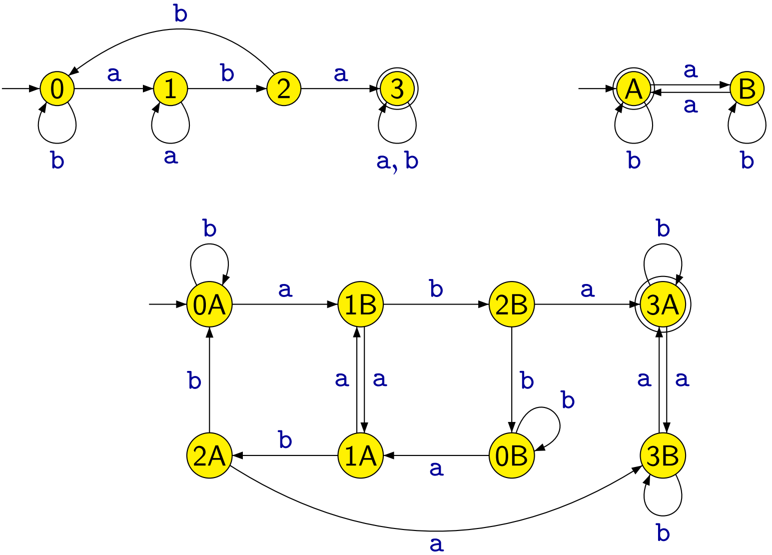
Automat pro průnik jazyků







Automat pro průnik jazyků



Automat pro průnik jazyků

Formálně můžeme popsat tuto konstrukci následovně:

Předpokládáme, že máme dva deterministické konečné automaty $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$ a $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$.

K nim setrojíme DKA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ kde:

- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $\delta(\,(q_1, q_2), a\,) = (\,\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)\,)$ pro všechna $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$, $a \in \Sigma$
- $q_0 = (q_{01}, q_{02})$
- $F = F_1 \times F_2$

Není težké ověřit, že pro libovolné slovo $w \in \Sigma^*$ platí, že $w \in L(A)$ právě tehdy, když $w \in L(A_1)$ a $w \in L(A_2)$, tj.

$$L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$$

Průnik regulárních jazyků

Věta

Jestliže jazyky $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ jsou regulární, pak také jazyk $L_1 \cap L_2$ je regulární.

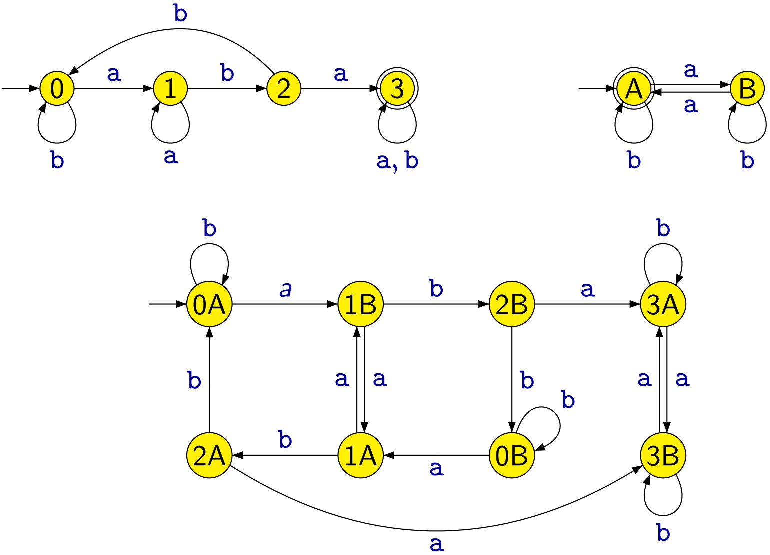
Důkaz: Předpokládejme, že A_1 a A_2 jsou deterministické konečné automaty takové, že

$$L_1 = L(A_1) \qquad\qquad L_2 = L(A_2)$$

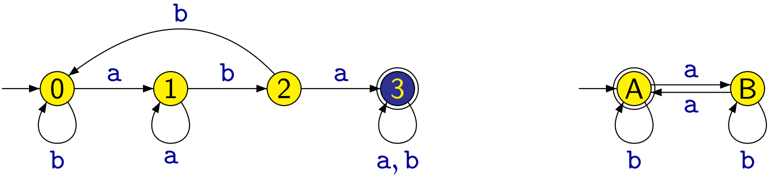
Popsanou konstrukcí k nim můžeme sestrojit deterministický konečný automat A takový, že

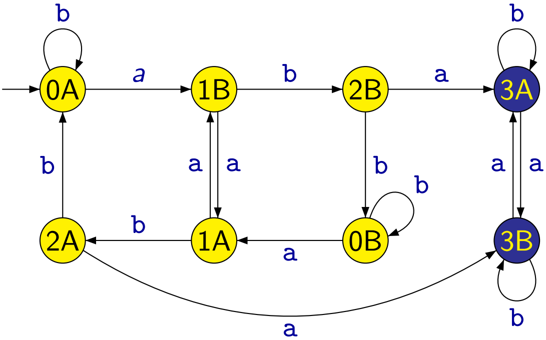
$$L(A) = L(A_1) \cap L(A_2) = L_1 \cap L_2$$

