Predikátová logika

Predikátová logika

- *Ryby jsou obratlovci žijící ve vodě.*
- *Kapři jsou ryby.*
- *Existuje alespoň jeden kapr.*

- *Existuje alespoň jeden obratlovec žijící ve vodě.*

- *Trojúhelníky jsou konvexní mnohoúhelníky.*
- *Rovnostranné trojúhelníky jsou trojúhelníky.*
- *Existuje alespoň jeden rovnostranný trojúhelník.*

- *Existuje alespoň jeden konvexní mnohoúhelník.*

Predikátová logika

- *Ryby jsou obratlovci žijící ve vodě.*
- *Kapři jsou ryby.*
- *Existuje alespoň jeden kapr.*

- *Existuje alespoň jeden obratlovec žijící ve vodě.*

Použití **proměnných**:

- *Pro každé* x *platí, že pokud* x *je ryba, tak* x *je obratlovec a* x *žije ve vodě.*
- *Pro každé* x *platí, že pokud* x *je kapr, tak* x *je ryba.*
- *Existuje alespoň jedno* x *takové, že* x *je kapr.*

- *Existuje alespoň jedno* x *takové, že* x *je obratlovec a* x *žije ve vodě.*

Predikátová logika

- *Trojúhelníky jsou konvexní mnohoúhelníky.*
- *Rovnostranné trojúhelníky jsou trojúhelníky.*
- *Existuje alespoň jeden rovnostranný trojúhelník.*

- *Existuje alespoň jeden konvexní mnohoúhelník.*

Použití **proměnných**:

- *Pro každé x platí, že pokud x je trojúhelník, tak x je mnohoúhelník a x je konvexní.*
- *Pro každé x platí, že pokud x je rovnostranný trojúhelník, tak x je trojúhelník.*
- *Existuje alespoň jedno x takové, že x je rovnostranný trojúhelník.*

- *Existuje alespoň jedno x takové, že x je mnohoúhelník a x je konvexní.*

Predikátová logika

- *Pro každé x platí, že pokud x má vlastnost P, tak x má vlastnost Q a x má vlastnost R.*
- *Pro každé x platí, že pokud x má vlastnost S, tak x má vlastnost P.*
- *Existuje alespoň jedno x takové, že x má vlastnost S.*

- *Existuje alespoň jedno x takové, že x má vlastnost Q a x má vlastnost R.*

P	je ryba	je trojúhelník
Q	je obratlovec	je mnohoúhelník
R	žije ve vodě	je konvexní
S	je kapr	je rovnostranný trojúhelník

Predikátová logika

- *Pro každé* x *platí, že pokud* $P(x)$, *tak* $Q(x)$ *a* $R(x)$.
- *Pro každé* x *platí, že pokud* $S(x)$, *tak* $P(x)$.
- *Existuje* x *takové, že* $S(x)$.

- *Existuje* x *takové, že* $Q(x)$ *a* $R(x)$.

$P(x)$	x je ryba	x je trojúhelník
$Q(x)$	x je obratlovec	x je mnohoúhelník
$R(x)$	x žije ve vodě	x je konvexní
$S(x)$	x je kapr	x je rovnostranný trojúhelník

- *Pro každé* x *platí* $(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$.
- *Pro každé* x *platí* $(S(x) \rightarrow P(x))$.
- *Existuje* x *takové, že* $S(x)$.

- *Existuje* x *takové, že* $(Q(x) \wedge R(x))$.

$P(x)$	x je ryba	x je trojúhelník
$Q(x)$	x je obratlovec	x je mnohoúhelník
$R(x)$	x žije ve vodě	x je konvexní
$S(x)$	x je kapr	x je rovnostranný trojúhelník

Predikátová logika

- $\forall x (P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$
- $\forall x (S(x) \rightarrow P(x))$
- $\exists x\, S(x)$

- $\exists x (Q(x) \wedge R(x))$

$P(x)$	x je ryba	x je trojúhelník
$Q(x)$	x je obratlovec	x je mnohoúhelník
$R(x)$	x žije ve vodě	x je konvexní
$S(x)$	x je kapr	x je rovnostranný trojúhelník

- $\forall$ — univerzální kvantifikátor („*pro každé*“)
- $\exists$ — existenční kvantifikátor („*existuje*“)

Predikátová logika

Formule predikátové logiky vyjadřují tvrzení o objektech, které mají nějaké vlastnosti a které jsou v určitých vzájemných vztazích.

Interpretace či **interpretační struktura** — konkrétní soubor těchto objektů, jejich vlastností a vztahů.

Universum — soubor všech objektů v dané interpretaci

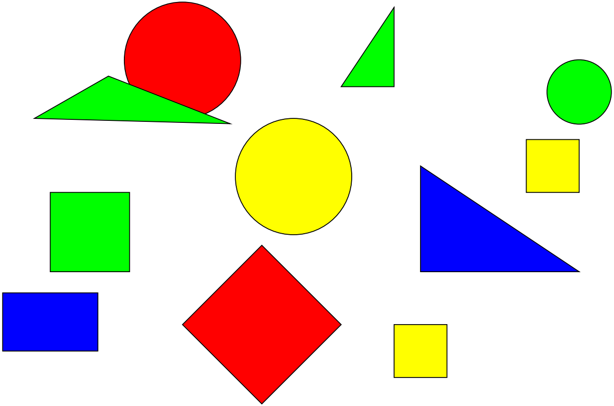
- Universem může být libovolná **neprázdná** množina.
- Objektům z tohoto universa se říká **prvky** universa.

