Příjmení a jméno: Datum:
Login studenta:

Zkoušková písemka z předmětu „Úvod do teoretické informatiky“ (ukázková písemka)

Doba trvání: **90 minut** Max. zisk: **78 bodů**

Část 1: Logika

Příklad [1] (5 bodů): Následující tvrzení zapište pomocí formule predikátové logiky. Uveďte přehled všech predikátových, funkčních a konstantních symbolů, které ve formuli používáte, spolu s (neformálním) popisem toho, co každý jednotlivý symbol reprezentuje. U predikátových a funkčních symbolů uveďte jejich aritu.

Existují taková dvě přirozená čísla, která nejsou sudá, a jejichž součet je sudý.

Příklad [2] (7 bodů): Předpokládejme, že P je unární predikátový symbol, Q a R jsou binární predikátové symboly, f je unární funkční symbol, g je binární funkční symbol a c je konstantní symbol.

Vezměme si interpretaci $\mathcal{A}$, kde universem je množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$, kde predikátovým symbolům P, Q a R jsou přiřazeny níže uvedené relace $P^{\mathcal{A}}$, $Q^{\mathcal{A}}$ a $R^{\mathcal{A}}$, funkčním symbolům f a g níže uvedené funkce $f^{\mathcal{A}}$ a $g^{\mathcal{A}}$ a konstatnímu symbolu c níže uvedený prvek $c^{\mathcal{A}}$.

Dále si vezměme níže uvedenou valuaci ν, která přiřazuje hodnoty proměnným x, y, z.

Pro každou z posloupností symbolů v nejlevějším sloupci tabulky uveďte do příslušného řádku odpovědi na následující otázky (přičemž berte v úvahu výše uvedené arity funkčních a predikátových symbolů a používejte běžné konvence o vypouštění závorek):

(a) Jedná se o dobře utvořený term? (`A/N`)
(b) Jedná se o dobře utvořenou formuli predikátové logiky? (`A/N`)
(c) Jakou má tento term nebo formule hodnotu v interpretaci $\mathcal{A}$ při valuaci ν? (Na tuto otázku odpovídejte jen tehdy, pokud jste ve sloupci (a) nebo (b) odpověděli “`A`”. U formule uveďte její pravivostní hodnotu, u termu prvek universa.)

Universum: $\mathbb{Q}$

$P^{\mathcal{A}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid |x| = 1\}$
$Q^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid x = y\}$
$R^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid x < y\}$
$f^{\mathcal{A}}(x) = 2x + 1$
$g^{\mathcal{A}}(x, y) = x \cdot y$
$c^{\mathcal{A}} = 1$

$\nu(x) = -2$, $\nu(y) = 3/5$, $\nu(z) = 0$

	(a)	(b)	(c)
$R(z, g(y, y)) \rightarrow \neg P(c)$			
$f(f(g(g(c, z), g(x, y))))$			
$\forall x \forall x (R(x, x))$			
$\forall y (\exists x (f(P(x))) \wedge g(y, y))$			
$\exists x (Q(g(f(c), x), c))$			

Příklad [3] (8 bodů): Pomocí rezoluční metody zjistěte, zda následující závěr logicky vyplývá z uvedených předpokladů. (Předpoklady i závěr formalizujte pomocí formulí výrokové logiky.)

Jestliže budeme psát test, pak bude narušen poklidný den.
Máme hodně práce nebo poklidný den nebude narušen.
Budeme psát test nebo není pravda, že pokud jsme soustředění, pak máme hodně práce.

Jestliže nemáme hodně práce, pak jsme soustředění.

Příklad [4] (6 bodů): Určete všechny modely následující formule výrokové logiky a napište ekvivalentní formuli v konjunktivní normální formě (KNF).

$$(\neg p \wedge q) \rightarrow ((\neg q \wedge \neg r) \vee p)$$

Část 2: Jazyky a automaty

Příklad [5] (10 bodů): Ke každé z následujících bezkontextových gramatik a každému z následujících regulárních výrazů přiřaďte jazyky (z níže uvedeného seznamu jazyků). Řešení pište do připravené tabulky, kde ke každé gramatice a každému výrazu napište písmena všech odpovídajících jazyků, popřípadě buňku tabulky proškrtněte, pokud gramatice neodpovídá žádný jazyk.