Automat pro sjednocení jazyků

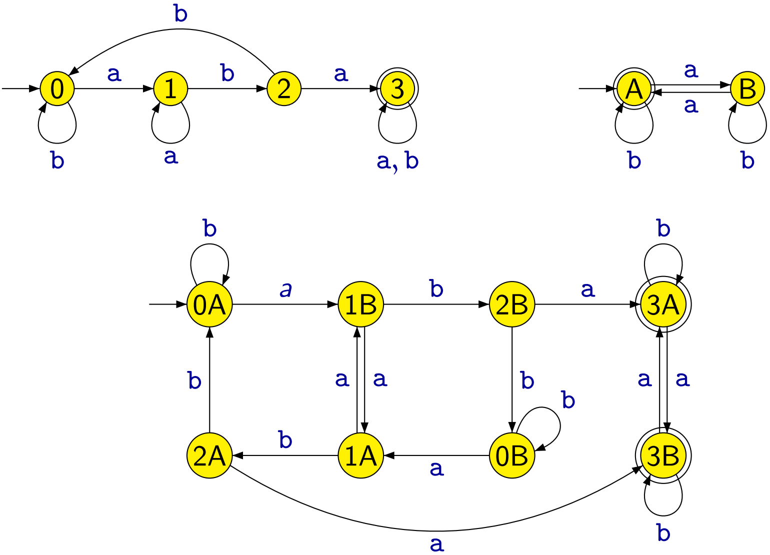


Automat pro sjednocení jazyků

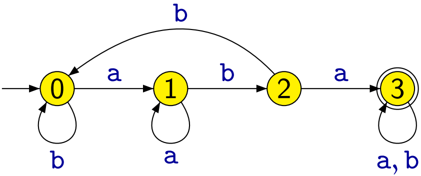


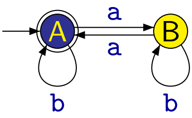


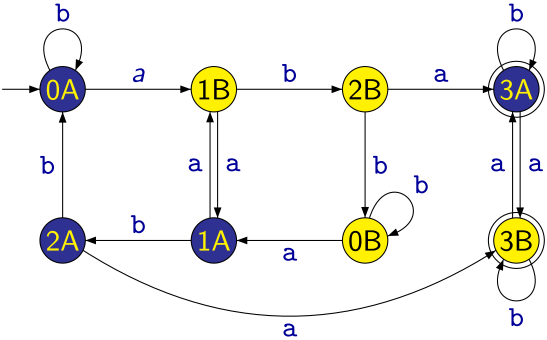
Automat pro sjednocení jazyků



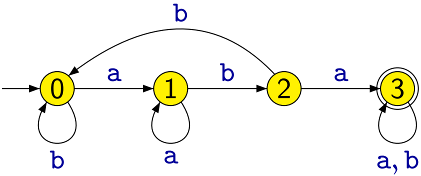
Automat pro sjednocení jazyků

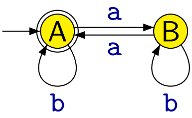


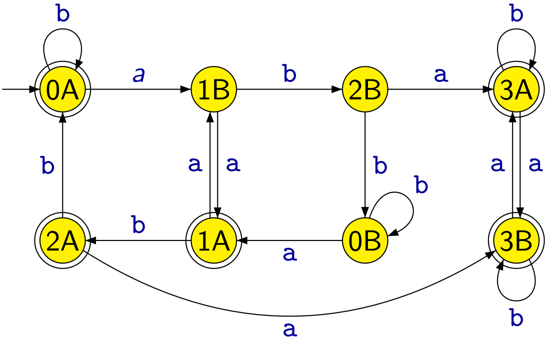




Automat pro sjednocení jazyků







Sjednocení regulárních jazyků

Konstukce automatu A, který přijímá **sjednocení** jazyků přijímaných automaty A_1 a A_2, tj. jazyk

$$L(A_1) \cup L(A_1)$$

je téměř stejná jako v případě automatu přijímajícího $L(A_1) \cap L(A_2)$.

Jediný rozdíl je v definici množiny přijímajících stavů:

- $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$

Sjednocení regulárních jazyků

Konstukce automatu A, který přijímá **sjednocení** jazyků přijímaných automaty A_1 a A_2, tj. jazyk

$$L(A_1) \cup L(A_1)$$

je téměř stejná jako v případě automatu přijímajícího $L(A_1) \cap L(A_2)$.

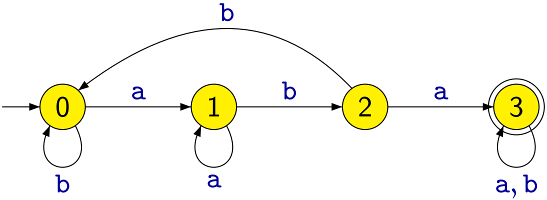
Jediný rozdíl je v definici množiny přijímajících stavů:

- $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$

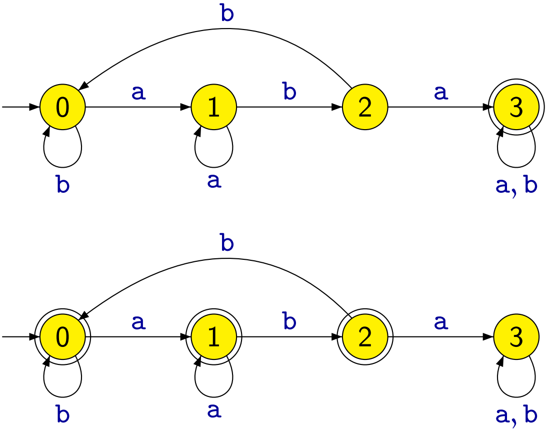
Věta

Jestliže jazyky $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ jsou regulární, pak také jazyk $L_1 \cup L_2$ je regulární.

Automat pro doplněk jazyka



Automat pro doplněk jazyka



Doplněk regulárního jazyka

K DKA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sestrojíme DKA $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$.

Je očividné, že pro každé slovo $w \in \Sigma^*$ platí, že $w \in L(A')$ právě tehdy, když $w \notin L(A)$, tj.

$$L(A') = \overline{L(A)}$$

Doplněk regulárního jazyka

K DKA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sestrojíme DKA $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$.

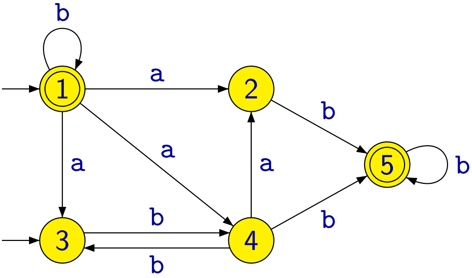
Je očividné, že pro každé slovo $w \in \Sigma^*$ platí, že $w \in L(A')$ právě tehdy, když $w \notin L(A)$, tj.

$$L(A') = \overline{L(A)}$$

Věta

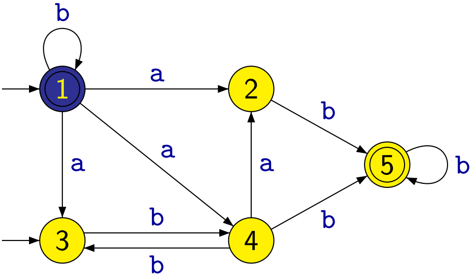
Jestliže jazyk L je regulární, pak také jeho doplněk $\overline{L}$ je regulární.

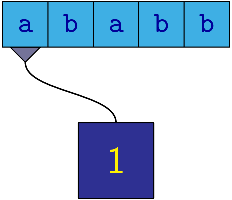
Nedeterministický konečný automat



- Z jednoho stavu může vézt libovolný (i nulový) počet přechodů označených stejným symbolem.
- V automatu může být víc než jeden počáteční stav.