Valuace — přiřazení prvků universa proměnným

Pravdivostní hodnoty formulí závisí na dané interpretaci a valuaci.

Predikátová logika

Příklad universa:



Další příklady univers:

- Nějaká přesně vymezená množina lidí, například množina všech obyvatel daného domu („*Jan Novák*“, „*František Vomáčka*“, ...)
- Množina všech knih v dané knihovně.
- Množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Množina všech bodů v rovině.
- Množina $\{a, b, c, d, e\}$.
- Množina $\{a\}$.

Proměnné

Proměnné — x, y, z, ..., případně s indexy — x_0, x_1, x_2, ...

Předpokládáme, že k dispozici je nekonečný počet proměnných.

Valuace — přiřazení prvků universa proměnným

Příklad:

- Universum — nějaká množina lidí; valuace v, kde:

  $v(x) =$ *„František Vomáčka"*
  $v(y) =$ *„Pavla Nováková"*
  ...

- Universum — množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$; valuace v, kde

  $$v(x) = 57 \qquad v(y) = 3 \qquad v(z) = 57 \qquad \ldots$$

Predikáty

Predikáty — P, Q, R, ...

- **Unární predikáty** — reprezentují **vlastnosti** prvků universa

  Příklad: Predikát P reprezentující vlastnost *„být modrý"*:

  $$P(x) \quad — \quad „x \textit{ je modrý}“$$

  Unární predikát přiřazuje prvkům universa pravdivostní hodnoty.

  Např. hodnota $P(x)$ může být:

  - 1 — prvek přiřazený proměnné x má danou vlastnost P (tj. je modrý)
  - 0 — prvek přiřazený proměnné x nemá danou vlastnost P (tj. není modrý)

Predikáty

- **Binární predikáty** — reprezentují **vztahy** mezi dvojicemi prvků universa

  Příklad: Predikát R reprezentující vztah *„být rodičem"*:

  $$R(x, y) \quad — \quad \text{„}x \textit{ je rodičem } y\text{"}$$

  Binární predikát přiřazuje pravdivostní hodnoty dvojicím prvků universa.

  Např. hodnota $R(x, y)$ může být:

  - 1 — když x a y jsou v daném vztahu (tj. x je rodičem y)
  - 0 — když x a y v daném vztahu nejsou (tj. x není rodičem y)

Predikáty

Můžeme uvažovat i predikáty libovolné jiné arity.

Například:

- **Ternární** predikát T (tj. predikát s aritou 3) reprezentující vztah mezi rodiči a dítětem:

  $$T(x, y, z)$$

  — x a y jsou rodiči dítěte z, přičemž x je jeho matka a y je jeho otec

- Na **nulární** predikáty (tj. predikáty s aritou 0) se můžeme dívat jako na atomické výroky, které se nevztahují k prvkům universa.

Formule predikátové logiky

Atomická formule — predikát aplikovaný na nějaké proměnné

Příklad:

- P — unární predikát reprezentující vlastnost *„být modrý“*
- Q — unární predikát reprezentující vlastnost *„být čtverec“*
- R — binární predikát reprezentující vztah *„překrývá“*

$P(x)$	—	*„x je modrý“*
$P(y)$	—	*„y je modrý“*
$Q(y)$	—	*„y je čtverec“*
$R(z,x)$	—	*„z překrývá x“*
$R(y,y)$	—	*„y překrývá sám sebe“*

Poznámka: Později pojem atomické formule poněkud rozšíříme.

Formule predikátové logiky

Z jednodušších formulí je možno vytvářet složitější formule pomocí **logických spojek** ("$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$") stejně jako ve výrokové logice.

Příklad:

- P — unární predikát reprezentující vlastnost *„být modrý"*
- Q — unární predikát reprezentující vlastnost *„být čtverec"*
- R — binární predikát reprezentující vztah *„překrývá"*

„Jestliže x je modrý čtverec nebo y nepřekrývá x, tak z není čtverec."

$$\big((P(x) \wedge Q(x)) \vee \neg R(y,x)\big) \rightarrow \neg Q(z)$$

Formule predikátové logiky

Z jednodušších formulí je možno vytvářet složitější formule pomocí **logických spojek** ("$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$") stejně jako ve výrokové logice.

Příklad:

- P — unární predikát reprezentující vlastnost *„být žena“*
- Q — unární predikát reprezentující vlastnost *„mít tmavé vlasy“*
- R — binární predikát reprezentující vztah *„být rodičem“*

„Jestliže x je žena s tmavými vlasy nebo y není rodičem x, tak z nemá tmavé vlasy.“

$$\big((P(x) \wedge Q(x)) \vee \neg R(y,x)\big) \rightarrow \neg Q(z)$$

Formule predikátové logiky

Z jednodušších formulí je možno vytvářet složitější formule pomocí **logických spojek** ("$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$") stejně jako ve výrokové logice.

Příklad:

- P — unární predikát reprezentující vlastnost *„být sudý"*
- Q — unární predikát reprezentující vlastnost *„být prvočíslo"*
- R — binární predikát reprezentující vztah *„být větší"*

„Jestliže x *je sudé prvočíslo nebo* y *není větší než* x*, tak* z *není prvočíslo."*

$$\big((P(x) \wedge Q(x)) \vee \neg R(y,x)\big) \rightarrow \neg Q(z)$$

Kvantifikátory

Univerzální kvantifikátor — symbol "$\forall$"

Jestliže φ je formule reprezentující určité tvrzení, tak

$$\forall x \varphi$$

je formule reprezentující tvrzení

„pro každé x platí φ".