(1) b^*a^*ab

(2) $(b^*a^*b^*)^*ab$

(3) $(a+b)^*ab(a+b)^*$

(4) $$\begin{aligned} S &\longrightarrow Aab \\ A &\longrightarrow bAa \mid \varepsilon \end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned} S &\longrightarrow bS \mid A \\ A &\longrightarrow aA \mid ab \end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned} S &\longrightarrow AaAbA \mid B \\ A &\longrightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon \\ B &\longrightarrow AbAaA \end{aligned}$$

(A) $\{b^i a^i ab \mid i \geq 0\}$

(B) $\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ končí sufixem $ab\}$

(C) $\{b^i a^j ab \mid i,j \geq 0\}$

(D) $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a > 0, |w|_b > 0\}$

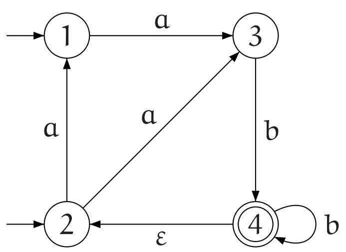
Řešení:

Gramatika / Reg. výraz	Jazyky
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	

Příklad [6] (9 bodů): Zkonstruujte regulární výraz popisující následující jazyk L.

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_1 \geq 3 \text{ nebo } w \text{ obsahuje podslova } 101 \text{ a } 000\}$$

Příklad [7] (7 bodů): Vypište všechna slova délky právě 5, která přijímá následující nedeterministický konečný automat.



Část 3: Vyčíslitelnost a složitost

Příklad [8] (8 bodů): Pro následující algoritmus určete co nejpřesněji jeho časovou složitost v nejhorším případě a vyjádřete ji pomocí asymptotické notace (nejlépe jako jeden odhad vyjářený pomocí Θ, případně jako dva odhady vyjádřené pomocí O a Ω). Jako velikost vstupu uvažujte hodnotu uloženou v proměnné n.

Odvozené výsledky **zdůvodněte**.

Poznámka: Předpokládejte, že A a B jsou vektory velikosti n, přičemž prvky těchto vektorů jsou indexovány od jedné, a že C je matice velikosti $(n+1) \times (n+1)$, jejíž řádky i sloupce jsou indexovány od nuly.

```
COMPUTE (A, B, n):
begin
    for i := 0 to n do
        c[i][0] := 0
        c[0][i] := 0
    end
    for i := 1 to n do
        for j := 1 to n do
            if A[i] = B[j] then
                C[i][j] := C[i − 1][j − 1] + 1
            else if C[i − 1][j] ≥ C[i][j − 1] then
                C[i][j] := C[i − 1][j] + 1
            else
                C[i][j] := C[i][j − 1] + 1
            end
        end
    end
    return C[n][n]
end
```

Příklad [9] (3 body): V následující tabulce vyznačte, které ze vztahů typu $f \in O(g)$, $f \in \Omega(g)$ a $f \in \Theta(g)$ platí, a které ne.

Vztahy, které platí, **zakroužkujte**, a vztahy, které neplatí, **přeškrtněte**.

$f_1(n) = 18n^3 \qquad f_2(n) = 2^n \qquad f_3(n) = 3n^3 \log_2 n$

$f_1 \in O(f_2)$	$f_2 \in O(f_1)$	$f_1 \in O(f_3)$	$f_3 \in O(f_1)$	$f_2 \in O(f_3)$	$f_3 \in O(f_2)$
$f_1 \in \Omega(f_2)$	$f_2 \in \Omega(f_1)$	$f_1 \in \Omega(f_3)$	$f_3 \in \Omega(f_1)$	$f_2 \in \Omega(f_3)$	$f_3 \in \Omega(f_2)$
$f_1 \in \Theta(f_2)$	$f_2 \in \Theta(f_1)$	$f_1 \in \Theta(f_3)$	$f_3 \in \Theta(f_1)$	$f_2 \in \Theta(f_3)$	$f_3 \in \Theta(f_2)$

Příklad [10] (7 bodů): Pro následující algoritmus proveďte následující:

- Nakreslete graf jeho řídícího toku.
- Vypište posloupnost konfigurací, kterými tento algoritmus projde, pokud dostane jako vstup číslo 4. Kolik kroků při tomto výpočtu algoritmus provede a jaký bude jeho výstup?

```
Comp (n):
begin
    a := 0
    b := 1
    for i := 1 to n − 1 do
        c := a + b
        a := b
        b := c
    end
    return b
end
```

Příklad [11] (8 bodů): Navrhněte a podrobně popište (nejlépe pomocí pseudokódu) algoritmus řešící následující problém. V případech, kdy není očividné, že vámi navržený algoritmus skutečně řeší daný problém, uveďte nějaké alespoň neformální zdůvodnění korektnosti tohoto algoritmu.

VSTUP: Přirozené číslo n.

VÝSTUP: Počet jedniček v binárním zápise čísla n.

Například pro vstup 43 bude výstupem číslo 4, protože binárně se číslo 43 zapíše jako 101011 a tato posloupnost obsahuje čtyři jedničky.