Cvičení 7

Příklad 1: Slovně (neformálně) vysvětlete, proč platí následující:

a) $\exists x \forall y R(x, y) \models \forall y \exists x R(x, y)$.

b) $\forall x(P(x) \land Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$

c) $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \Leftrightarrow \exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$

Příklad 2: Pomocí ekvivalentních úprav ukažte, že platí následující ekvivalence:

a) $\neg \forall x(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \exists x(P(x) \land \neg Q(x))$
b) $\neg \exists x(P(x) \land Q(x)) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \to \neg Q(x))$
c) $\forall x(P(x) \to (Q(x) \land R(x))) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \to Q(x)) \land \forall x(P(x) \to R(x))$
d) $\exists x(P(x) \land (Q(x) \lor R(x))) \Leftrightarrow \exists x(P(x) \land Q(x)) \lor \exists x(P(x) \land R(x))$

Příklad 3: Pro každou z následujících dvojic formulí ukažte, že tyto formule nejsou ekvivalentní — uveďte příklad interpretace a valuace, kde jedna z formulí platí a druhá ne.

a) $\exists x P(x, y)$ není ekvivalentní $\exists y P(y, y)$
b) $\forall x P(x, y)$ není ekvivalentní $\forall y P(y, y)$
c) $\forall x \forall y P(x, y)$ není ekvivalentní $\forall y \forall y P(y, y)$

Příklad 4: Připomeňme, že symbol "=" označuje rovnost (identitu). Vysvětlete v přirozené řeči, co říká následující formule:

$$\exists x \exists y(\neg(x = y) \land \forall z(z = x \lor z = y))$$

Jak vypadají modely této formule?

Příklad 5: Řekněme, že P je unární predikát. Pomocí formulí predikátové logiky vyjádřete následující tvrzení (můžete využít symbol "="):

a) Existují alespoň tři prvky s vlastností P (tj. pro alespoň tři různé prvky x platí $P(x)$).
b) Existují nejvýše dva prvky s vlastností P (tj. pro nanejvýš dva různé prvky x platí $P(x)$).

Příklad 6: Následující tvrzení formulovaná v přirozené řeči zapište formálně formulemi predikátové logiky.
Poznámky:

- Nejprve si vždy rozmyslete, jaké jednotlivé predikátové, funkční a konstatní symboly ve formuli použijete, co budou tyto symboly reprezentovat a jaké budou jejich arity.

- Jako mezikrok při vytváření výsledné formule, vytvořte nejdříve „formuli“, kde jako predikátové, funkční a konstatní symboly mohou být použity standardní matematické symboly jako třeba $>$, $+$, $\cap$, $\in$, $\subseteq$, zápis číselných konstant pomocí číslic, apod., a kde jsou použity běžné konvence, jako například infixový zápis binárních funkčních a predikátových symbolů.
- Na základě „formule“ vytvořené v předchozím kroku, vytvořte odpovídající formuli, která je vytvořena přesně podle formální definice syntaxe formulí predikátové logiky (přičemž je možné použít standardní konvence pro vynechávání závorek) a kde jsou jako predikátové, funkční a konstantní symboly použita pouze písmena latinské abecedy.

a) Pro jakékoliv přirozené číslo existuje prvočíslo větší než toto číslo.
b) Některé přirozené číslo není beze zbytku dělitelné číslem 5 ani číslem 7.
c) Pro každé reálné číslo větší než 10 platí, že po odečtení čísla 9 dostaneme kladné číslo.
d) Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.
e) Pro každé dvě množiny platí, že jsou obě podmnožinou jejich sjednocení.
f) Průnik dvou množin je podmnožinou obou těchto množin.

Příklad 7: Pro každou z následujících sekvencí symbolů rozhodněte, zda se jedná o a) term, b) formuli predikátové logiky (používejte běžné konvence pro vypouštění závorek). Pokud se jedná o formuli predikátové logiky, určete, zda je tato formule i) atomická, ii) uzavřená; pokud není formule uzavřená, určete množinu volných proměnných, které se v ní vyskytují.

U sekvencí symbolů, které jsou termem nebo formulí, nakreslete příslušný abstraktní syntaktický strom.

Berte jako dané, že:

- P, Q a R jsou predikátové symboly, přičemž P je unární a Q a R jsou binární,
- f je unární funkční symbol a g je binární funkční symbol,
- c a d jsou konstatní symboly.