Příklad: P — *„být čtverec"*

$$\forall x\, P(x)$$

- *„Pro každé x platí, že x je čtverec."*
- *„Každé x je čtverec."*
- *„Všechny prvky jsou čtverce."*

Kvantifikátory

Příklad:

- *„Pro každé* x *platí, že pokud* x *je čtverec, tak* x *je zelený."*
- *„Všechny čtverce jsou zelené."*

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

- P — *„být čtverec"* (arita 1)
- Q — *„být zelený"* (arita 1)

Příklad:

- *„Jestliže pro každé* x *platí, že* x *je čtverec nebo* x *je zelený, tak pro každé* y *platí, že* y *je trojúhelník."*
- *„Jestliže je každý objekt čtverec nebo je zelený, tak jsou všechny prvky trojúhelníky."*

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \forall y T(y)$$

- P — *„být čtverec"* (arita 1)
- Q — *„být zelený"* (arita 1)
- T — *„být trojúhelník"* (arita 1)

Kvantifikátory

Zásadní rozdíl mezi následujícími formulemi:

- $P(x)$ — „*x je čtverec*“

  Mluví o **jednom** konkrétním prvku přiřazeném proměnné x.

  Pravdivostní hodnota tohoto tvrzení závisí na konkrétním prvku přiřazeném proměnné x, tj. na konkrétní valuaci.

- $\forall x P(x)$ — „*každé x je čtverec*“ (tj. „*všechny prvky jsou čtverce*“)

  Mluví o **všech** prvcích universa.

  Pravdivostní hodnota tohoto tvrzení nezávisí na konkrétní valuaci.

Kvantifikátory

Příklad:

- *„Jestliže je* x *prvočíslo, pak je liché."*

$$P(x) \rightarrow L(x)$$

- *„Pro každé* x *platí, že pokud je* x *prvočíslo, pak je liché"*.
  (Tj. *„všechna prvočísla jsou lichá"*.)

$$\forall x(P(x) \rightarrow L(x))$$

Predikáty:

- P — *„být prvočíslo"* (arita 1)
- L — *„být lichý"* (arita 1)

Kvantifikátory

Příklad:

- *„Pro každé y platí, že pokud y je zelený, tak x překrývá y."*
- *„Objekt x překrývá všechny zelené objekty."*

$$\forall y (G(y) \rightarrow R(x, y))$$

Predikáty:

- R — *„překrývá"* (arita 2)
- G — *„je zelený"* (arita 1)

Kvantifikátory

Příklad:

- *„Pro každé x platí, že pro každé y platí, že pokud x je rodičem y, tak x má rád y."*
- *„Pro každé x a y platí, že pokud x je rodičem y, tak x má rád y."*
- *„Pro každé dva prvky x, y platí, že pokud x je rodičem y, tak x má rád y."*

$$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow S(x,y))$$

Predikáty:

- R — *„je rodičem"* (arita 2)
- S — *„má rád"* (arita 2)

Kvantifikátory

Existenční kvantifikátor — symbol "$\exists$"

Jestliže φ je formule reprezentující určité tvrzení, tak

$$\exists x \varphi$$

je formule reprezentující tvrzení

„existuje x, pro které platí φ“.

Příklad: P — *„být čtverec“*

$$\exists x\, P(x)$$

- *„Existuje x, pro které platí, že x je čtverec.“*
- *„Existuje x takové, že x je čtverec.“*
- *„Existuje alespoň jeden čtverec.“*

Kvantifikátory

Příklad:

- *„Existuje x, pro které platí, že x je čtverec a x je zelený.“*
- *„Existuje x takové, že x je čtverec a x je zelený.“*
- *„Pro nějaké x platí, že x je čtverec a x je zelený.“*
- *„Existuje zelený čtverec.“*
- *„Některé čtverce jsou zelené.“*
- *„Alespoň jedno x je zelený čtverec.“*

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

Predikáty:

- P — *„být čtverec“* (arita 1)
- Q — *„být zelený“* (arita 1)

Kvantifikátory

Příklad:

- *„Existuje x takové, že pro každé y je x větší než y."*

$$\exists x \forall y \, P(x, y)$$

- *„Pro každé y existuje x takové, že x je větší než y."*

$$\forall y \exists x \, P(x, y)$$

P — *„být větší než"* (arita 2)

Syntaxe formulí predikátové logiky

Abeceda:

- **logické spojky** — "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$" "$\rightarrow$" a "$\leftrightarrow$"
- **kvantifikátory** — "$\forall$", "$\exists$"
- **pomocné symboly** — "(", ")", ","
- **proměnné** — "x", "y", "z", …, "x_0", "x_1", "x_2", …
- **predikátové symboly** — například symboly "P", "Q", "R", apod. (u každého symbolu musí být navíc stanovena příslušná arita)
- …

Poznámka: Další typy symbolů budou uvedeny později.

Syntaxe formulí predikátové logiky

Definice

Dobře utvořené **atomické formule** predikátové logiky jsou formule tvaru:

- $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde P je predikátový symbol s aritou n a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou (ne nutně různé) proměnné.
- $\ldots$

Poznámka: Tato definice není úplná. Později bude poněkud zobecněna a rozšířena o další položky.

