Cvičení 5

Příklad 1: Zjistěte, jestli následující předpoklady jsou konzistentní nebo nekonzistentní. Vaše odpovědi zdůvodněte (v případě, že jsou předpoklady nekonzistentní, zdůvodněte to pomocí nalezení sémantického sporu, a v případě, kdy jsou konzistentní, uveďte příklad pravdivostního ohodnocení, při kterém všechny předpoklady platí).

a) Jestliže byl vrahem Jones, tak byl v bytě oběti a neodešel před jedenáctou.
Jones byl v bytě oběti.
Pokud by odešel před jedenáctou, tak by ho viděl vrátný.
Není pravda, že ho viděl vrátný nebo že by byl Jones vrahem.

b) Podmínky smlouvy budou dodrženy právě tehdy, když stavba bude dokončena ke 30. listopadu.
Stavba bude dokončena ke 30. listopadu právě tehdy, když subdodavatel dokončí práce k 10. listopadu.
Investor příjde o peníze právě tehdy, když nebudou dodrženy podmínky smlouvy.
Subdodavatel dokončí práce k 10. listopadu právě tehdy, když investor příjde o peníze.

c) $p \rightarrow q$
$q \leftrightarrow r$
$(r \vee s) \leftrightarrow \neg q$

d) $\neg(\neg q \vee p)$
$p \vee \neg r$
$q \rightarrow r$

Příklad 2: Pomocí rezoluční metody zjistěte, zda daný závěr logicky vyplývá z uvedených předpokladů.

a) Nefunguje-li program, je chyba v programu nebo není v pořádku systém.
Je-li chyba v programu, musím se poradit se cvičícím.
Systém je v pořádku.
―――
Nefunguje-li program, musím se poradit se cvičícím.

b) Má přednášku nebo se toulá po škole.
Jestliže má přednášku, pak se jedná o vzorného studenta.
―――
Jestliže se nejedná o vzorného studenta, pak se toulá po škole.

c) Není pravda, že student umí Javu a C++.
Student neumí Javu.
―――
Student neumí C++.

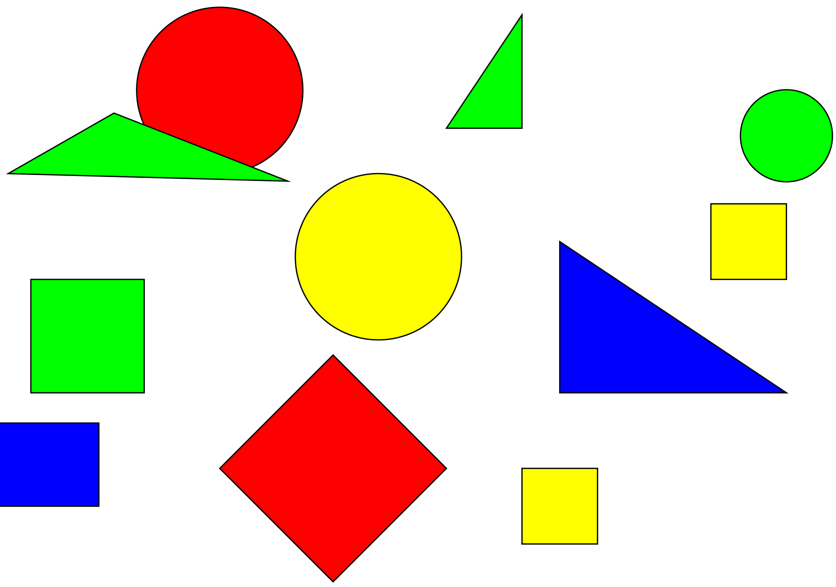
d) Jestliže se problému věnuji, tak ten problém vyřeším.
Jestliže se problému nevěnuji, pak mám na práci něco jiného.
―――
Vyřeším ten problém nebo mám na práci něco jiného.

e) Jestliže pracuji, potom vydělávám peníze, ale jestliže jsem líný, pak si užívám.
Buď pracuji nebo jsem líný.
Nicméně, jestliže jsem líný, pak nevydělávám, zatímco jestliže pracují, pak si neužívám.
Proto si užívám.

