Logické vyplývání

Definice

Formule ψ **logicky vyplývá** z předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, jestliže při každém pravdivostním ohodnocení v, při kterém platí všechny tyto předpoklady, platí i ψ.

To, že ψ logicky vyplývá z $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ se označuje zápisem

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi.$$

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — předpoklady
- ψ — závěr

Logické vyplývání

Příklad: Závěr $r \rightarrow p$ logicky vyplývá z předpokladu $p \vee (q \wedge \neg r)$, tj.

$$p \vee (q \wedge \neg r) \models r \rightarrow p$$

	p	q	r	$p \vee (q \wedge \neg r)$	$r \rightarrow p$
	0	0	0	0	1
	0	0	1	0	0
$*$	0	1	0	1	1
	0	1	1	0	0
$*$	1	0	0	1	1
$*$	1	0	1	1	1
$*$	1	1	0	1	1
$*$	1	1	1	1	1

Logické vyplývání

Příklad:

- *Jestliže měl vlak zpoždění a na nádraží nebyly taxíky, tak Honza přišel pozdě do práce.*
- *Honza nepřišel do práce pozdě.*
- *Vlak měl zpoždění.*

- *Na nádraží byly taxíky.*

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow r,\ \neg r,\ p \ \models\ q$$

Logické vyplývání

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow r,\ \neg r,\ p \models q$$

	p	q	r	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$	$\neg r$	p	q
	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0
	0	1	0	1	1	0	1
	0	1	1	1	0	0	1
	1	0	0	0	1	1	0
	1	0	1	1	0	1	0
$*$	1	1	0	1	1	1	1
	1	1	1	1	0	1	1

Logické vyplývání

Pro zjištění toho, zda ψ logicky vyplývá z předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ je možné použít **tabulkovou metodu**:

- Pokud ve všech řádcích odpovídajících ohodnocením, kde všechny předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ mají hodnotu 1, má také ψ hodnotu 1, tak závěr ψ **logicky vyplývá** z předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

- Pokud existuje v tabulce alespoň jedno ohodnocení, kde $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ mají hodnotu 1 a závěr ψ má hodnotu 0, pak tento závěr z těchto předpokladů **logicky nevyplývá**.

Poznámka: Ohodnocení, kde má alespoň jeden z předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ hodnotu 0, nejsou z hlediska logického vyplývaní důležité — závěr ψ tam může, ale nemusí platit.

Logické vyplývání

Pro zjištění toho, zda ψ logicky vyplývá z předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ je možné také použít **sémantický spor**:

- Vytvoříme orientovaný acyklický graf společný pro všechny formule $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ a ψ.
- Vrcholům odpovídajícím předpokladům $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ přiřadíme hodnoty 1 a vrcholu, který odpovídá závěru ψ, přiřadíme 0.
- Pokud se podaří všechny vrcholy grafu konzistentně ohodnotit, tak máme příklad ohodnocení, při kterém předpoklady platí a závěr ne — tj. závěr z daných předpokládů **logicky nevyplývá**.
- Pokud ukážeme, že takové ohodnocení nemůže existovat (protože každý pokus o doplnění hodnot k ostatním vrcholům vede ke sporu), závěr z daných předpokladů **logicky vyplývá**.

Logické vyplývání

Pokud je formule ψ **tautologie**, tak logicky vyplývá z jakékoliv množiny předpokladů, tj. pro jakoukoliv množinu předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ platí

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

Speciálně, pokud je ψ tautologie, tak vyplývá i z prázdné množiny předpokladů:

$$\models \psi$$

Tautologie jsou jediné formule, které logicky vyplývají z prázdné množiny předpokladů.

Logické vyplývání

Otázku, zda daný závěr vyplývá z daných předpokladů, je možné přeformulovat jako otázku, zda určitá formule je tautologie:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

právě tehdy, když

$$\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\varphi_3 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \psi) \cdots))) \text{ je tautologie}$$

Příklad:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \psi$$

právě tehdy, když

$$\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\varphi_3 \to (\varphi_4 \to \psi))) \text{ je tautologie}$$

Logické vyplývání

Následující dvě formule jsou logicky ekvivalentní:

- $\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow (\cdots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \psi) \cdots)))$
- $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$

Například

$$\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow (\varphi_4 \rightarrow \psi))) \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4) \rightarrow \psi$$

(Dá se to snadno odvodit pomocí ekvivalentních úprav s použitím následující ekvivalence: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \rightarrow r$)

Platí tedy také, že

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

právě tehdy, když

$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$ je tautologie

Logické vyplývání

Ještě další možnost, jak chakterizovat, kdy závěr vyplývá z daných předpokladů, je dána následující ekvivalencí:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \models \psi$$

právě tehdy, když

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \wedge \psi$$

Přidáním nějakého závěru ψ, který logicky vyplývá z daných předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, k těmto předpokladům jako nový další předpoklad se nijak nezmění množina pravdivostních ohodnocení, při kterých jsou dané předpoklady pravdivé.
(Množiny předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi$ jsou pravdivé při těch samých ohodnoceních.)

