

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Chtěli bychom popsat jazyk aritmetických výrazů obsahující výrazy jako například:

$$175 \quad (9+15) \quad (((10-4)*((1+34)+2))/(3+(-37)))$$

Pro jednoduchost předpokládejme:

- Výrazy jsou plně uzávorkované.
- Jediné aritmetické operace jsou “+”, “-”, “*”, “/” a unární “-”.
- Hodnoty operandů jsou přirozená čísla zapsaná v desítkové soustavě — zápis čísla je neprázdná posloupnost číslic.

Abeceda jazyka: $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, -, *, /, (,)\}$

Příklad (pokr.): Popis pomocí induktivní definice:

- **Číslice** je libovolný ze znaků 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- **Číslo** je neprázdná posloupnost číslic, tj.:
 - Pokud je α číslice, tak α je číslo.
 - Pokud α je číslice a β je číslo, tak i $\alpha\beta$ je číslo.
- **Výraz** je libovolná posloupnost symbolů vytvořená podle následujících pravidel:
 - Pokud je α číslo, tak α je výraz.
 - Pokud α je výraz, tak i $(-\alpha)$ je výraz.
 - Pokud α a β jsou výrazy, tak i $(\alpha+\beta)$ je výraz.
 - Pokud α a β jsou výrazy, tak i $(\alpha-\beta)$ je výraz.
 - Pokud α a β jsou výrazy, tak i $(\alpha*\beta)$ je výraz.
 - Pokud α a β jsou výrazy, tak i (α/β) je výraz.

Příklad (pokr.): Způsob zápisu téže informace jako v předchozí induktivní definici pomocí **bezkontextové gramatiky**:

Zavedeme následující pomocné symboly — těmto symbolům se říká **neterminály**:

- D — zastupuje libovolnou číslici
- C — zastupuje libovolné číslo
- E — zastupuje libovolný výraz

$$D \rightarrow 0$$

$$D \rightarrow 1$$

$$D \rightarrow 2$$

$$D \rightarrow 3$$

$$D \rightarrow 4$$

$$D \rightarrow 5$$

$$D \rightarrow 6$$

$$D \rightarrow 7$$

$$D \rightarrow 8$$

$$D \rightarrow 9$$

$$C \rightarrow D$$

$$C \rightarrow DC$$

$$E \rightarrow C$$

$$E \rightarrow (-E)$$

$$E \rightarrow (E+E)$$

$$E \rightarrow (E-E)$$

$$E \rightarrow (E * E)$$

$$E \rightarrow (E / E)$$

Příklad (pokr.): Stručnější způsob zápisu:

$$D \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$$

$$C \rightarrow D \mid DC$$

$$E \rightarrow C \mid (-E) \mid (E+E) \mid (E-E) \mid (E * E) \mid (E/E)$$

Příklad: Jazyk, kde slova jsou (případně i prázdné) posloupnosti výrazů popsaných v předchozím příkladě, kde jednotlivé výrazy jsou odděleny čárkami (abecedu je třeba rozšířit o symbol “,”):

$$S \rightarrow T \mid \varepsilon$$

$$T \rightarrow E \mid E, T$$

$$D \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$$

$$C \rightarrow D \mid DC$$

$$E \rightarrow C \mid (-E) \mid (E+E) \mid (E-E) \mid (E * E) \mid (E/E)$$

Příklad: Příkazy nějakého programovacího jazyka (fragment gramatiky):

$$\begin{aligned} S &\rightarrow E; \mid T \mid \text{if } (E) S \mid \text{if } (E) S \text{ else } S \\ &\quad \mid \text{while } (E) S \mid \text{do } S \text{ while } (E); \mid \text{for } (F; F; F) S \\ &\quad \mid \text{return } F; \\ T &\rightarrow \{ U \} \\ U &\rightarrow \varepsilon \mid SU \\ F &\rightarrow \varepsilon \mid E \\ E &\rightarrow \dots \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

Poznámka:

- S — příkaz
- T — blok příkazů
- U — sekvence příkazů
- E — výraz
- F — výraz, který je možno vynechat

Formálně je **bezkontextová gramatika** definována jako čtveřice

$$G = (\Pi, \Sigma, S, P)$$

kde:

- Π je konečná množina **neterminálních symbolů (neterminálů)**
- Σ je konečná množina **terminálních symbolů (terminálů)**,
přičemž $\Pi \cap \Sigma = \emptyset$
- $S \in \Pi$ je **počáteční neterminál**
- $P \subseteq \Pi \times (\Pi \cup \Sigma)^*$ je konečná množina **přepisovacích pravidel**