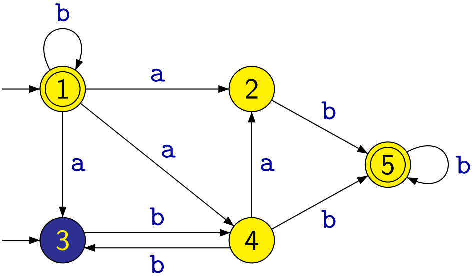
Nedeterministický konečný automat

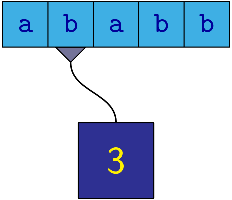




1

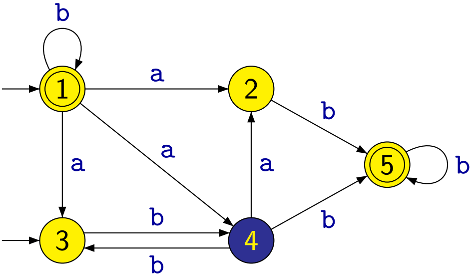
Nedeterministický konečný automat

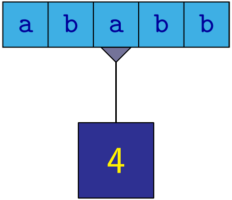




$$1 \xrightarrow{a} 3$$

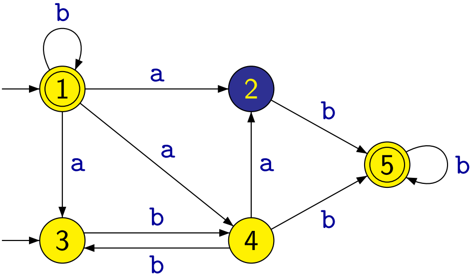
Nedeterministický konečný automat

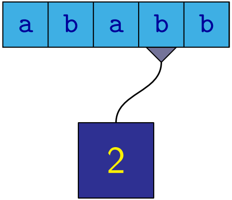




$$1 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} 4$$

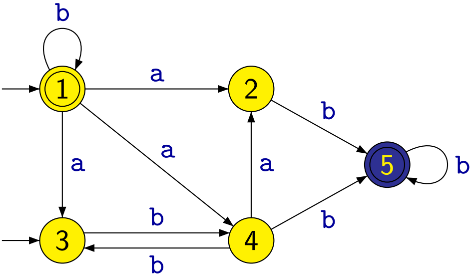
Nedeterministický konečný automat

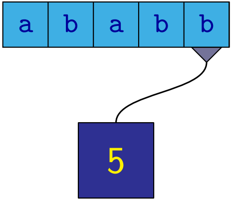




$$1 \xrightarrow{\texttt{a}} 3 \xrightarrow{\texttt{b}} 4 \xrightarrow{\texttt{a}} 2$$

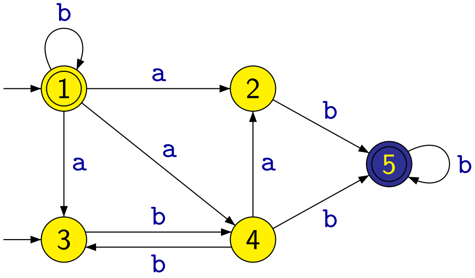
Nedeterministický konečný automat

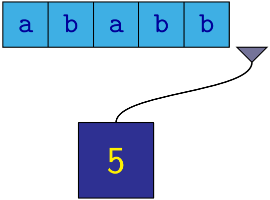




$$1 \xrightarrow{\texttt{a}} 3 \xrightarrow{\texttt{b}} 4 \xrightarrow{\texttt{a}} 2 \xrightarrow{\texttt{b}} 5$$

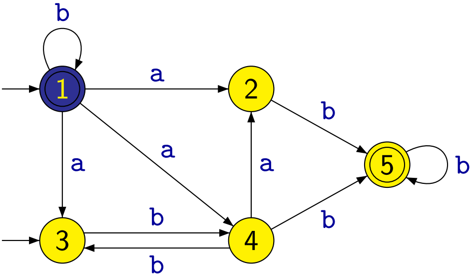
Nedeterministický konečný automat

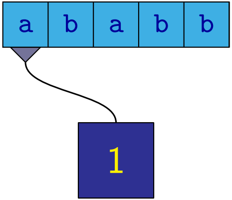




$$1 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} 4 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 5 \xrightarrow{b} 5$$

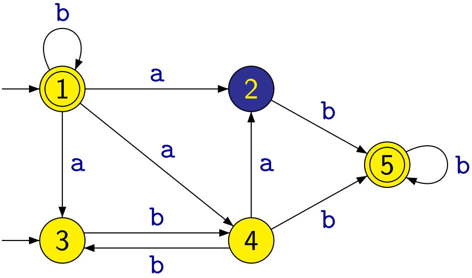
Nedeterministický konečný automat

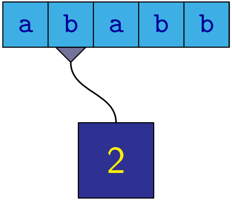




1

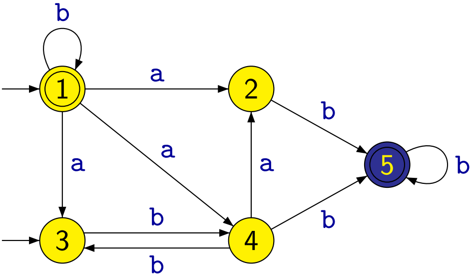
Nedeterministický konečný automat

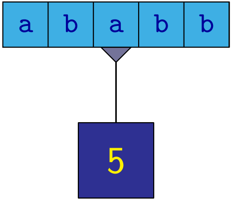




$1 \xrightarrow{a} 2$

Nedeterministický konečný automat

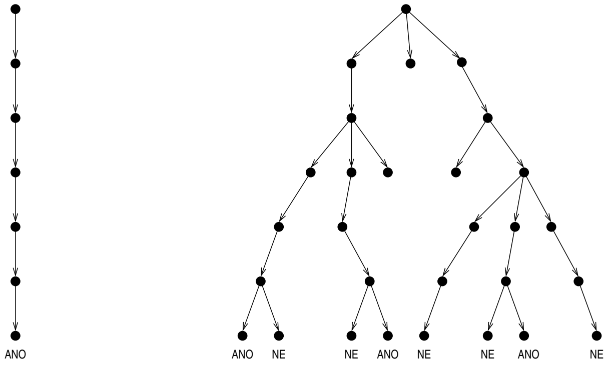




$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 5$

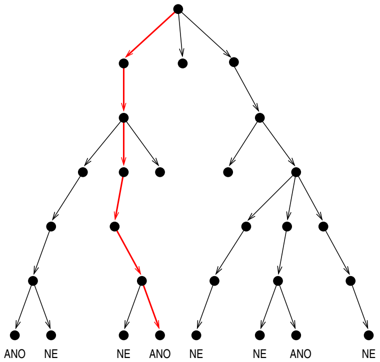
Nedeterministický konečný automat

Nedeterministický konečný automat přijímá dané slovo, jestliže **existuje** alespoň jeden jeho výpočet, který vede k přijetí tohoto slova.



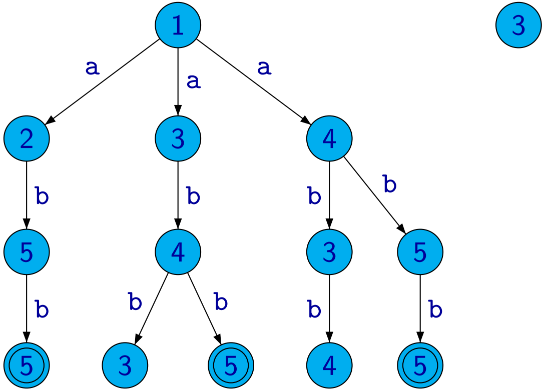
Nedeterministický konečný automat

Nedeterministický konečný automat přijímá dané slovo, jestliže **existuje** alespoň jeden jeho výpočet, který vede k přijetí tohoto slova.



Nedeterministický konečný automat

	a	b
$\leftrightarrow$ 1	2, 3, 4	1
2	–	5
$\rightarrow$ 3	–	4
4	2	3, 5
$\leftarrow$ 5	–	5



Příklad: Les reprezentující všechny možné výpočty nad slovem abb.