Logické vyplývání

Přidáním předpokladu ψ, který logicky vyplývá z daných předpokladů, se tedy nezmění ani množina všech možných závěrů, které z dané množiny předpokladů vyplývají:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \models \psi$$

právě tehdy, když

pro každou formuli χ platí:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \models \chi \quad \text{právě tehdy, když} \quad \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \psi \models \chi$$

Logické vyplývání

Když z daných předpokladů logicky vyplývají nějaké závěry a z těchto závěrů pak vyplývá nějaký další závěr, vyplývá tento závěr i z původních předpokladů.

Řekněme, že platí

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \chi_1 \qquad \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \chi_2$$

a zároveň $\chi_1, \chi_2 \models \psi$.

Pak platí i $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Příklad:

- Pokud $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models (q \vee \neg p)$ a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \neg s$, tak

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models (q \vee \neg p) \wedge \neg s,$$

  protože $q \vee \neg p, \neg s \models (q \vee \neg p) \wedge \neg s$.

Logické vyplývání

Příklad:

- Pokud $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models p \rightarrow q$ a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models p$, tak

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models q,$$

  protože $p \rightarrow q,\ p \models q$.

Příklad:

- Pokud $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \neg p \rightarrow \neg q$, tak

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models q \rightarrow p,$$

  protože $\neg p \rightarrow \neg q \models q \rightarrow p$.

Logické vyplývání

Při zdůvodnění toho, že závěr ψ logicky vyplývá z předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, je možno postupovat po menších krocích.

Začneme s předpoklady, například:

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3$$

Postupně přidáváme další formule tak, aby každá nově přidaná formule logicky vyplývala z předchozích, například:

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3, \ \chi_1, \ \chi_2, \ \chi_3, \ \chi_4, \ \chi_5, \ \chi_6, \ \chi_7, \ \chi_8, \ \psi$$

Logické vyplývání

Předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ jsou **nekonzistentní** (**sporné**), jestliže neexistuje žádné pravdivostní ohodnocení v, při kterém by byly všechny tyto předpoklady pravdivé.

Předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ jsou nekonzistentní právě tehdy, když

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$$

je kontradikce.

Příklad: Předpoklady $p \rightarrow q$, $r \rightarrow p$, r, $\neg q$ jsou nekonzistentní.

Logické vyplývání

Pokud jsou předpoklady nekonzistentní, vyplývá z nich jakýkoliv závěr.

Pokud jsou předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ nekonzistentní, tak pro libovolnou formuli ψ platí

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi.$$

Z nekonzistentních předpokladů tak vyplývají například následující závěry:

- $\bot$
- formule χ i $\neg\chi$, kde χ je libovolná formule

Logické vyplývání

Formule $\bot$ nemůže být nikdy pravdivá a stejně tak není možné, aby při nějakém ohodnocení byly současně pravdivé formule χ a $\neg\chi$.

Pokud tedy zjistíme, že z předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ logicky vyplývá

- $\bot$ nebo
- χ a zároveň $\neg\chi$,

znamená to, že předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ jsou nekonzistentní a vyplývá z nich cokoliv.

Poznámka: Všimněte si, že následující formule jsou tautologie:

- $\bot \to \psi$
- $\chi \to (\neg\chi \to \psi)$

Platí tedy $\quad \bot \models \psi \quad$ a $\quad \chi, \neg\chi \models \psi.$

Logické vyplývání

Princip důkazu sporem

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

právě tehdy, když

předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \neg\psi$ jsou nekonzistentní

Zdůvodňování toho, že daný závěr vyplývá z daných předpokladů se tak při použití důkazu sporem převede na zdůvodňování toho, že není možné, aby zároveň platily všechny předpoklady i negace závěru.

Zjišťování toho, zda $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$, se tak dá převést na zjišťování toho, zda formule

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$$

je **kontradikce**.