Poznámky:

- Pro označení neterminálních symbolů budeme používat velká písmena A, B, C, \dots
- Pro označení terminálních symbolů budeme používat malá písmena a, b, c, \dots nebo číslice $0, 1, 2, \dots$
- Pro označení řetězců z $(\Pi \cup \Sigma)^*$ budeme používat malá písmena řecké abecedy $\alpha, \beta, \gamma, \dots$
- Místo zápisu (A, α) budeme pro pravidla používat zápis

$$A \rightarrow \alpha$$

A – levá strana pravidla

α – pravá strana pravidla

Příklad: Gramatika $G = (\Pi, \Sigma, S, P)$, kde

- $\Pi = \{A, B, C\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $S = A$
- P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb$$

$$A \rightarrow AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon$$

$$B \rightarrow bCA$$

$$C \rightarrow AB$$

$$C \rightarrow a$$

$$C \rightarrow b$$

Poznámka: Pokud máme více pravidel se stejnou levou stranou, jako třeba

$$A \rightarrow \alpha_1 \qquad A \rightarrow \alpha_2 \qquad A \rightarrow \alpha_3$$

můžeme je stručněji zapsat jako

$$A \rightarrow \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \alpha_3$$

Například pravidla dříve uvedené gramatiky můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\ B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\ C &\rightarrow AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

A

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\underline{A} \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

A

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\underline{A} \rightarrow \underline{aBBb} \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$\underline{A} \Rightarrow \underline{aBBb}$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$\underline{B} \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow a\underline{B}Bb$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$\underline{B} \rightarrow \varepsilon \mid \underline{bCA}$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow a\underline{B}Bb \Rightarrow a\underline{bCA}Bb$$

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abC\underline{A}Bb$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abC\underline{A}Bb \Rightarrow abC\underline{a}BBbBb$$

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaB\underline{B}bBb$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$\underline{B} \rightarrow \underline{\varepsilon} \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaB\underline{B}bBb \Rightarrow abCaBbBb$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb$$

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$\underline{C} \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow ab\underline{C}aBbBb$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$\underline{C} \rightarrow AB \mid a \mid \underline{b}$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow ab\underline{C}aBbBb \Rightarrow ab\underline{b}aBbBb$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$\underline{B} \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBb\underline{B}b$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$\underline{B} \rightarrow \underline{\varepsilon} \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBb\underline{B}b \Rightarrow abbaBbb$$

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abbaBbb$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$\underline{B} \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abba\underline{B}bb$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$\underline{B} \rightarrow \underline{\varepsilon} \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abba\underline{B}bb \Rightarrow abbabb$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$

$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abbaBbb \Rightarrow abbabb$$

Na řetězcích z $(\Pi \cup \Sigma)^*$ definujeme relaci $\Rightarrow \subseteq (\Pi \cup \Sigma)^* \times (\Pi \cup \Sigma)^*$ takovou, že

$$\alpha \Rightarrow \alpha'$$

právě když $\alpha = \beta_1 A \beta_2$ a $\alpha' = \beta_1 \gamma \beta_2$ pro nějaká $\beta_1, \beta_2, \gamma \in (\Pi \cup \Sigma)^*$ a $A \in \Pi$, kde $(A \rightarrow \gamma) \in P$.

Příklad: Jestliže $(B \rightarrow bCA) \in P$, pak

$$aCBbA \Rightarrow aCbCAbA$$

Poznámka: Neformálně řečeno zápis $\alpha \Rightarrow \alpha'$ znamená, že z α je možné jedním krokem odvodit α' , a to tak, že výskyt nějakého neterminálu A v α nahradíme pravou stranou nějakého pravidla $A \rightarrow \gamma$, kde se A vyskytuje na levé straně.

Bezkontextové gramatiky

Na řetězcích z $(\Pi \cup \Sigma)^*$ definujeme relaci $\Rightarrow \subseteq (\Pi \cup \Sigma)^* \times (\Pi \cup \Sigma)^*$ takovou, že

$$\alpha \Rightarrow \alpha'$$

právě když $\alpha = \beta_1 A \beta_2$ a $\alpha' = \beta_1 \gamma \beta_2$ pro nějaká $\beta_1, \beta_2, \gamma \in (\Pi \cup \Sigma)^*$ a $A \in \Pi$, kde $(A \rightarrow \gamma) \in P$.

