Rovnost

Jedním z nejdůležitějších druhů relací je **rovnost** (**identita**).

Prvky x a y jsou si rovny, což zapisujeme

$$x = y,$$

jestliže se jedná o jeden a tentýž prvek.

Rovnost lze vyjádřit jako predikát, např. můžeme zvolit, že $P(x, y)$ reprezentuje tvrzení „x *je rovno* y“.

V různých interpretacích ale může platit $P(x, y)$ i pro navzájem různé prvky x a y nebo naopak pro nějaký prvek x nemusí platit $P(x, x)$ apod.

Rovnost

Příklad: Chtěli bychom formulí popsat vztah „x *je sourozencem* y“ pomocí binárního predikátu R, kde $R(x, y)$ znamená „x *je rodičem* y“.

Pokus o řešení:

„x *je sourozencem* y“

právě tehdy, když

$$\exists z (R(z, x) \land R(z, y))$$

Problém: Pokud pro dané x existuje prvek z takový, že $R(z, x)$, tak bude platit

$$\exists z (R(z, x) \land R(z, x)),$$

takže bude platit „x *je sourozencem* x“.

Rovnost

Abeceda:

- ...
- Symbol pro rovnost: "$=$"
- ...

Atomické formule (pokrač.)

- ...
- Jestliže x a y jsou proměnné, tak $x = y$ je dobře utvořená atomická formule.
- ...

V každé interpretaci je symbol "$=$" interpretován jako rovnost, tj. v každé interpretaci $\mathcal{A}$ a valuaci v:

- $\mathcal{A}, v \models x = y$ právě tehdy, když $v(x) = v(y)$.

Rovnost

Příklad: Vztah „x *je sourozencem* y“ je možné vyjádřit formulí

$$\neg(x = y) \ \wedge \ \exists z(R(z,x) \wedge R(z,y)),$$

kde $R(x,y)$ znamená, že „x *je rodičem* y“.

Poznámka: Místo $\neg(x = y)$ se často používá zápis $x \neq y$.

Rovnost

- „*Existuje* **právě jedno** x *takové, že* $P(x)$“:

  $$\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \rightarrow x = y))$$

- „*Existují* **alespoň dva** *prvky* x *takové, že* $P(x)$“:

  $$\exists x \exists y(P(x) \land P(y) \land \neg(x = y))$$

- „*Existují* **právě dva** *prvky* x *takové, že* $P(x)$“:

  $$\exists x \exists y(P(x) \land P(y) \land \neg(x = y) \land \forall z(P(z) \rightarrow (z = x \lor z = y)))$$

- „*Existuje* **právě jedno** x *takové, že pro něj platí* φ“:

  $$\exists x(\varphi \land \forall y(\varphi[y/x] \rightarrow x = y))$$

Konstanty

Někdy chceme mluvit o nějakém konkrétním prvku universa.

Příklad: *„Existuje alespoň jedno x takové, že Jan Novák je rodičem x a x je žena."* (Tj. *„Jan Novák má alespoň jednu dceru."*)

Pokud je proměnné y přiřazen *„Jan Novák"*:

$$\exists x(R(y,x) \wedge S(x))$$

- $R(x,y)$ — *„x je rodičem y"*
- $S(x)$ — *„x je žena"*

Mohli bychom zavést unární predikát N reprezentující vlastnost *„být Jan Novák"*:

$$\forall y(N(y) \rightarrow \exists x(R(y,x) \wedge S(x)))$$

Konstanty

Pokud máme nějaký unární predikát N, kde nás zajímají jen ty interpretace, kde existuje **právě jeden** prvek x, pro který platí $N(x)$, může být výhodné mít možnost tento prvek pojmenovat a obejít se tak bez predikátu N.

K tomuto účelu slouží **konstantní symboly** (**konstanty**).

Abeceda:

- ...
- konstantní symboly: "a", "b", "c", "d", ...
- ...