Rezoluční metoda

Rezoluční metoda je jedním z algoritmů pro zjištění toho, zda daný závěr vyplývá z daných předpokladů.

Řeší následující problém:

Vstup: Formule φ_1, φ_2, ..., φ_n, ψ.

Otázka: Platí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$?

Poznámka: Dá se použít také pro zjištění, zda je daná formule tautologie, kontradikce nebo splnitelná.

Na použití různých variant rezoluční metody jsou založeny některé systémy pro automatické dokazování a také logický programovací jazyk Prolog.

Rezoluční metoda

- Pracuje s formulemi v KNF.
- Vytváří důkaz toho, že daný závěr plyne z předpokladů.
- Jedná se o důkaz sporem — postupně generuje formule, které vyplývají z předpokladů

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \neg\psi$$

- Výpočet může skončit dvěma různými způsoby:
  - Podaří se najít spor, tj. podaří se odvodit formuli $\bot$ — pak platí, že závěr ψ logicky vyplývá z předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.
  - Nepodaří se odvodit $\bot$ a žádné další nové formule se nedají přidat — pak závěr ψ z daných předpokladů nevyplývá.

Rezoluční metoda

- Rezoluční metoda pracuje s formulemi, které mají podobu elementárních disjukcí, např.

$$(\neg p \vee q \vee \neg s \vee \neg t)$$

  Těmto formulím se říká **klauzule**.

- Speciálním případem klauzule je **prázdná klauzule** $\perp$, která představuje nalezený spor.

- Algorimus začne svou činnost tím, že formule

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \neg\psi$$

  převede do KNF a vezme všechny klazule z takto vytvořených formulí jako počáteční množinu předpokladů

$$\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m.$$

Rezoluční metoda

Při generování dalších klauzulí ke dříve přidaným klauzulím se používá tzv. **rezoluční pravidlo** (či **rezoluční princip**):

Pro libovolné formule φ, ψ a χ platí

$$\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vee \chi \models \psi \vee \chi$$

V rezoluční metodě se tento princip používá jen pro klauzule.
V případě rezoluční metody jsou $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi \vee \chi$ a $\psi \vee \chi$ vždy klauzule a φ je navíc atomický výrok.

Příklad: Z klauzulí

$$p \vee \neg q \vee r \vee s \qquad \text{a} \qquad \neg r \vee t \vee \neg u$$

je možno vyvodit pomocí rezolučního pravidla klauzuli $p \vee \neg q \vee s \vee t \vee \neg u$.

Rezoluční metoda

Poznámky:

- Pořadí literálů v klauzulích není podstatné.
- Vícenásobné výskyty stejných literálů v téže klauzuli je možno odstranit.
- Pokud je nově vygenerovaná klauzule stejná, jako nějaká dříve přidaná klauzule (a liší se nanejvýš pořadím literálů), nemá smysl ji přidávat.
- Klauzule, které obsahují zároveň literály p a $\neg p$ jsou ekvivalentní $\top$ a je možné je odstranit.
- Klauzule je možno používat pro aplikaci rezolučního pravidla opakovaně (s jinými klauzulemi).

Rezoluční metoda

Speciální případy použití rezolučního pravidla:

- Jedna z klauzulí obsahuje jen jeden literál a druhá více než jeden literál:

  Z klauzulí

  $$\neg q \qquad\qquad p \vee q \vee \neg t$$

  je možno vyvodit klauzuli $p \vee \neg t$.

- Obě klauzule obsahují jeden literál:

  Z klauzulí

  $$p \qquad\qquad \neg p$$

  je možno vyvodit prázdnou klauzuli $\perp$, tj. spor.

Rezoluční metoda

Chceme ověřit platnost následujícího úsudku:

- *Není pravda, že Jana je ve škole a Petr není doma.*
- *Jana není ve škole nebo je všední den nebo prší.*
- *Jestliže je všední den, pak Petr není doma.*

- *Jestliže je Jana ve škole, pak prší.*

Jednotlivá tvrzení nejprve zformalizujeme pomocí formulí výrokové logiky:

$$\begin{array}{l} \neg(j \wedge \neg p) \\ \neg j \vee d \vee r \\ d \rightarrow \neg p \\ \hline j \rightarrow r \end{array}$$

j – Jana je škole
p – Petr je doma
d – je všední den
r – prší

Rezoluční metoda

$$\frac{\begin{array}{l}\neg(j \wedge \neg p)\\ \neg j \vee d \vee r\\ d \rightarrow \neg p\end{array}}{j \rightarrow r}$$