Příklad 3: Pro zadání z Příkladu 8 ze Cvičení 4 pomocí rezoluční metody určete, zda daný závěr logicky vyplývá z uvedených předpokladů.

Příklad 4: Pro zadání z Příkladu 1 z tohoto cvičení (Cvičení 5) pomocí rezoluční metody určete, zda jsou dané předpoklady konzistentní nebo nekonzistentní.

Příklad 5: Uvažujme konkrétní interpretaci, kde universem je množina geometrických objektů znázorněných na následujícím obrázku.



Objekty v tomto universu jsou rozmístěny na ploše, mají různé barvy a mohou se vzájemně překrývat.
Předpokládeme dále, že máme následující predikáty:

- Q — unární predikát reprezentující vlastnost *„být čtverec“* (tj. $\mathsf{Q}(x)$ znamená „x *je čtverec*“)
- R — unární predikát reprezentující vlastnost *„být obdelník“* (tj. $\mathsf{R}(x)$ znamená „x *je obdelník*“)
- T — unární predikát reprezentující vlastnost *„být trojúhelník“* (tj. $\mathsf{T}(x)$ znamená „x *je trojúhelník*“)
- C — unární predikát reprezentující vlastnost *„být kruh“* (tj. $\mathsf{C}(x)$ znamená „x *je kruh*“)
- U — unární predikát reprezentující vlastnost *„být pětiúhelník“* (tj. $\mathsf{U}(x)$ znamená „x *je pětiúhelník*“)

- B — unární predikát reprezentující vlastnost *„být modrý“* (tj. $\mathsf{B}(x)$ znamená „x *je modrý*“)
- G — unární predikát reprezentující vlastnost *„být zelený“* (tj. $\mathsf{G}(x)$ znamená „x *je zelený*“)
- D — unární predikát reprezentující vlastnost *„být červený“* (tj. $\mathsf{D}(x)$ znamená „x *je červený*“)
- Y — unární predikát reprezentující vlastnost *„být žlutý“* (tj. $\mathsf{Y}(x)$ znamená „x *je žlutý*“)
- M — unární predikát reprezentující vlastnost *„být fialový“* (tj. $\mathsf{M}(x)$ znamená „x *je fialový*“)
- H — binární predikát reprezentující vztah *„zabírat větší plochu“* (tj. $\mathsf{H}(x,y)$ znamená „x *zabírá větší plochu než* y“)
- K — binární predikát reprezentující vztah *„částečně překrývá“* (tj. $\mathsf{K}(x,y)$ znamená „x *částečně překrývá* y“, resp. *„objekt* y *je částečně překryt objektem* x“)

Pro každou z následujících formulí proveďte následující:

- Zformulujte v přirozené řeči tvrzení vyjádřené příslušnou formulí.
- Určete, zda je dané tvrzení pravdivé v případě výše uvedené interpretace.

  V některých případech závisí pravdivost tvrzení na konkrétní valuaci, tj. na konkrétních hodnotách přiřazených proměnným. V takovém případě si zvolte nějaké konkrétní přiřazení hodnot proměnným sami a vyhodnoťte pravdivost při této vámi zvolené valuaci.

  Pokud je to možné, snažte se najít příklad valuace, kdy formule platí, a příklad valuace, kdy formule neplatí.