Konstanty

V **atomických formulích** se konstanty mohou vyskytovat na stejných místech jako proměnné:

$$P(c, x) \qquad Q(d) \qquad R(a, a) \qquad x = a$$

- Konstanty se **nesmí** používat v kvantifikátorech — např. $\exists c P(x, c)$ **není** dobře utvořená formule.

Hodnoty přiřazené konstantním symbolům jsou dány příslušnou **interpretací**:

- Daná interpretace $\mathcal{A}$ (s universem A) přiřazuje každému konstantnímu symbolu c nějaký prvek universa A.

  Označme tento prvek $c^{\mathcal{A}}$. Platí tedy $c^{\mathcal{A}} \in A$.

Konstanty

Příklad: „*Existuje alespoň jedno* x *takové, že Jan Novák je rodičem* x *a* x *je žena.*“

$$\exists x (R(a,x) \wedge S(x))$$

- $R(x,y)$ — „x *je rodičem* y“
- $S(x)$ — „x *je žena*“
- a — konstatní symbol reprezentující „*Jana Nováka*“

Konstanty

Příklad: *„Každé prvočíslo je větší než jedna."*

$$\forall x(P(x) \rightarrow R(x, e))$$

- $P(x)$ — *„x je prvočíslo"*
- $R(x, y)$ — *„x je větší než y"*
- e — konstatní symbol reprezentující hodnotu 1

Funkce

Binární relace R je (unární) **funkce**, jestliže pro každé x existuje nejvýše jedno y takové, že

$$(x, y) \in R.$$

Tato funkce je **totální**, jestliže pro každé x existuje právě jedno takové y.

Příklad: Binární relace R na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$, kde

$$(x, y) \in R \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad y = x + 1$$

Platí tedy

$$R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), \ldots\}$$

Funkce

Podobně ternární relace T je (binární) funkce, jestliže pro každé dva prvky x_1 a x_2 existuje nejvýše jedno (resp. v případě totální funkce právě jedno) y takové, že

$$(x_1, x_2, y) \in T.$$

Příklad: Sčítání na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ je možné chápat jako ternární relaci S (tj. jako množinu trojic reálných čísel), kde

$$(x_1, x_2, y) \in S \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad x_1 + x_2 = y$$

Funkce

V predikátové logice můžeme funkce reprezentovat pomocí predikátů zastupujících příslušné relace — není to ale příliš přímočaré ani pohodlné.

Příklad: *„Pro každé x a y platí, že $x + y \geq y + x$."*

$$\forall x \forall y \exists z \exists w (S(x, y, z) \ \wedge \ S(y, x, w) \ \wedge \ P(z, w))$$

- $S(x, y, z)$ — *„z je součtem hodnot x a y"*
- $P(x, y)$ — *„x je větší nebo rovno y"*

Poznámka: Navíc musíme předpokládat, že pro každé dva prvky x a y existuje právě jeden prvek z takový, že $S(x, y, z)$.

Funkce

V predikátové logice je možné reprezentovat funkce pomocí **funkčních symbolů**.

Abeceda:

- ...
- funkční symboly: "f", "g", "h", ...
- ...

Každý funkční symbol musí mít stanovenu **aritu** odpovídající aritě funkce, kterou tento symbol zastupuje (tj. počet argumentů příslušné funkce).

Termy

Termy — výrazy složené z proměnných a konstantních a funkčních symbolů reprezentující prvky universa

Příklad:

- Řekněme, že máme binární predikát F, kde předpokládáme, že pro každé x existuje právě jedno y takové, že
$$F(x, y).$$
Místo binárního predikátu F můžeme použít unární funkční symbol f.
Term
$$f(x)$$
reprezentuje onen jediný prvek y, pro který platí $F(x, y)$.
Místo $\exists y(F(x, y) \wedge P(y))$ pak můžeme psát $P(f(x))$.