Příklad:

$$P(x, y) \qquad R(z, z, z) \qquad S(y)$$

Syntaxe formulí predikátové logiky

Definice

Dobře utvořené **formule predikátové logiky** jsou posloupnosti symbolů vytvořené podle následujících pravidel:

1. Dobře utvořené atomické formule jsou dobře utvořené formule.
2. Jestliže φ a ψ jsou dobře utvořené formule, pak i $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou dobře utvořené formule.
3. Jestliže φ je dobře utvořená formule a x je proměnná, tak $\forall x\varphi$ a $\exists x\varphi$ jsou dobře utvořené formule.
4. Neexistují žádné další dobře utvořené formule než ty, které jsou vytvořené pomocí předchozích pravidel.

Syntaxe formulí predikátové logiky

Pojmy jako

- podformule
- abstraktní syntaktický strom

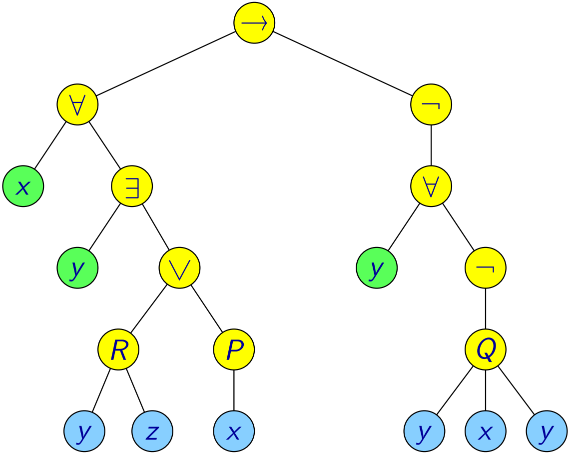
jsou zavedeny v predikátové logice podobně jako ve výrokové logice (pouze rozšířeny o konstrukce, které jsou v predikátové logice navíc).

Konvence pro vypouštění závorek:

- Stejné jako ve výrokové logice.
- Kvantifikátory („$\forall$" a „$\exists$") mají stejnou prioritu jako negace („$\neg$"), tj. nejvyšší prioritu.

Abstraktní syntaktický strom formule

$$\forall x \exists y (R(y,z) \vee P(x)) \rightarrow \neg \forall y \neg Q(y,x,y)$$



Volné a vázané výskyty proměnných

Každý výskyt proměnné x v podformuli tvaru $\exists x \varphi$ nebo $\forall x \varphi$ je **vázaný**.

Výskyt proměnné, který není vázaný, je **volný**.

Příklad: Formule

$$\forall x \exists y (R(y,z) \vee P(x)) \rightarrow \neg \forall y \neg Q(y,x,y)$$

- y v podformuli $R(y,z)$ — vázaný výskyt ($\exists y$)
- z v podformuli $R(y,z)$ — volný výskyt
- x v podformuli $P(x)$ — vázaný výskyt ($\forall x$)
- oba výskyty y v podformuli $Q(y,x,y)$ — vázané výskyty ($\forall y$)
- x v podformuli $Q(y,x,y)$ — volný výskyt

Volné a vázané výskyty proměnných

Množinu proměnných, které se vyskytují jako **volné** proměnné ve formuli φ, budeme označovat $\mathit{free}(\varphi)$.

Příklad:

- Pokud φ je formule $P(x, y)$, tak $\mathit{free}(\varphi) = \{x, y\}$.
- Pokud ψ je formule $\exists x \exists y P(x, y)$, tak $\mathit{free}(\psi) = \emptyset$.
- Pokud χ je formule

  $$\forall x \exists y (R(y, z) \vee P(x)) \rightarrow \neg \forall y \neg Q(y, x, y)$$

  tak $\mathit{free}(\chi) = \{x, z\}$.

Volné a vázané výskyty proměnných

Množinu volných proměnných $\mathit{free}(\varphi)$ je možné popsat následující induktivní definicí:

- $\mathit{free}(P(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
  (kde P je predikátový symbol)
- $\mathit{free}(\neg\varphi) = \mathit{free}(\varphi)$
- $\mathit{free}(\varphi \wedge \psi) = \mathit{free}(\varphi) \cup \mathit{free}(\psi)$
  (pro formule tvaru $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ a $\varphi \leftrightarrow \psi$ je to podobné)
- $\mathit{free}(\forall x \varphi) = \mathit{free}(\varphi) - \{x\}$ (kde x je proměnná)
- $\mathit{free}(\exists x \varphi) = \mathit{free}(\varphi) - \{x\}$ (kde x je proměnná)

Volné a vázané výskyty proměnných

Formule φ je **uzavřená**, jestliže neobsahuje žádné volné výskyty proměnných (tj. když $\mathit{free}(\varphi) = \emptyset$).

Formule φ je **otevřená**, jesliže není uzavřená (tj. když $\mathit{free}(\varphi) \neq \emptyset$).

Poznámka: Uzavřeným formulím se také někdy říká **sentence**.

Příklad:

- Formule $\exists x \exists y P(x, y)$ je uzavřená.
- Formule $\forall x \exists y (R(y, z) \vee P(x)) \rightarrow \neg \forall y \neg Q(y, x, y)$ je otevřená (protože obsahuje volné výskyty proměnných z a x).

Pravdivostní hodnoty uzavřených formulí nezávisí na valuaci, ale jen na příslušné interpretaci.

Sémantika predikátové logiky

Formule jsou vyhodnocovány při dané **interpretaci** (**interpretační struktuře**) a **valuaci**.

To, že formule φ platí (tj. má pravdivostní hodnotu 1) v interpretaci $\mathcal{A}$ při valuaci v, budeme označovat

$$\mathcal{A}, v \models \varphi$$

To, že formule φ naplatí (tj. má pravdivostní hodnotu 0) v interpretaci $\mathcal{A}$ při valuaci v, budeme označovat $\mathcal{A}, v \not\models \varphi$.