Nedeterministický konečný automat

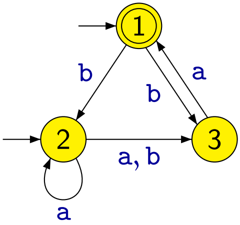
Formálně je **nedeterministický konečný automat** (**NKA**) definován jako pětice

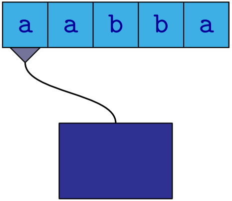
$$(Q, \Sigma, \delta, I, F)$$

kde:

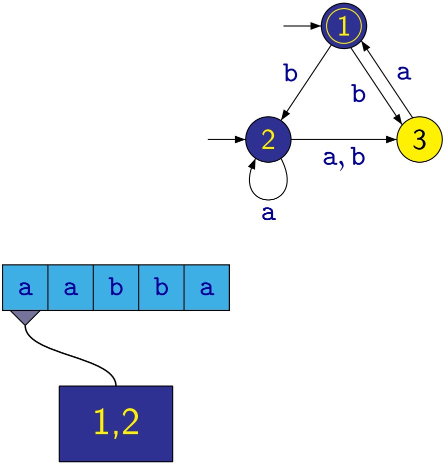
- Q je konečná množina **stavů**
- Σ je konečná **abeceda**
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ je **přechodová funkce**
- $I \subseteq Q$ je množina **počátečních stavů**
- $F \subseteq Q$ je množina **přijímajících stavů**