1. $(\neg((\neg p) \to (\neg(\neg r))))$
2. $\forall x \in A : P$
3. $f(c)$
4. $R(c, d)$
5. $\forall x \exists y P(c)$
6. $\forall x \exists y f(R(x, y))$
7. $\forall x \exists y P(g(x, y))$
8. $\forall x \exists y f(g(x, y))$
9. $\forall x \exists y P(g(f(f(x)), c))$
10. $\forall x (P(d) \land \exists y Q(y, c))$
11. $P(d) \land \exists y Q(y, c)$
12. $P(x) \land \exists y Q(d, c)$
13. $\forall x \exists y (R(x, f(y)) \leftrightarrow \exists z Q(z, c))$
14. $\forall x P(g(x))$
15. $\forall x R(f(x))$
16. $\forall x R(f(x), f(x), f(x))$
17. $\forall x P(f(x, x))$
18. $\forall x P(g(x, x))$
19. $f(f(g(c, d)))$
20. $P(f(g(c, d)))$
21. $P(f(d)) \to \forall x P(x)$
22. $P(f(g(f, f)))$
23. $P(f(g(c, x)))$
24. $\forall x (f(x) \to g(c, x))$
25. $\forall x P(f(x) \to g(c, x))$
26. $\forall x P(\neg f(x))$
27. $\forall x \neg P(f(x))$
28. $\neg (P(f(x)) \lor Q(y, z))$

Příklad 8: Předpokládejme, že

- P a Q jsou unární predikátové symboly a R je binární predikátový symbol,
- f je binární funkční symbol a g je unární funkční symbol,
- c a d jsou konstantní symboly.

Pro každou z následujících formulí a každou z následujícících interpretací a valuací určete, zda je daná formule pravdivá v dané interpretaci a valuaci.
Formule:

1. $R(c, d)$
2. $R(c, d) \to R(c, x)$
3. $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z))$
4. $\exists x (Q(x) \wedge \forall y R(y, g(x)))$
5. $\exists x \neg P(f(x, y))$
6. $\forall x \exists y \neg R(x, g(g(y)))$

Interpretace:

a) Interpretace $\mathcal{A}$, kde univerzem je množina $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Predikátům P, Q a R jsou přiřazeny následující relace:

- $P^{\mathcal{A}} = \{\alpha, \gamma\}$
- $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$
- $R^{\mathcal{A}} = \{(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\alpha, \gamma)\}$

Funkčním symbolům f a g jsou přiřazeny funkce $f^{\mathcal{A}}$ a $g^{\mathcal{A}}$ popsané následujícími tabulkami:

$f^{\mathcal{A}}$	α	β	γ
α	β	α	γ
β	β	β	β
γ	α	γ	β

x	$g^{\mathcal{A}}(x)$
α	β
β	γ
γ	γ

Konstantním symbolům c a d jsou přiřazeny prvky α a β, tj. $c^{\mathcal{A}} = \alpha$ a $d^{\mathcal{A}} = \beta$.

Předpokládejme valuaci ν, kde $\nu(x) = \gamma$, $\nu(y) = \alpha$ a $\nu(z) = \alpha$.

b) Interpretace $\mathcal{B}$, kde univerzem je množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

- Predikátovému symbolu P je přiřazena relace $P^{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \bmod 2 = 0\}$.
- Predikátovému symbolu Q je přiřazena relace $Q^{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = y^2 \text{ pro nějaké } y \in \mathbb{N}\}$.
- Predikátovému symbolu R je přiřazena relace $R^{\mathcal{B}} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\}$.
- Funkčnímu symbolu f je přiřazena funkce $f^{\mathcal{B}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f^{\mathcal{B}}(x, y) = x + y$.
- Funkčnímu symbolu g je přiřazena funkce $g^{\mathcal{B}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $g^{\mathcal{B}}(x) = x + 1$.
- Konstantám c a d jsou přiřazeny prvky 0 a 2, tj. $c^{\mathcal{B}} = 0$ a $d^{\mathcal{B}} = 2$.

Předpokládejme valuaci ν, kde $\nu(x) = 7$, $\nu(y) = 2$, $\nu(z) = 9$.

Příklad 9: Pro každou z následujících formulí najděte nějakou interpretaci, která je jejím modelem, a nějakou interpretaci, která jejím modelem není.

1. $\forall x \big((P(x) \wedge Q(x, a)) \to R(x) \big)$

2. $\forall x \big(P(a, x) \rightarrow Q(x)\big)$
3. $\exists x \big(P(x, f(x))\big)$

Příklad 10: Zjistěte, zda daný závěr logicky vyplývá z uvedených předpokladů. Pokud nevyplývá, uveďte příklad interpretace, ve které platí předpoklady, ale neplatí závěr. Pokud vyplývá, alespoň neformálně vysvětlete, proč tomu tak je.

Poznámka: e je konstantní symbol a f je binární funkční symbol.

$$\begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z (f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))) \\ \forall x (f(x, e) = x \ \wedge \ f(e, x) = x) \\ \forall x \exists y (f(x, y) = e) \\ \hline \forall x \exists y (f(y, x) = e) \end{array}$$