Termy

Příklad:

- Řekněme, že máme ternární predikát G, kde předpokládáme, že pro každé dva prvky x_1 a x_2 existuje právě jedno y takové, že

$$G(x_1, x_2, y).$$

Místo ternárního predikátu G můžeme použít binární funkční symbol g.

Term

$$g(x_1, x_2)$$

reprezentuje onen jediný prvek y, pro který platí $G(x_1, x_2, y)$.

Termy

Příklad: „*Pro každé* x *a* y *platí, že* $x + y \geq y + x$*.*“

$$\forall x \forall y P(f(x, y), f(y, x))$$

- f — binární funkční symbol, kde $f(x, y)$ reprezentuje součet hodnot x a y
- P — binární predikátový symbol, kde $P(x, y)$ reprezentuje vztah „x *je větší nebo rovno* y“

Termy

Proměnné, konstantní symboly a funkční symboly je možné v termech libovolně skládat — je pouze třeba dodržet aritu všech funkčních symbolů (aplikovat každý funkční symbol na správný počet argumentů).

Příklad:

- c — konstantní symbol
- f — unární funkční symbol
- g — binární funkční symbol
- h — binární funkční symbol

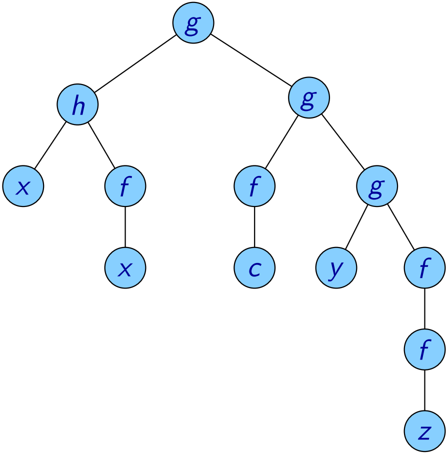
Příklady termů:

$$x \qquad f(y) \qquad g(c, x) \qquad g(h(x, x), f(c))$$

$$g(h(x, f(x)), g(f(c), g(y, f(f(z)))))$$

Termy

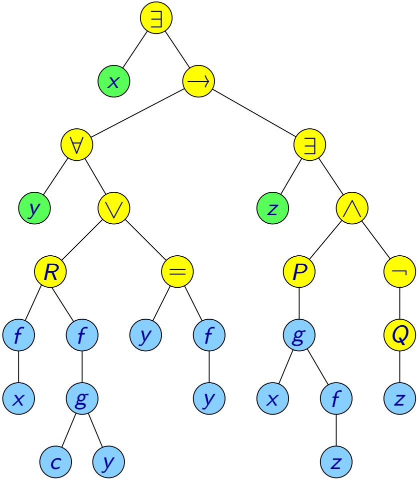
Syntaktický strom termu $g(h(x, f(x)), g(f(c), g(y, f(f(z)))))$



Termy ve formulích

Syntaktický strom formule

$\exists x(\forall y(R(f(x), f(g(c, y))) \vee y = f(y)) \rightarrow \exists z(P(g(x, f(z))) \wedge \neg Q(z)))$



Termy ve formulích

Příklad:

- Pro každé x, y a z platí $(x+y)+z = x+(y+z)$:
$$\forall x \forall y \forall z (f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z)))$$
- Pro každé x platí $x+0=x$ a $0+x=x$:
$$\forall x (f(x,e) = x \ \wedge \ f(e,x) = x)$$
- Pro každé x existuje y takové, že $x+y=0$:
$$\forall x \exists y (f(x,y) = e)$$

Konstantní a funkční symboly:

- f — binární funkční symbol reprezentující *„sčítání“* (operace “$+$”)
- e — konstatní symbol reprezentující prvek “0”

Termy ve formulích

Příklad:

- Pro každé x, y a z platí $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$:

$$\forall x \forall y \forall z (g(x, f(y, z)) = f(g(x, y), g(x, z)))$$

- Pro každé x a y takové, že $x \leq y$, platí pro všechna z, že $x + z \leq y + z$:

$$\forall x \forall y (R(x, y) \ \rightarrow \ \forall z R(f(x, y), f(y, z)))$$

Konstantní a funkční symboly:

- f — binární funkční symbol reprezentující *„sčítání“* (operace “$+$”)
- g — binární funkční symbol reprezentující *„násobení“* (operace “$\cdot$”)
- R — binární predikátový symbol reprezentující relaci *„menší nebo rovno“* (relace “$\leq$”)

Syntaxe formulí predikátové logiky

Abeceda:

- **logické spojky** — "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$" a "$\leftrightarrow$"
- **kvantifikátory** — "$\forall$" a "$\exists$"
- **rovnost** — "$=$"
- **pomocné symboly** — "$($", "$)$" a "$,$"
- **proměnné** — "x", "y", "z", ..., "x_0", "x_1", "x_2", ...

- **predikátové symboly** — například symboly "P", "Q", "R", apod. (u každého symbolu musí být navíc stanovena příslušná arita)
- **funkční symboly** — například symboly "f", "g", "h", apod. (u každého symbolu musí být navíc stanovena příslušná arita)
- **konstantní symboly** — například symboly "a", "b", "c", apod.

Poznámka: Na konstantní symboly se lze dívat jako na funkční symboly s aritou 0.

Syntaxe formulí predikátové logiky

Definice

Dobře utvořené **termy** jsou definovány následujícím způsobem:

1. Jestliže x je proměnná, tak x je dobře utvořený term.
2. Jestliže c je konstatní symbol, tak c je dobře utvořený term.
3. Jestliže f je funkční symbol s aritou n a t_1, t_2, ..., t_n jsou dobře utvořené termy, tak
$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$
je dobře utvořený term.
4. Neexistují žádné další dobře utvořené termy než ty, které jsou vytvořeny pomocí předchozích pravidel.

Syntaxe formulí predikátové logiky

Definice

Dobře utvořené **atomické formule** jsou definovány následujícím způsobem:

1. Jestliže P je predikátový symbol s aritou n a t_1, t_2, . . . , t_n jsou dobře utvořené termy, tak

$$P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

   je dobře utvořená atomická formule.

2. Jestliže t_1 a t_2 jsou dobře utvořené termy, tak

$$t_1 = t_2$$

   je dobře utvořená atomická formule.

3. Neexistují žádné další dobře atomické formule než ty, které jsou vytvořeny pomocí předchozích dvou pravidel.

Syntaxe formulí predikátové logiky

Definice (zopakování dříve uvedené definice)

Dobře utvořené **formule predikátové logiky** jsou posloupnosti symbolů vytvořené podle následujících pravidel:

1. Dobře utvořené atomické formule jsou dobře utvořené formule.
2. Jestliže φ a ψ jsou dobře utvořené formule, pak i $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou dobře utvořené formule.
3. Jestliže φ je dobře utvořená formule a x je proměnná, tak $\forall x \varphi$ a $\exists x \varphi$ jsou dobře utvořené formule.
4. Neexistují žádné další dobře utvořené formule než ty, které jsou vytvořené pomocí předchozích pravidel.

Sémantika predikátové logiky

Interpretace $\mathcal{A}$:

- universum A
- každému predikátovému symbolu P s aritou n je přiřazena n-ární relace $P^{\mathcal{A}}$, kde $P^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A \times \cdots \times A$
- každému funkčnímu symbolu f s aritou n je přiřazena n-ární funkce $f^{\mathcal{A}}$, kde $f^{\mathcal{A}} : A \times A \times \cdots \times A \to A$
- každému konstantnímu symbolu c je přiřazen prvek universa $c^{\mathcal{A}}$, tj. $c^{\mathcal{A}} \in A$

Poznámka: V interpretacích se funkčním symbolům přiřazují pouze **totální** funkce, tj. funkce, jejichž hodnota je definovaná pro všechny možné hodnoty argumentů.