Sémantika predikátové logiky

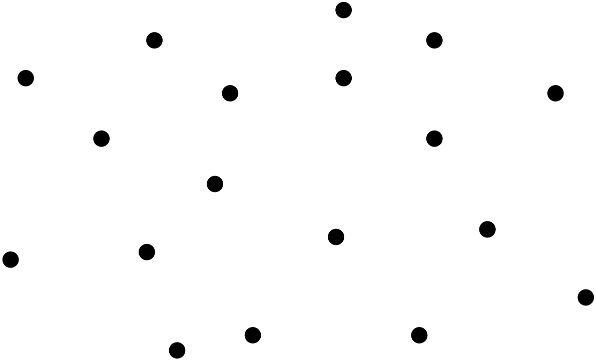
Interpretace $\mathcal{A}$ je struktura skládající se z následujících položek:

- **Universum** A — libovolná neprázdná množina
- Každému unárnímu predikátovému symbolu P je přiřazena podmnožina množiny A (tj. unární relace na A) — označme ji $P^{\mathcal{A}}$.
  (Platí tedy $P^{\mathcal{A}} \subseteq A$.)
- Každému binárnímu predikátovému symbolu Q je přiřazena binární relace na A — označme ji $Q^{\mathcal{A}}$.
  (Platí tedy $Q^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A$.)
- Podobné to bude pro predikátové symboly s dalšími aritami (3, 4, 5, $\ldots$).

Poznámka: Tato definice není úplná a bude později doplněna o další položky.

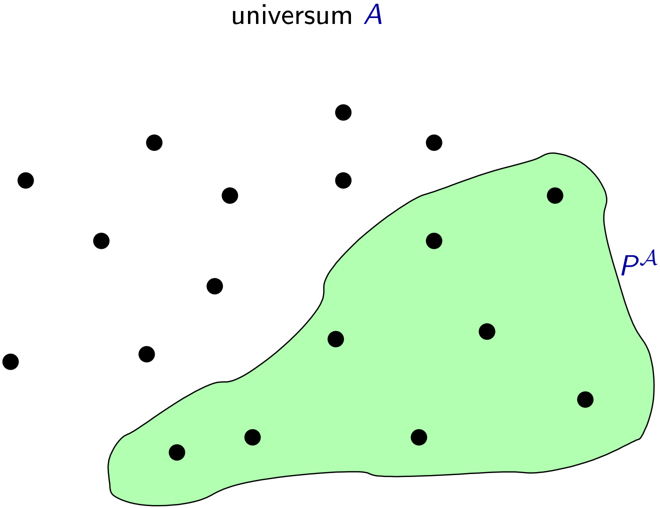
Příklad interpretace $\mathcal{A}$:

universum A



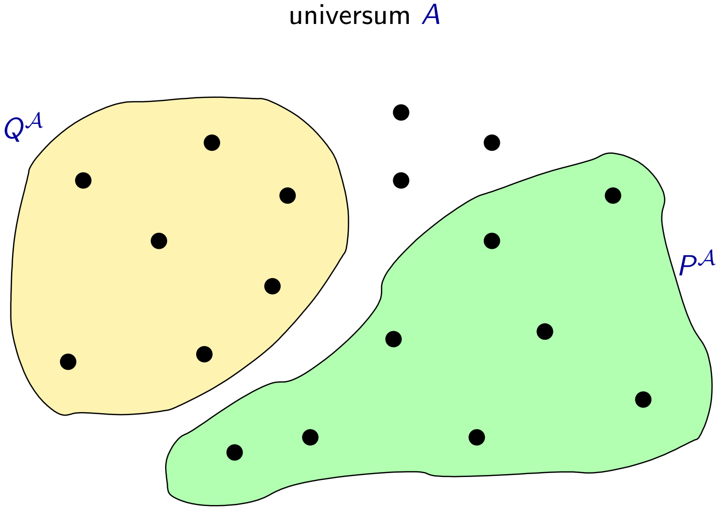
Sémantika predikátové logiky

Příklad interpretace $\mathcal{A}$:

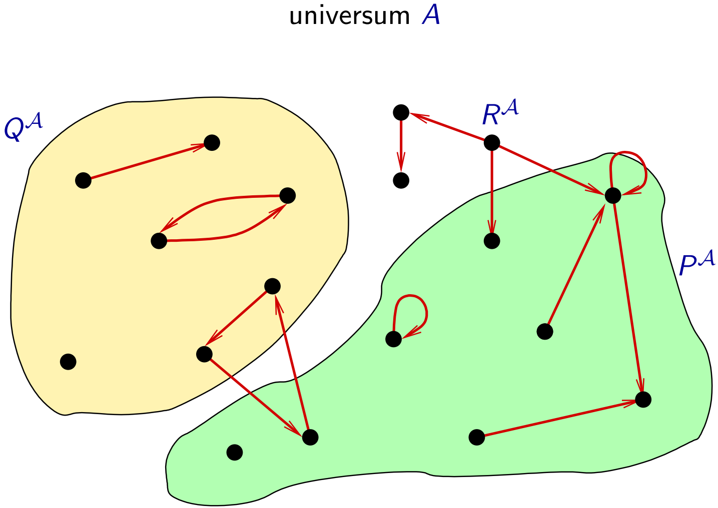


Sémantika predikátové logiky

Příklad interpretace $\mathcal{A}$:



Příklad interpretace $\mathcal{A}$:



Jiný příklad interpretace $\mathcal{A}$:

- universum $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
- $P^{\mathcal{A}} = \{b, d, e\}$
- $Q^{\mathcal{A}} = \{a, b, e, g\}$
- $R^{\mathcal{A}} = \{(a, b), (a, e), (a, g), (b, b), (c, e), (f, c), (f, g), (g, a), (g, g)\}$

Sémantika predikátové logiky

Označme množinu všech proměnných Var, tj.

$$\mathit{Var} = \{x, y, z, \ldots, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$$

Při dané interpretaci $\mathcal{A}$ s universem A je **valuace** v libovolná funkce

$$v : \mathit{Var} \to A$$

přiřazující jednotlivým proměnným prvky universa.