Převod NKA na DKA

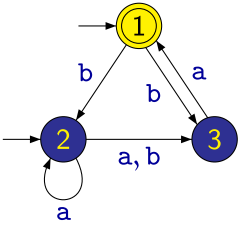


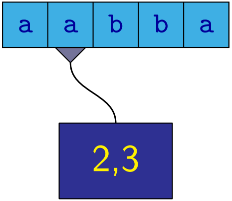


Převod NKA na DKA

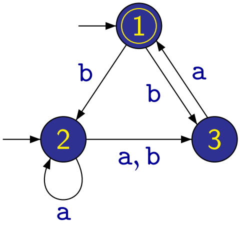


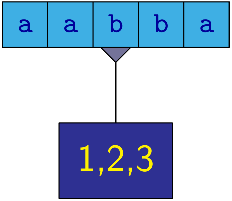
Převod NKA na DKA



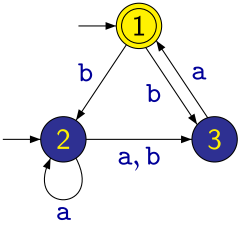


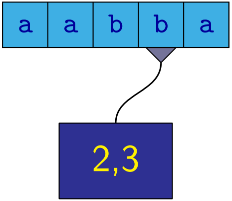
Převod NKA na DKA



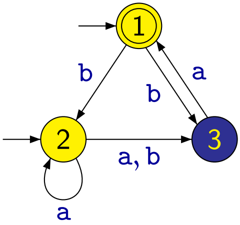


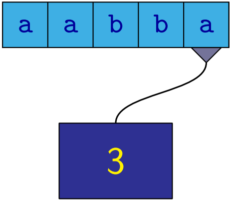
Převod NKA na DKA



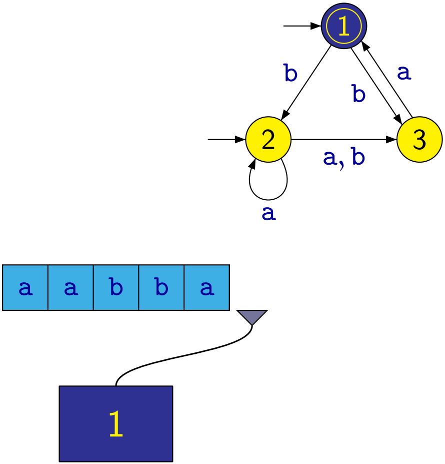


Převod NKA na DKA

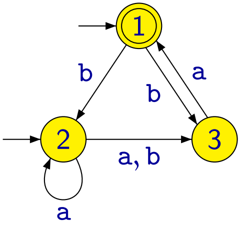




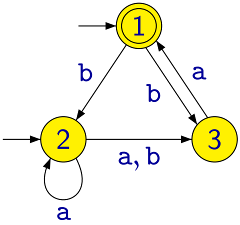
Převod NKA na DKA

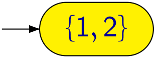


Převod NKA na DKA

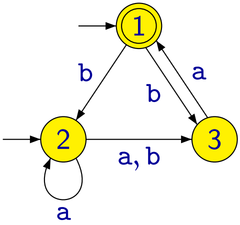


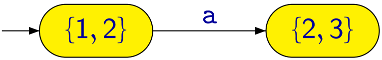
Převod NKA na DKA



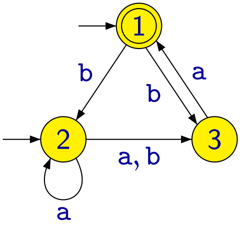


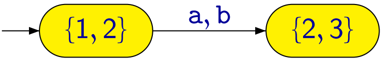
Převod NKA na DKA



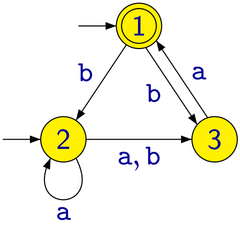


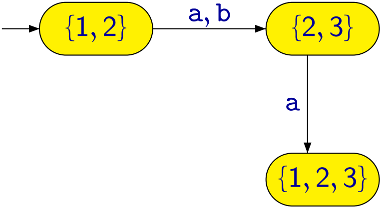
Převod NKA na DKA



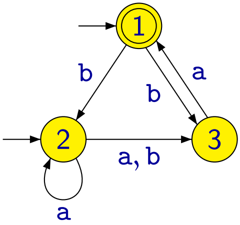


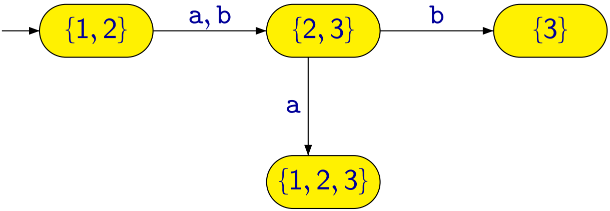
Převod NKA na DKA



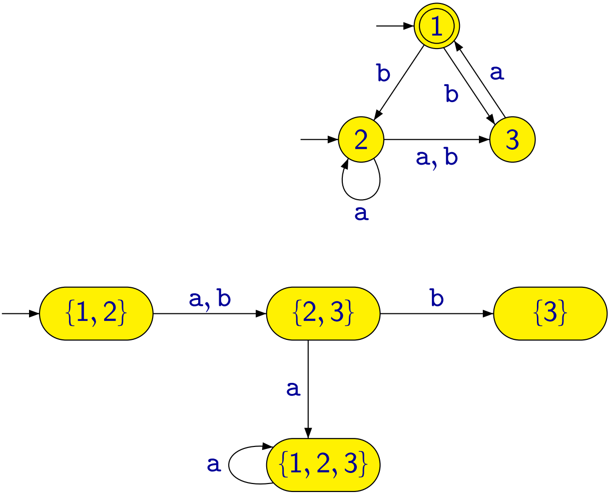


Převod NKA na DKA

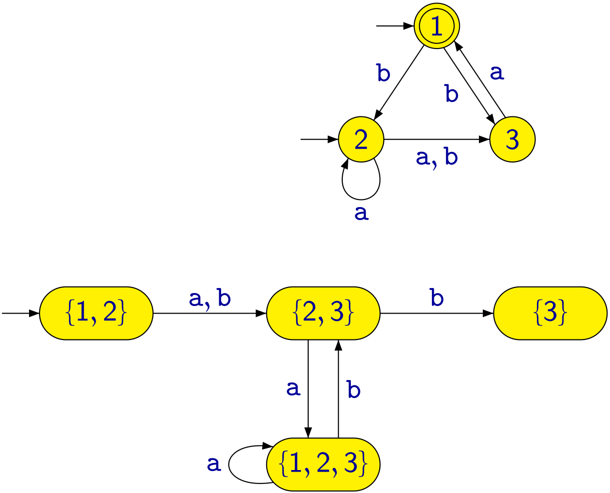




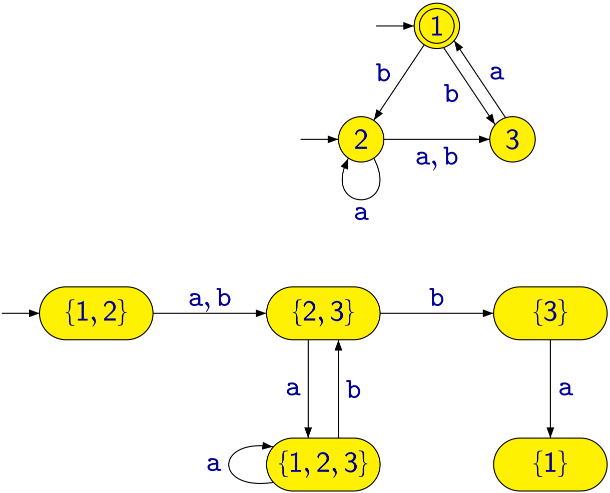
Převod NKA na DKA



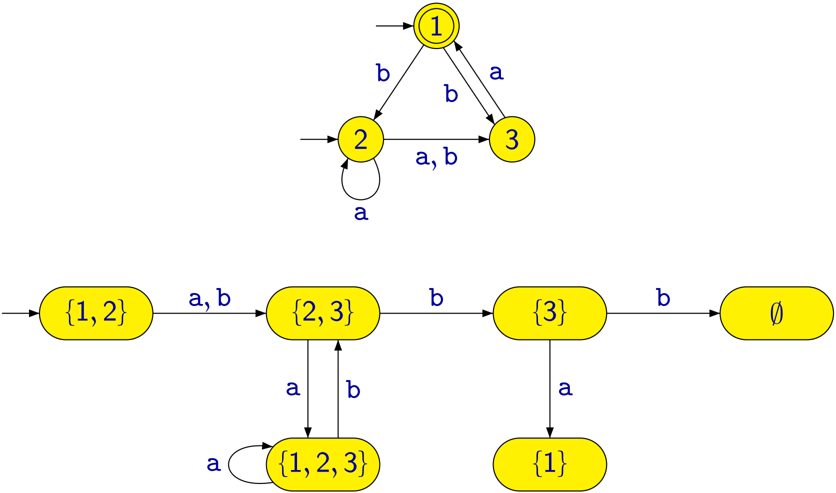
Převod NKA na DKA



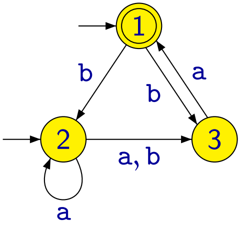
Převod NKA na DKA

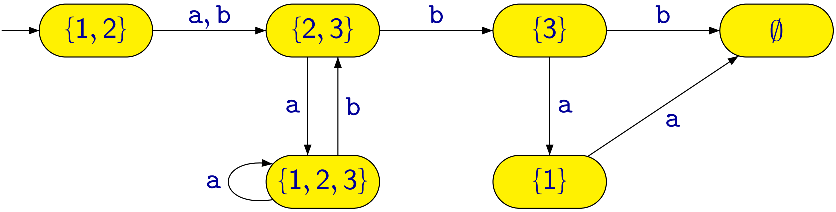


Převod NKA na DKA

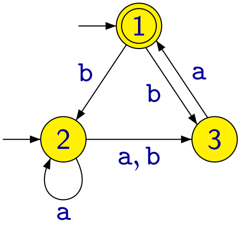


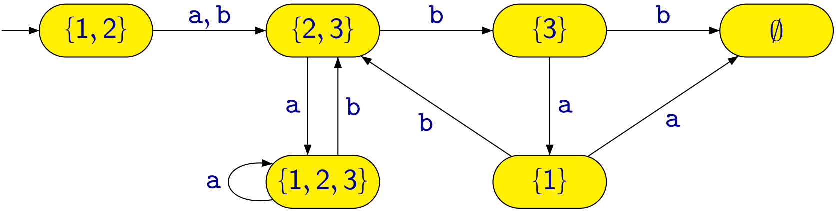
Převod NKA na DKA



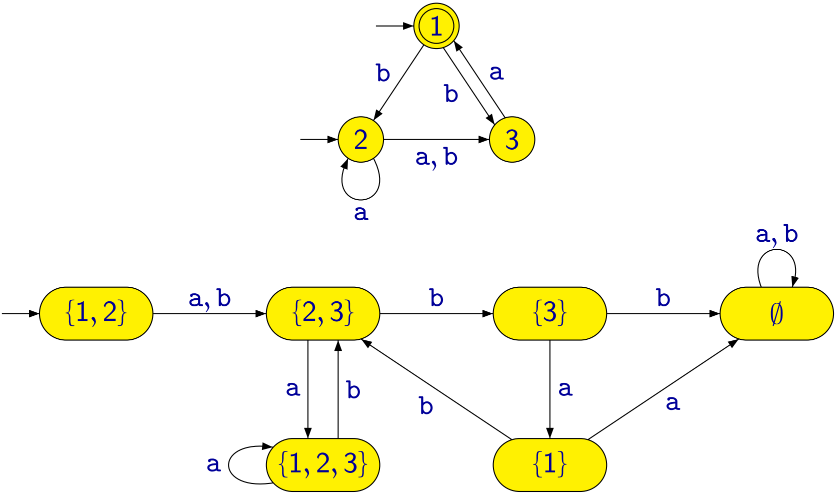


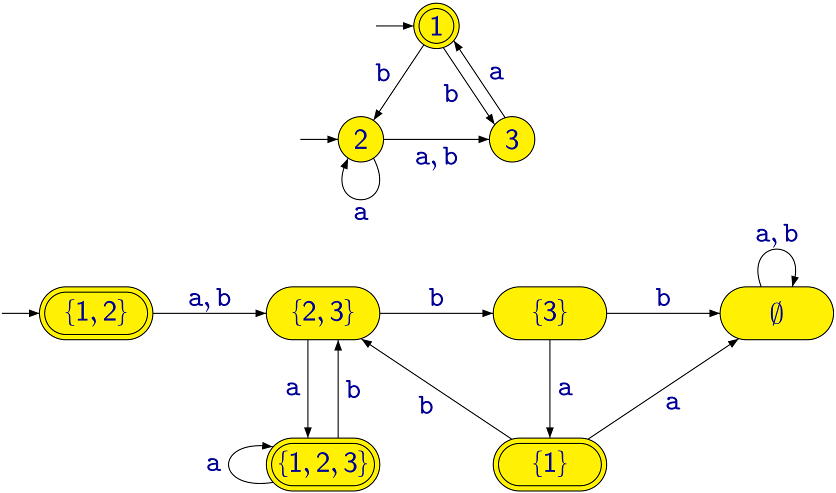
Převod NKA na DKA





Převod NKA na DKA




1
2
3
a
b
b
a, b
a
a, b
{1, 2}
a, b
{2, 3}
b
{3}
b
∅
a
b
b
a
a
a
{1, 2, 3}
{1}

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	—

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	—

	a	b

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$		

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	
$\{2,3\}$		

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$		

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$		

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$		

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	2, 3
$\rightarrow 2$	2, 3	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$		
$\{3\}$		