Sémantika predikátové logiky

Hodnota termu v interpretaci $\mathcal{A}$ a valuaci v:

- Term x, kde x je proměnná — hodnotou tohoto termu je prvek $a \in A$ takový, že $v(x) = a$.
- Term c, kde c je konstantní symbol — hodnotou tohoto termu je prvek $c^{\mathcal{A}} \in A$.
- Term $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, kde f je funkční symbol s aritou n a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy — hodnotou tohoto termu je prvek $b \in A$ takový, že

  $$b = f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

  kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou hodnoty termů $t_1, t_2, \ldots, t_n$ v interpretaci $\mathcal{A}$ a valuaci v.

Příklad: Intrepretace $\mathcal{A}$, kde universem je množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ \ldots\}$.

- $a^{\mathcal{A}} = 0$
- $f^{\mathcal{A}}$ je funkce *„následník“*, tj. $f^{\mathcal{A}}(x) = x + 1$
- $g^{\mathcal{A}}$ je funkce *„součet“*, tj. $g^{\mathcal{A}}(x, y) = x + y$

Valuace v, kde $v(x) = 5$, $v(y) = 13$, $v(z) = 2$, ...

Hodnoty termů v interpretaci $\mathcal{A}$ a valuaci v:

- Term x — hodnota 5
- Term a — hodnota 0
- Term $f(a)$ — hodnota 1 $(0 + 1 = 1)$
- Term $f(f(a))$ — hodnota 2 $(1 + 1 = 2)$
- Term $g(x, f(f(a)))$ — hodnota 7 $(5 + 2 = 7)$
- Term $g(z, y)$ — hodnota 15 $(2 + 13 = 15)$
- Term $f(g(z, y))$ — hodnota 16 $(15 + 1 = 16)$

Sémantika predikátové logiky

Pravdivostní hodnoty atomických formulí při interpretaci $\mathcal{A}$ a valuaci v:

- $\mathcal{A}, v \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, kde P je predikátový symbol s aritou n a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy, platí právě tehdy, když
  $$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in P^{\mathcal{A}},$$
  kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou hodnoty termů $t_1, t_2, \ldots, t_n$ v interpretaci $\mathcal{A}$ a valuaci v.

- $\mathcal{A}, v \models t_1 = t_2$, kde t_1 a t_2 jsou termy, platí právě tehdy, když
  $$a_1 = a_2,$$
  kde a_1 a a_2 jsou hodnoty termů t_1 a t_2 v interpretaci $\mathcal{A}$ a valuaci v.

Příklad: Intrepretace $\mathcal{A}$, kde universem je množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

- $f^{\mathcal{A}}$ je funkce *„následník“*, tj. $f^{\mathcal{A}}(x) = x + 1$
- $g^{\mathcal{A}}$ je funkce *„součet“*, tj. $g^{\mathcal{A}}(x, y) = x + y$
- $P^{\mathcal{A}}$ je množina všech prvočísel
- $Q^{\mathcal{A}}$ je binární relace “$<$” tj. $(x, y) \in Q^{\mathcal{A}}$ právě tehdy, když $x < y$

Valuace v, kde $v(x) = 5$, $v(y) = 13$, $v(z) = 2$, ...

- $\mathcal{A}, v \models P(x)$ (5 je prvočíslo)
- $\mathcal{A}, v \not\models Q(y, z)$ (není pravda, že $13 < 2$)
- $\mathcal{A}, v \models Q(f(f(z)), g(x, y))$ ($(2 + 1) + 1 < 5 + 13$)
- $\mathcal{A}, v \not\models P(f(g(z, x)))$ ($(2 + 5) + 1 = 8$ a 8 není prvočíslo)

Predikátová logika — další poznámky

- Jedná se o predikátovou logiku **1. řádu** — kvantifikovat lze pouze přes prvky universa (v predikátové logice 2. řádu je možné kvantifikovat přes relace).