Poznámka: Jak uvidíme, ve skutečnosti jsou pro určení pravdivostní hodnoty formule φ důležité hodnoty přiřazené valuací v proměnným z množiny $\mathit{free}(\varphi)$.

Hodnoty přiřazené valuací v ostatním proměnným z tohoto hlediska důležité nejsou.

Sémantika predikátové logiky

Vezměme si libovolnou interpretaci $\mathcal{A}$ s universem A a libovolnou valuaci v.

Řekněme, že x je proměnná (tj. $x \in \mathit{Var}$) a a je prvek universa (tj. $a \in A$).

Zápis

$$v[x \mapsto a]$$

označuje valuaci $v' : \mathit{Var} \to A$, která se s valuací v shoduje v hodnotách všech proměnných jiných než x, a kde x nabývá hodnoty a.

Tj. pro každou proměnnou y (kde $y \in \mathit{Var}$) platí

$$v'(y) = \begin{cases} a & \text{pokud } y = x \\ v(y) & \text{jinak} \end{cases}$$

Příklad:

- universum $A = \{a, b, c, d, e, f, g, \dots\}$

  valuace v:

  $$v(x_0) = c \qquad v(x_1) = e \qquad v(x_2) = b \qquad v(x_3) = e \qquad \dots$$

  valuace $v[x_2 \mapsto g]$:

  $$v(x_0) = c \qquad v(x_1) = e \qquad v(x_2) = g \qquad v(x_3) = e \qquad \dots$$

Definice

Předpokládejme danou interpretaci $\mathcal{A}$ s universem A a valuaci v, přiřazující proměnným prvky z universa A.

Pravdivostní hodnoty formulí predikátové logiky v interpretaci $\mathcal{A}$ a valuaci v jsou definovány následovně:

- Pro predikát P s aritou n platí $\mathcal{A}, v \models P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ právě tehdy, když $(v(x_1), v(x_2), \ldots, v(x_n)) \in P^{\mathcal{A}}$.
- $\mathcal{A}, v \models \neg\varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{A}, v \not\models \varphi$.
- $\mathcal{A}, v \models \varphi \wedge \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{A}, v \models \varphi$ a $\mathcal{A}, v \models \psi$.
- $\mathcal{A}, v \models \varphi \vee \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{A}, v \models \varphi$ nebo $\mathcal{A}, v \models \psi$.
- $\mathcal{A}, v \models \varphi \rightarrow \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{A}, v \not\models \varphi$ nebo $\mathcal{A}, v \models \psi$.
- $\mathcal{A}, v \models \varphi \leftrightarrow \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{A}, v \models \varphi$ a $\mathcal{A}, v \models \psi$, nebo když $\mathcal{A}, v \not\models \varphi$ a $\mathcal{A}, v \not\models \psi$.
- ...

Definice (pokrač.)

- . . .
- $\mathcal{A}, v \models \forall x \varphi$ právě tehdy, když pro **každé** $a \in A$ platí $\mathcal{A}, v[x \mapsto a] \models \varphi$.
- $\mathcal{A}, v \models \exists x \varphi$ právě tehdy, když **existuje** $a \in A$ takové, že $\mathcal{A}, v[x \mapsto a] \models \varphi$.

Sémantika predikátové logiky

Uzavřená formule φ je **pravdivá** (tj. má pravdivostní hodnotu 1) **v interpretaci** $\mathcal{A}$, jestliže pro každou valuaci v platí $\mathcal{A}, v \models \varphi$.

To, že formule φ je pravdivá v interpretaci $\mathcal{A}$, budeme označovat zápisem

$$\mathcal{A} \models \varphi\,.$$

Poznámka: U uzavřené formule nezávisí její pravdivostní hodnota v dané interpretaci na tom, jaká je valuace.

Vezměme si libovolnou uzavřenou formuli φ.
Modelem formule φ je libovolná interpretace $\mathcal{A}$ taková, že $\mathcal{A} \models \varphi$.

Vyhodnocování pravdivosti formulí jako hra

Vezměme si formuli tvaru

$$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \cdots \exists x_{n-1} \forall x_n \varphi,$$

kde se nějak libovolně střídají kvantifikátory a kde φ neobsahuje žádné kvantifikátory.