Jednotlivé předpoklady převedeme do KNF:

- $\neg(j \wedge \neg p) \;\Leftrightarrow\; \neg j \vee p$
- $\neg j \vee d \vee r$
- $d \rightarrow \neg p \;\Leftrightarrow\; \neg d \vee \neg p$

Závěr znegujeme a převedeme do KNF:

- $\neg(j \rightarrow r) \;\Leftrightarrow\; j \wedge \neg r$

Sepíšeme si jednotlivé klauzule:

1.	$\neg j \vee p$	– předpoklad 1
2.	$\neg j \vee d \vee r$	– předpoklad 2
3.	$\neg d \vee \neg p$	– přespoklad 3
4.	j	– 1. klauzule z negovaného závěru
5.	$\neg r$	– 2. klauzule z negovaného závěru

Sepíšeme si jednotlivé klauzule:

1.	$\neg j \vee p$	– předpoklad 1
2.	$\neg j \vee d \vee r$	– předpoklad 2
3.	$\neg d \vee \neg p$	– přespoklad 3
4.	j	– 1. klauzule z negovaného závěru
5.	$\neg r$	– 2. klauzule z negovaného závěru
6.	p	– rezoluce: 1,4

Rezoluční metoda

Sepíšeme si jednotlivé klauzule:

1.	$\neg j \vee p$	– předpoklad 1
2.	$\neg j \vee d \vee r$	– předpoklad 2
3.	$\neg d \vee \neg p$	– přespoklad 3
4.	j	– 1. klauzule z negovaného závěru
5.	$\neg r$	– 2. klauzule z negovaného závěru
6.	p	– rezoluce: 1,4
7.	$d \vee r$	– rezoluce: 2,4

Rezoluční metoda

Sepíšeme si jednotlivé klauzule:

1.	$\neg j \vee p$	– předpoklad 1
2.	$\neg j \vee d \vee r$	– předpoklad 2
3.	$\neg d \vee \neg p$	– přespoklad 3
4.	j	– 1. klauzule z negovaného závěru
5.	$\neg r$	– 2. klauzule z negovaného závěru
6.	p	– rezoluce: 1,4
7.	$d \vee r$	– rezoluce: 2,4
8.	$\neg d$	– rezoluce: 3,6

Rezoluční metoda

Sepíšeme si jednotlivé klauzule:

1.	$\neg j \vee p$	– předpoklad 1
2.	$\neg j \vee d \vee r$	– předpoklad 2
3.	$\neg d \vee \neg p$	– přespoklad 3
4.	j	– 1. klauzule z negovaného závěru
5.	$\neg r$	– 2. klauzule z negovaného závěru
6.	p	– rezoluce: 1,4
7.	$d \vee r$	– rezoluce: 2,4
8.	$\neg d$	– rezoluce: 3,6
9.	r	– rezoluce: 7,8

Sepíšeme si jednotlivé klauzule:

1.	$\neg j \vee p$	– předpoklad 1
2.	$\neg j \vee d \vee r$	– předpoklad 2
3.	$\neg d \vee \neg p$	– přespoklad 3
4.	j	– 1. klauzule z negovaného závěru
5.	$\neg r$	– 2. klauzule z negovaného závěru
6.	p	– rezoluce: 1,4
7.	$d \vee r$	– rezoluce: 2,4
8.	$\neg d$	– rezoluce: 3,6
9.	r	– rezoluce: 7,8
10.	$\perp$	– rezoluce: 5,9

Byl odvozen spor, takže závěr skutečně z daných předpokladů vyplývá.

Rezoluční metoda

Poznámky:

- Na rezoluční metodu se lze dívat jako na vytváření jediné „obří“ formule v KNF, která je ekvivalentní formuli
$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi,$$
a která vzniká postupným přidáváním jednotlivých klauzulí.

- Pokud se nepodaří vygenerovat spor, lze odvozené klauzule použít k nalezení příkladu pravdivostního ohodnocení v, při kterém platí předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ a neplatí závěr ψ.

Rezoluční metoda

- Lze postupovat i přímou metodou, kdy se začne jen z předpokladů

  $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

  a snažíme se postupně vygenerovat všechny klauzule závěru ψ.

  Tento postup však nezaručuje, že se tyto klauzule podaří vygenerovat ve všech případech, kdy závěr ψ logicky vyplývá z předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

  Příklad: Klauzuli $p \vee q$ tímto způsobem nelze vygenerovat z předpokladu p, i když platí

  $$p \models p \vee q.$$