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	$-$	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	$-$

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	
$\{3\}$		

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{3\}$		

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	2, 3
$\rightarrow 2$	2, 3	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	
$\leftarrow \{1\}$		

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	$-$	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	$-$

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$		

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$		
$\emptyset$		

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$	$\emptyset$	
$\emptyset$		

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$	$\emptyset$	$\{2, 3\}$
$\emptyset$		

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$	$\emptyset$	$\{2, 3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Převod NKA na DKA

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	2, 3
$\rightarrow 2$	2, 3	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$	$\emptyset$	$\{2,3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

	a	b
$\leftrightarrow 1$	2	2
2	3	4
$\leftarrow 3$	3	2
4	5	6
$\leftarrow 5$	6	2
6	6	6

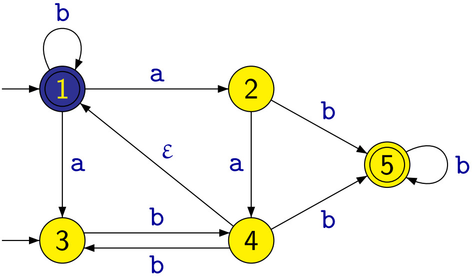
Převod NKA na DKA

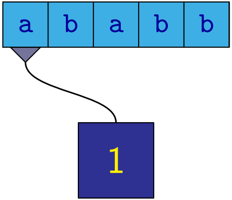
Poznámka: Při převodu nedeterministického automatu, který má n stavů, může mít výsledný deterministický automat až 2^n stavů.

Například při převodu automatu, který má 20 stavů, může vzniknout automat, který má $2^{20} = 1048576$ stavů.

Často má sice výsledný automat podstatně méně než 2^n stavů, nicméně tyto nejhorší případy občas nastávají.

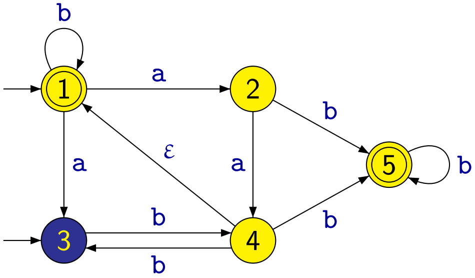
Zobecněný nedeterministický konečný automat

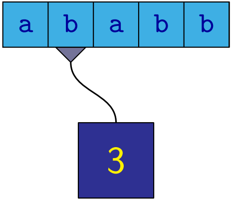




1

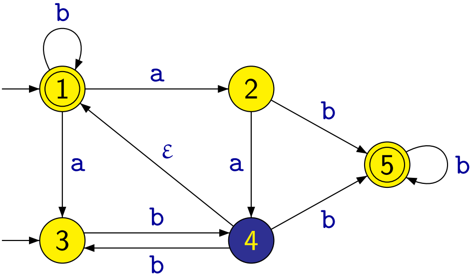
Zobecněný nedeterministický konečný automat

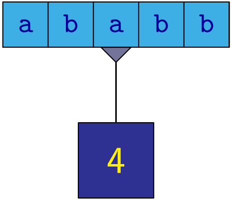




$$1 \xrightarrow{a} 3$$

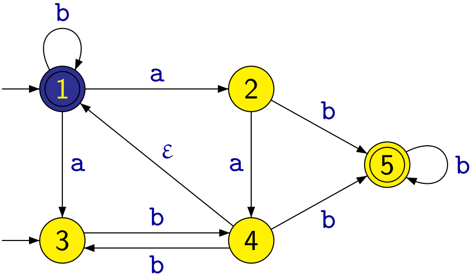
Zobecněný nedeterministický konečný automat

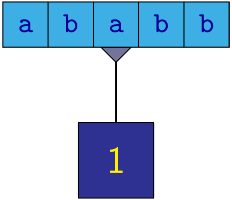




$$1 \xrightarrow{\texttt{a}} 3 \xrightarrow{\texttt{b}} 4$$

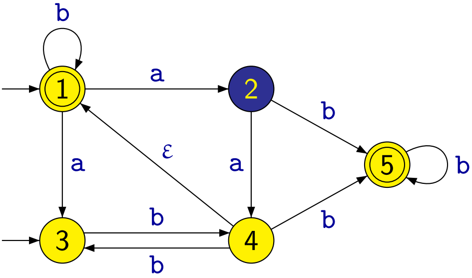
Zobecněný nedeterministický konečný automat

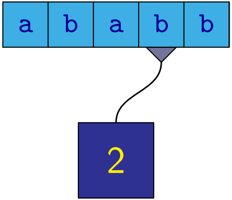




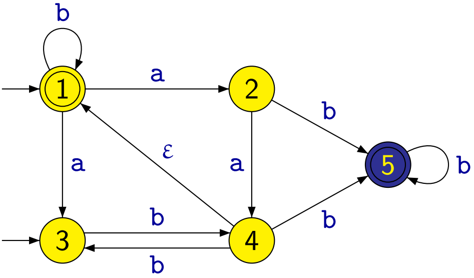
$$1 \xrightarrow{\mathtt{a}} 3 \xrightarrow{\mathtt{b}} 4 \xrightarrow{\varepsilon} 1$$

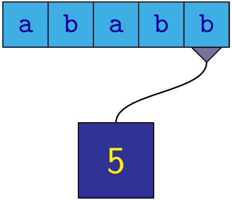
Zobecněný nedeterministický konečný automat





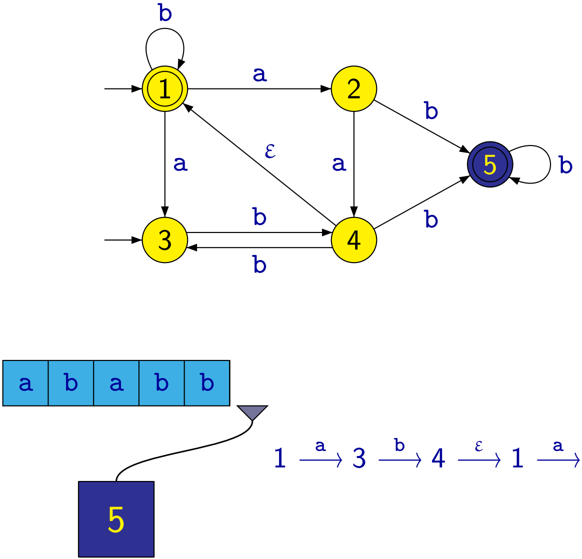
$$1 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} 4 \xrightarrow{\varepsilon} 1 \xrightarrow{a} 2$$





$$1 \xrightarrow{\texttt{a}} 3 \xrightarrow{\texttt{b}} 4 \xrightarrow{\varepsilon} 1 \xrightarrow{\texttt{a}} 2 \xrightarrow{\texttt{b}} 5$$

Zobecněný nedeterministický konečný automat



$$1 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} 4 \xrightarrow{\varepsilon} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 5 \xrightarrow{b} 5$$

Zobecněný nedeterministický konečný automat

Oproti nedeterministickému konečnému automatu má **zobecněný nedeterministický konečný automat** tzv. **ε-přechody**, tj. přechody označené symbolem ε.