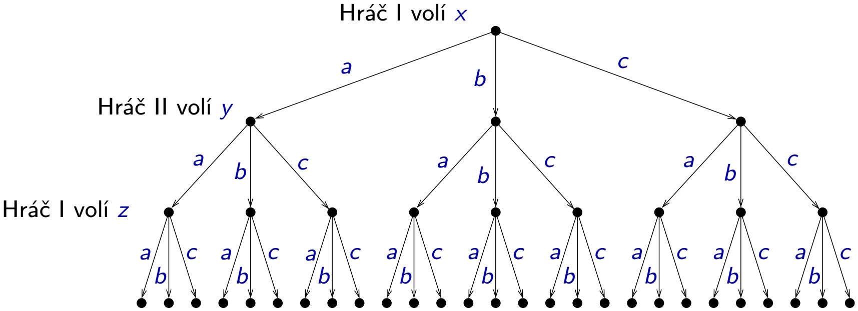
Na vyhodnocování pravdivosti formulí tohoto tvaru v dané interpretaci $\mathcal{A}$ a valuaci v lze nahlížet jako na určitý druh hry:

- Hrají dva hráči — **Hráč I** a **Hráč II**.
- Hráč I se snaží ukázat, že formule platí.
- Hráč II se snaží ukázat, že formule neplatí.
- Hráč I volí hodnoty proměnných vázaných existenčním kvantifikátorem ($\exists$).
- Hráč II volí hodnoty proměnných vázaných univerzálním kvantifikátorem ($\forall$).

Vyhodnocování pravdivosti formulí jako hra

Příklad: Formule $\exists x \forall y \exists z (P(x,y) \rightarrow Q(y,z))$

universum $A = \{a, b, c\}$



Vyhodnocování pravdivosti formulí jako hra

- Formule φ platí právě tehdy, když má Hráč I v této hře **vítěznou strategii**.
- Formule φ neplatí právě tehdy, když má vítěznou strategii Hráč II.

Strategie — určuje, jak má hráč hrát v každé situaci, tj. určuje tahy pro všechny možné tahy protihráče.

Vítězná strategie — strategie, která zaručí vítězství daného hráče bez ohledu na to, jak hraje protihráč.

Vyhodnocování pravdivosti formulí jako hra

Příklad: Interpretace, kde universum je množina reálných čísel $\mathbb{R}$ a binární predikátový symbol R reprezentuje relaci *„větší nebo rovno“* (tj. $R(x, y)$ platí právě tehdy, když $x \geq y$).

Formule $\exists x \forall y R(x, y)$ — vítězná strategie Hráče II:

- Hráč I zvolí číslo x.
- Hráč II zvolí číslo $y = x + 1$ — Hráč II vyhrál, protože zjevně není pravda, že $x \geq x + 1$.

Formule $\forall y \exists x R(x, y)$ — vítězná strategie Hráče I:

- Hráč II zvolí číslo y.
- Hráč I zvolí číslo $x = y$ — Hráč I vyhrál, protože zjevně platí, že $x \geq x$.

Logicky platné formule

Formule φ je **logicky platná**, jestliže má v každé interpretaci a valuaci pravdivostní hodnotu 1, tj. jestliže pro každou interpretaci $\mathcal{A}$ a valuaci v platí

$$\mathcal{A}, v \models \varphi.$$

Příklad:

- $\exists x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$
- $\forall x P(x) \wedge \neg \exists y Q(y) \rightarrow \forall z (P(z) \wedge \neg Q(z))$
- $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$

Logicky platné formule

Pokud vezmeme libovolnou tautologii výrokové logiky a nahradíme v ní atomické výroky libovolnými formulemi predikátové logiky, dostaneme logicky platnou formuli.

Příklad: Tautologie $p \rightarrow (q \vee p)$

- p nahradíme $\forall z(P(x,z) \leftrightarrow \neg Q(z,y))$
- q nahradíme $R(x)$

Dostaneme logicky platnou formuli

$$\forall z(P(x,z) \leftrightarrow \neg Q(z,y)) \;\rightarrow\; (R(x) \vee \forall z(P(x,z) \leftrightarrow \neg Q(z,y)))$$

Logicky ekvivalentní formule

Formule φ a ψ jsou **logicky ekvivalentní**, jestliže mají stejné pravdivostní hodnoty v každé interpretaci a valuaci, tj. jestliže pro každou interpretaci $\mathcal{A}$ a valuaci v platí

$$\mathcal{A}, v \models \varphi \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad \mathcal{A}, v \models \psi.$$

To, že φ a ψ jsou logicky ekvivalentní, se označuje zápisem

$$\varphi \Leftrightarrow \psi.$$

- Stejně jako ve výrokové logice, je v predikátové logice možné provádět ekvivalentní úpravy.
- Všechny ekvivalence, které platí ve výrokové logice, platí i v predikátové logice.

Logicky ekvivalentní formule

- V predikátové logice platí řada dalších ekvivalencí, které nemají analogii ve výrokové logice.

Příklady některý důležitých ekvivalencí:

$$\neg\forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi$$
$$\neg\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi$$

$$\forall x\forall y\varphi \Leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$$
$$\exists x\exists y\varphi \Leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$$

Pokud $x \notin \mathit{free}(\varphi)$:

$$\forall x\varphi \Leftrightarrow \varphi$$
$$\exists x\varphi \Leftrightarrow \varphi$$

Logicky ekvivalentní formule

Některé další důležité ekvivalence:

$$
\begin{aligned}
(\forall x \varphi) \land (\forall x \psi) &\Leftrightarrow \forall x(\varphi \land \psi) \\
(\exists x \varphi) \lor (\exists x \psi) &\Leftrightarrow \exists x(\varphi \lor \psi)
\end{aligned}
$$

Pokud $x \notin \mathit{free}(\psi)$:

$$
\begin{aligned}
(\forall x \varphi) \land \psi &\Leftrightarrow \forall x(\varphi \land \psi) \\
(\forall x \varphi) \lor \psi &\Leftrightarrow \forall x(\varphi \lor \psi) \\
(\exists x \varphi) \land \psi &\Leftrightarrow \exists x(\varphi \land \psi) \\
(\exists x \varphi) \lor \psi &\Leftrightarrow \exists x(\varphi \lor \psi)
\end{aligned}
$$

Přejmenování vázaných proměnných

Pokud přejmenujeme ve formuli vázanou proměnnou, dostaneme ekvivalentní formuli.