1. $\mathsf{Q}(x)$
2. $\forall x \mathsf{Q}(x)$
3. $\exists x \mathsf{Q}(x)$
4. $\mathsf{D}(x) \rightarrow \mathsf{C}(x)$
5. $\exists x(\mathsf{G}(x) \wedge \mathsf{T}(x))$
6. $\forall x(\mathsf{C}(x) \rightarrow \mathsf{Y}(x))$
7. $\exists x(\mathsf{U}(x) \vee \mathsf{M}(x))$
8. $\forall x(\mathsf{D}(x) \rightarrow \neg\mathsf{Q}(x) \wedge \neg\mathsf{R}(x))$
9. $\forall x(\mathsf{R}(x) \rightarrow \mathsf{Q}(x))$
10. $\forall x(\mathsf{Q}(x) \rightarrow \mathsf{R}(x))$
11. $\exists x(\mathsf{G}(x) \wedge \mathsf{C}(x)) \wedge \forall y(\mathsf{R}(y) \vee \neg\mathsf{B}(y)) \rightarrow \exists z(\mathsf{G}(z) \wedge \mathsf{T}(z))$
12. $\exists x \exists y \mathsf{H}(x,y)$
13. $\forall x \forall y(\mathsf{H}(x,y) \vee \mathsf{H}(y,x))$
14. $\exists x \forall y \mathsf{H}(y,x)$
15. $\forall x \exists y \mathsf{K}(x,y)$
16. $\forall x((\exists y \exists z(\mathsf{K}(y,x) \wedge \mathsf{K}(z,x) \wedge \mathsf{H}(y,z)) \rightarrow \exists y \mathsf{H}(x,y))$
17. $\forall x(\mathsf{Q}(x) \rightarrow \mathsf{H}(x,y))$
18. $\mathsf{Q}(x) \wedge \exists x \mathsf{T}(x)$

Příklad 6: Vezměme si stejné predikáty, jaké byly zavedeny v předchozím cvičení.

Zapište následující tvrzení jako formule predikátové logiky:

a) Existuje modrý čtverec.
b) Každý kruh je modrý, zelený nebo žlutý.
c) Ke každému modrému objektu existuje žlutý objekt, který zabírá větší plochu.
d) Existuje objekt, který částečně překrývá objekt x.
e) Pro každé dva objekty x a y platí, že x částečně překrývá y nebo y částečně překrývá x.
f) Neexistuje objekt, který by částečně překrýval sám sebe.
g) Jestliže je nějaký objekt fialový, tak jsou všechny objekty červené.
h) Pro každý čtverec platí, že pokud není zelený, tak není částečně překrýván žádným objektem.
i) Pokud x částečně překrývá y, tak existuje z takové, že z částečně překrývá y a x částečně překrývá z.
j) Ne všechny trojúhelníky jsou fialové.

Příklad 7: Vezměme si následující predikáty:

- M — unární predikát reprezentující vlastnost *„být muž“*
- W — unární predikát reprezentující vlastnost *„být žena“*
- P — binární predikát reprezentující vztah *„být rodičem“* (tj. $P(x, y)$ znamená *„x je rodičem y“*)
- Q — binární predikát reprezentující vztah *„být sourozencem“* (tj. $Q(x, y)$ znamená *„x je sourozencem y“*)
- R — binární predikát reprezentující vztah *„mít rád“* (tj. $R(x, y)$ znamená *„x má rád y“*)

Zapište formulemi predikátové logiky následující tvrzení:

a) Jestliže je x rodičem y, tak x má rád y.
b) Pro každou ženu x a každé y takové, že x je rodičem y, existuje muž, který je rodičem y.
c) Jestliže x a y jsou sourozenci, tak mají alespoň jednoho společného rodiče.
d) Existuje žena, která nemá žádné sourozence.
e) Každý má někoho rád.
f) Neexistuje nikdo, kdo by měl rád všechny.

Příklad 8: Uvažujme stejné predikáty, jaké byly zavedeny v předchozím cvičení.

Pomocí formulí predikátové logiky vyjádřete následující příbuzenské vztahy, přičemž ale použijte jen výše uvedené predikáty (tj. nezavádějte žádné další nové predikáty). Formule by měly co nepřesněji vyjadřovat, co se danými pojmy myslí v běžné řeči (např. *„x je matkou y“* znamená, že x je rodičem y a x je žena).

a) x je matkou y
b) x je otcem y
c) x je synem y
d) x je sestrou y
e) x je babičkou y
f) x je strýcem y

g) x je setřenicí y

h) x je synovcem y