Při provádění ε-přechodu se mění pouze stav řídící jednotky, ale hlava na pásce se neposouvá.

Poznámka: Výpočty zobecněného nedeterministického automatu mohou být libovolně dlouhé a dokonce i nekonečné (pokud graf obsahuje cyklus tvořený ε-přechody) bez ohledu na délku slova na pásce.

Zobecněný nedeterministický konečný automat

Formálně je **zobecněný nedeterministický konečný automat** (**ZNKA**) definován jako pětice

$$(Q, \Sigma, \delta, I, F)$$

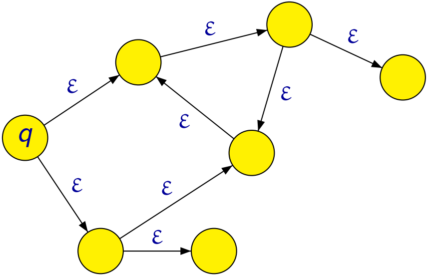
kde:

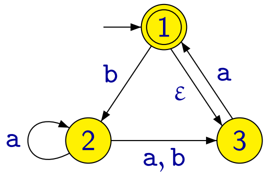
- Q je konečná množina **stavů**
- Σ je konečná **abeceda**
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ je **přechodová funkce**
- $I \subseteq Q$ je množina **počátečních stavů**
- $F \subseteq Q$ je množina **přijímajících stavů**

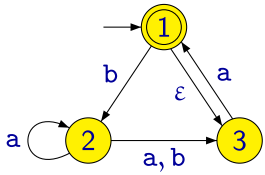
Poznámka: Na NKA můžeme nahlížet jako na speciální případ ZNKA, kde $\delta(q, \varepsilon) = \emptyset$ pro všechna $q \in Q$.

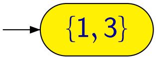
Převod na deterministický konečný automat

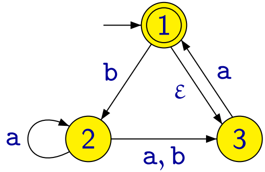
Zobecněný nedeterministický konečný automat je možné převést na deterministický podobnou konstrukcí jako nedeterministický konečný automat, s tím rozdílem, že do množin stavů musíme vždy přidat navíc i všechny stavy dosažitelné z již přidaných stavů nějakou sekvencí ε-přechodů.