Predikátová logika — další poznámky

V běžné matematické praxi se většinou nepoužívá syntaxe formulí predikátové logiky přesně podle definice, ale při zápisu se používá celá řada konvencí a zkratek.

- Pro **binární** funkční a predikátové symboly se často používá **infixový** způsob zápisu:

  Například místo $f(x, y)$ a $R(x, y)$ se může psát

  $$x\ f\ y \qquad\qquad x\ R\ y$$

- Pro označení predikátových, funkčních a konstantních symbolů a proměnných se používají všechny možné druhy symbolů:

  Například místo $R(f(x, y), g(z))$ se může psát třeba

  $$x + \delta \leq |\varepsilon| \qquad \text{nebo například} \qquad x \circ y \sqsupset G(z)$$

Predikátová logika — další poznámky

Příklady formulí reprezentujících tvrzení z teorie množin:

- x je prvkem množiny A:

$$x \in A$$

"$\in$" — binární predikátový symbol reprezentující relaci *„náležení"*
"x", "A" — proměnné

Pokud bychom provedli následující změny:

- místo symbolu "$\in$" bychom použili binární predikátový symbol E,
- místo proměnné A bychom použili proměnnou y,

tak by formule vypadala následovně:

$$E(x, y)$$

Predikátová logika — další poznámky

- Dvě množiny se rovnají právě tehdy, když obsahují stejné prvky:

  $$A = B \;\leftrightarrow\; \forall x(x \in A \;\leftrightarrow\; x \in B)$$

  Pokud bychom místo "$\in$" použili predikát E, a místo A a B použili y a z, formule bude vypadat takto:

  $$y = z \;\leftrightarrow\; \forall x(E(x, y) \;\leftrightarrow\; E(x, z))$$

- Definice relace *„být podmnožinou“* (označena symbolem "$\subseteq$"):

  $$A \subseteq B \;\leftrightarrow\; \forall x(x \in A \;\rightarrow\; x \in B)$$

  Pokud místo "$\subseteq$" použijeme binární predikátový symbol S:

  $$S(y, z) \;\leftrightarrow\; \forall x(E(x, y) \;\rightarrow\; E(x, z))$$

Predikátová logika — další poznámky

- Definice operace *„sjednocení"* (označena symbolem "$\cup$"):

$$\forall x(x \in A \cup B \;\leftrightarrow\; (x \in A \;\vee\; x \in B))$$

Pokud místo "$\cup$" použijeme binární funkční symbol f:

$$\forall x(E(x, f(y, z)) \;\leftrightarrow\; (E(x, y) \;\vee\; E(x, z)))$$

Predikátová logika — další poznámky

- Místo

$$\exists x(x \in A \land \ \ldots\ )$$

se někdy používá zkrácený zápis

$$(\exists x \in A)(\ \ldots\ )$$

Tj. místo

„*existuje* x *takové, že* $x \in A$ *a* ... “

se řekne

„*existuje* $x \in A$ *takové, že* ... “

- Podobně třeba místo $\exists x(x \geq 1 \land \ \ldots)$ se někdy zkráceně píše

$$(\exists x \geq 1)(\ \ldots\ )$$

Predikátová logika — další poznámky

- Místo

  $$\forall x (x \in A \ \rightarrow \ \dots\,)$$

  se někdy používá zkrácený zápis

  $$(\forall x \in A)(\,\dots\,)$$

  Tj. místo

  „*pro každé* x, *pro které platí* $x \in A$, *platí* $\ \dots$ “

  se řekne

  „*pro každé* $x \in A$ *platí* $\ \dots$ “

- Podobně třeba místo $\forall x (x \geq 1 \ \rightarrow \ \dots)$ se někdy zkráceně píše

  $$(\forall x \geq 1)(\,\dots\,)$$