Příklad: $\forall x P(x, y) \;\Leftrightarrow\; \forall z P(z, y)$

- Pokud přejmenováváme např. x na y ve formuli $\forall x \varphi$ nebo $\exists x \varphi$, proměnná y se **nesmí** vyskytovat ve formuli φ jako volná proměnná.

  $\exists x P(x, y)$ není ekvivalentní $\exists y P(y, y)$

- Při přejmenování se volné výskyty proměnných v podformuli **nesmí** stát vázanými. Např.

  $\exists x \forall y P(x, y)$ není ekvivalentní $\exists y \forall y P(y, y)$

Substituce

Řekněme, že ve formuli φ chceme nahradit **volné** výskyty proměnné x proměnnou y (tj. za x dosadit y).

Tato operace na formulích se nazývá **substituce** a výsledná formule se označuje

$$\varphi[y/x].$$

Poznámka: Formule φ a $\varphi[y/x]$ obecně **nejsou** ekvivalentní.

Příklad:

$$P(x, z) \qquad \text{není ekvivalentní} \qquad P(y, z)$$

Přejmenování vázaných proměnných

S použitím operace substituce je možné popsat přejmenování vázaných proměnných pomocí následujících ekvivalencí.

Pokud $y \notin \mathit{free}(\forall x \varphi)$:

$$\forall x \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \forall y (\varphi[y/x])$$

Pokud $y \notin \mathit{free}(\exists x \varphi)$:

$$\exists x \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \exists y (\varphi[y/x])$$

Příklad:

$$\exists x \forall y P(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \forall z P(x,z) \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \forall z P(y,z) \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \forall x P(y,x)$$

Logické vyplývání

Definice

Závěr ψ **logicky vyplývá** z předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, což zapisujeme

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi,$$

jestliže v každé interpretaci $\mathcal{A}$ a každé valuaci v, kde platí předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, platí i závěr ψ.

- Vše, co bylo řečeno o logickém vyplývání ve výrokové logice, platí analogicky i v predikátové logice.

Logické vyplývání

Pokud chceme ukázat, že daný závěr ψ z předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ **nevyplývá**, stačí najít příklad jedné konkrétní interpretace $\mathcal{A}$ a valuace v, kde platí tyto předpoklady a neplatí závěr ψ.

Příklad:

- *Existuje vodní živočich živící se masem.*
- *Všechny ryby jsou vodní živočichové.*

- *Existuje ryba živící se masem.*

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x(P(x) \land Q(x)) \\ \forall x(R(x) \rightarrow P(x))\end{array}}{\exists x(R(x) \land Q(x))}$$

$P(x)$ — *„x je vodní živočich“*
$Q(x)$ — *„x se živí masem“*
$R(x)$ — *„x je ryba“*

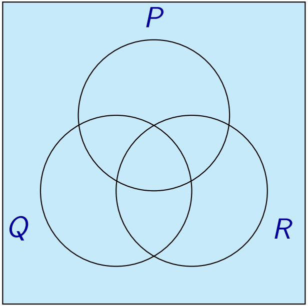
Interpretace $\mathcal{A}$, kde universum $A = \{a, b\}$

$$P^{\mathcal{A}} = \{a, b\} \qquad Q^{\mathcal{A}} = \{a\} \qquad R^{\mathcal{A}} = \{b\}$$

Vennovy diagramy

Obecně je těžké zjistit, zda závěr vyplývá nebo nevyplývá z daných předpokladů.

V případě, kdy máme pouze unární predikáty a těchto predikátů je jen malý počet (např. 3), lze při úvahách pro názornost použít tzv. **Vennovy diagramy**.



Vennovy diagramy

Příklad:

- *Ryby jsou obratlovci.*
- *Ryby žijí ve vodě.*
- *Existuje alespoň jedna ryba.*

- *Existuje obratlovec žijící ve vodě.*

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \\ \exists x P(x)\end{array}}{\exists x(Q(x) \wedge R(x))}$$

$P(x)$ — „x *je ryba*“
$Q(x)$ — „x *je obratlovec*“
$R(x)$ — „x *žije ve vodě*“

⟨*řešení na tabuli*⟩

Příklad důkazu

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x(\neg R(x,x)) \\ \forall x\forall y\forall z(R(x,y)\wedge R(y,z)\rightarrow R(x,z))\end{array}}{\forall x\forall y(R(x,y)\rightarrow \neg R(y,x))}$$

1.	$\forall x(\neg R(x,x))$	- předpoklad 1
2.	$\forall x\forall y\forall z(R(x,y)\wedge R(y,z)\rightarrow R(x,z))$	- předpoklad 2
3.	Předpokládejme libovolné prvky x a y:	
4.	Předpokládejme $R(x,y)$:	
5.	Předpokládejme $R(y,x)$:	
6.	$R(x,y)\wedge R(y,x)\rightarrow R(x,x)$	- z 2.
7.	$R(x,x)$	- z 4., 5., 6.
8.	$\neg R(x,x)$	- z 1.
9.	$\neg R(y,x)$	- spor 7. a 8., takže 5. neplatí
10.	$R(x,y)\rightarrow \neg R(y,x)$	- z 4., 9.
11.	$\forall x\forall y(R(x,y)\rightarrow \neg R(y,x))$	- z 3., 10.