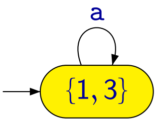


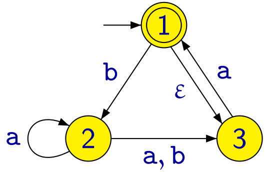

1
2
3
a
b
ε
a
a, b

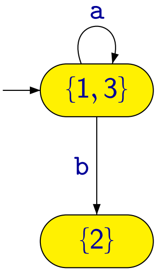

1
b
a
ε
a
2
a, b
3

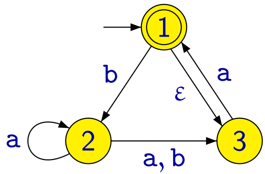

{1, 3}

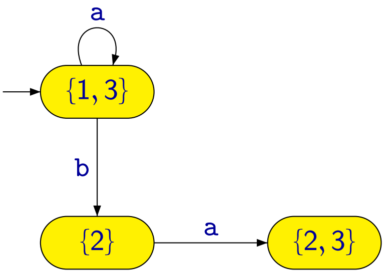

1
b
ε
a
a
2
3
a, b

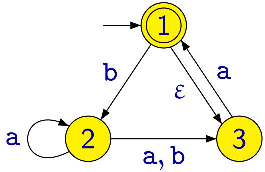

a
{1, 3}

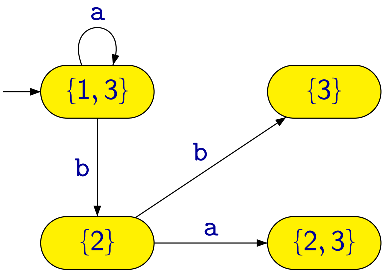

1
b
a
ε
a
2
a, b
3

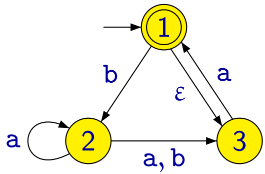

a
{1, 3}
b
{2}

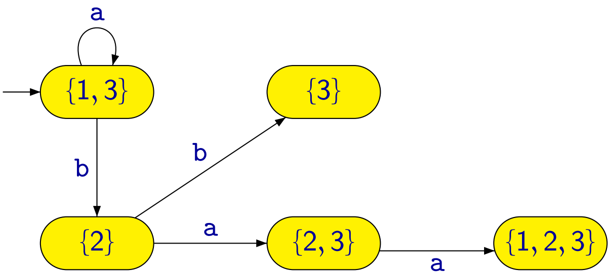

1
2
3
a
b
ε
a
a, b

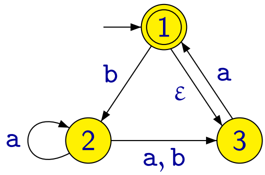

a
{1, 3}
b
{2}
a
{2, 3}

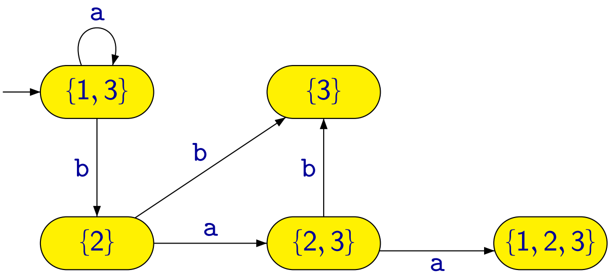

1
b
ε
a
a
2
a, b
3

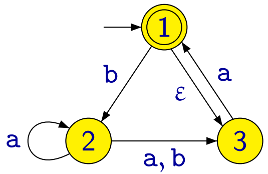

a
{1, 3}
{3}
b
b
{2}
a
{2, 3}

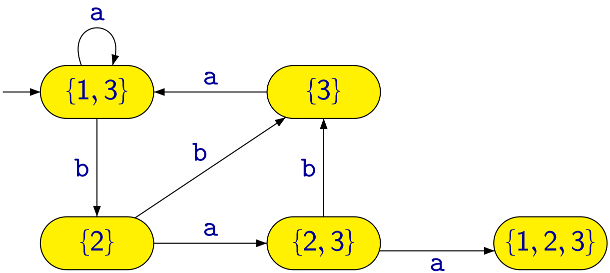

1
b
a
ε
a
2
3
a, b

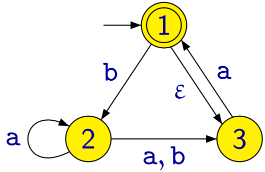

a
{1, 3}
{3}
b
b
{2}
a
{2, 3}
a
{1, 2, 3}


1
b
ε
a
a
2
3
a, b

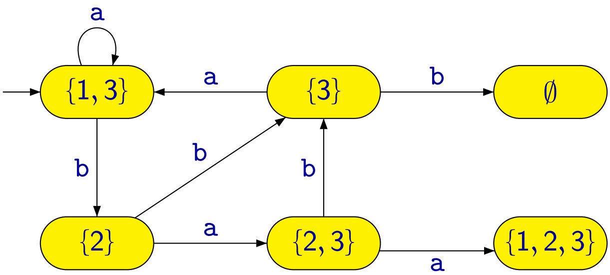

a
{1, 3}
{3}
b
b
b
{2}
a
{2, 3}
a
{1, 2, 3}


1
b
ε
a
a
2
3
a, b

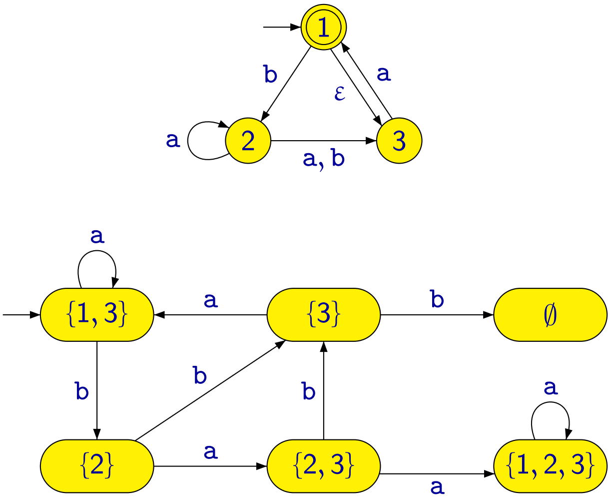

a
{1, 3}
a
{3}
b
b
b
{2}
a
{2, 3}
a
{1, 2, 3}

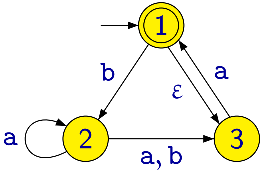


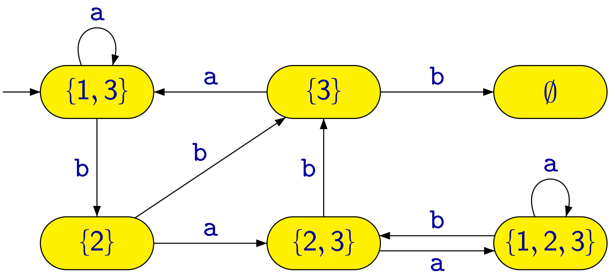
1
b
a
ε
a
2
a, b
3

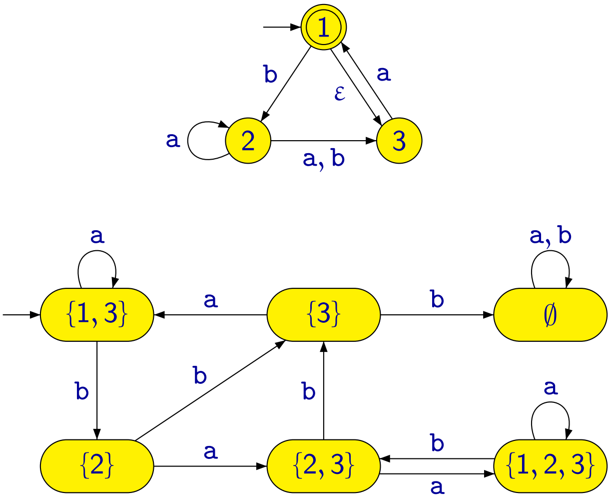


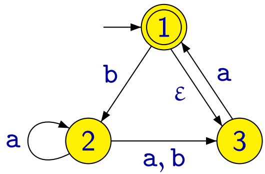
a
{1, 3}
a
{3}
b
∅
b
b
b
{2}
a
{2, 3}
a
{1, 2, 3}

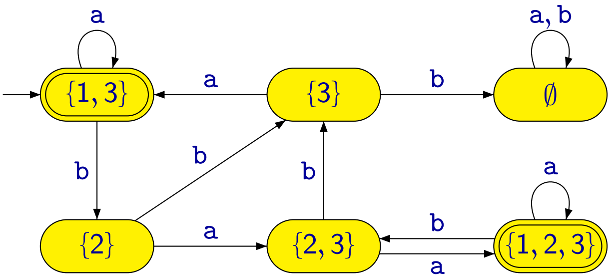

1
2
3
a
b
ε
a
a, b
{1, 3}
{3}
∅
{2}
{2, 3}
{1, 2, 3}
a
b
b
b
b
a
a
a
a


1
2
3
a
b
ε
a
a, b


{1, 3}
{3}
∅
{2}
{2, 3}
{1, 2, 3}
a
a
b
b
b
b
a
a
b
a


1
b
ε
a
a
2
3
a, b
a
a, b
{1, 3}
a
{3}
b
∅
b
b
b
a
{2}
a
{2, 3}
b
{1, 2, 3}
a


1
2
3
b
a
ε
a
a, b


a
a, b
{1, 3}
{3}
∅
a
b
b
b
b
a
{2}
{2, 3}
{1, 2, 3}
a
b
a

Převod ZNKA na DKA

Předtím, než formálně popíšeme převod ZNKA na DKA, zaveďme si několik pomocných definic.

Předpokládejme nějaký daný ZNKA $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$.

Definujme funkci $\hat{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ tak, že pro $K \subseteq Q$ a $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ je

$$\hat{\delta}(K, a) = \bigcup_{q \in K} \delta(q, a)$$

Převod ZNKA na DKA

Pro $K \subseteq Q$ označme $Cl_\varepsilon(K)$ množinu všech stavů dosažitelných ze stavů z množiny K nějakou libovolnou sekvencí ε-přechodů.

To znamená, že funkce $Cl_\varepsilon : \mathcal{P}(Q) \to \mathcal{P}(Q)$ je definována tak, že pro $K \subseteq Q$ je $Cl_\varepsilon(K)$ nejmenší (vzledem k inkluzi) množina splňující následující dvě podmínky:

- $K \subseteq Cl_\varepsilon(K)$
- Pro každé $q \in Cl_\varepsilon(K)$ platí, že $\delta(q, \varepsilon) \subseteq Cl_\varepsilon(K)$.

Poznámka: Všimněme si, že pro libovolné K je $Cl_\varepsilon(Cl_\varepsilon(K)) = Cl_\varepsilon(K)$.

Všimněme si také, že v případě NKA (kde $\delta(q, \varepsilon) = \emptyset$ pro každé $q \in Q$) je $Cl_\varepsilon(K) = K$.

Převod ZNKA na DKA

K danému ZNKA $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ nyní můžeme sestrojit DKA $A' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$, kde:

- $Q' = \mathcal{P}(Q)$ $\qquad$ ($K \in Q'$ tedy znamená, že $K \subseteq Q$)
- $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$ je definová tak, že pro $K \in Q'$ a $a \in \Sigma$ je

$$\delta'(K, a) = \mathcal{C}l_\varepsilon(\hat{\delta}(\mathcal{C}l_\varepsilon(K), a))$$

- $q'_0 = \mathcal{C}l_\varepsilon(I)$
- $F' = \{K \in Q' \mid \mathcal{C}l_\varepsilon(K) \cap F \neq \emptyset\}$

Není težké ověřit, že $L(A) = L(A')$.