Příklad: Jestliže $(B \rightarrow bCA) \in P$, pak

$$aC\underline{B}bA \Rightarrow aC\underline{bCA}bA$$

Poznámka: Neformálně řečeno zápis $\alpha \Rightarrow \alpha'$ znamená, že z α je možné jedním krokem odvodit α' , a to tak, že výskyt nějakého neterminálu A v α nahradíme pravou stranou nějakého pravidla $A \rightarrow \gamma$, kde se A vyskytuje na levé straně.

Derivace délky n je posloupnost $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, kde $\beta_i \in (\Pi \cup \Sigma)^*$ a kde $\beta_{i-1} \Rightarrow \beta_i$ pro všechna $1 \leq i \leq n$, což můžeme stručněji zapsat

$$\beta_0 \Rightarrow \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \beta_{n-1} \Rightarrow \beta_n$$

Skutečnost, že pro dané $\alpha, \alpha' \in (\Pi \cup \Sigma)^*$ a $n \in \mathbb{N}$ existuje nějaká derivace $\beta_0 \Rightarrow \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \beta_{n-1} \Rightarrow \beta_n$, kde $\alpha = \beta_0$ a $\alpha' = \beta_n$, zapisujeme

$$\alpha \Rightarrow^n \alpha'$$

Skutečnost, že $\alpha \Rightarrow^n \alpha'$ pro nějaké $n \geq 0$, zapisujeme

$$\alpha \Rightarrow^* \alpha'$$

Poznámka: Relace \Rightarrow^* je reflexivním a tranzitivním uzávěrem relace \Rightarrow (tj. nejmenší reflexivní a tranzitivní relací obsahující relaci \Rightarrow).

Větné formy jsou ty $\alpha \in (\Pi \cup \Sigma)^*$, pro které platí

$$S \Rightarrow^* \alpha$$

kde S je počáteční neterminál.

Jazyk $L(G)$ generovaný gramatikou $G = (\Pi, \Sigma, S, P)$ je množina všech slov v abecedě Σ , která lze odvodit nějakou derivací z počátečního neterminálu S pomocí pravidel z P , tj.

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\}$$

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Gramatika $G = (\Pi, \Sigma, S, P)$, kde $\Pi = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje

$$S \rightarrow aSb \mid \varepsilon$$

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Gramatika $G = (\Pi, \Sigma, S, P)$, kde $\Pi = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje

$$S \rightarrow aSb \mid \varepsilon$$

$$S \Rightarrow \varepsilon$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow ab$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaabbb$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaaaSbbbb \Rightarrow aaaabbbb$$

...

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk tvořený všemi palindromy nad abecedou $\{a, b\}$, tj.

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$$

Poznámka: w^R označuje tzv. **zrcadlový obraz** slova w , tj. slovo w zapsané pozpátku.

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk tvořený všemi palindromy nad abecedou $\{a, b\}$, tj.

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$$

Poznámka: w^R označuje tzv. **zrcadlový obraz** slova w , tj. slovo w zapsané pozpátku.

Řešení:

$$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$$

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk tvořený všemi palindromy nad abecedou $\{a, b\}$, tj.

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$$

Poznámka: w^R označuje tzv. **zrcadlový obraz** slova w , tj. slovo w zapsané pozpátku.

Řešení:

$$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$$

$$S \Rightarrow aSa \Rightarrow abSba \Rightarrow abaSaba \Rightarrow abaaaba$$

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk L tvořený všemi dobře uzávorkovanými sekvencemi symbolů '(' a ')'.
Například $((()())()) \in L$, ale $)() \notin L$.

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk L tvořený všemi dobře uzávorkovanými sekvencemi symbolů '(' a ')'.
Například $((()())()) \in L$, ale $)() \notin L$.

Řešení:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid (S) \mid SS$$

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk L tvořený všemi dobře uzávorkovanými sekvencemi symbolů '(' a ')'.
Například $((()())()) \in L$, ale $)() \notin L$.

Řešení:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid (S) \mid SS$$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow (S)(S) \Rightarrow (SS)(S) \Rightarrow ((S)S)(S) \Rightarrow \\ &((()S)(S)) \Rightarrow ((()S))S \Rightarrow ((()())S) \Rightarrow ((()())((S))) \Rightarrow \\ &((()())()) \end{aligned}$$

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk L tvořený všemi dobře vytvořenými aritmetickými výrazy, kde operandy jsou vždy tvaru ' a ', a kde jako operátory můžeme používat symboly $+$ a $*$.

Například $(a + a) * a + (a * a) \in L$.

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk L tvořený všemi dobře vytvořenými aritmetickými výrazy, kde operandy jsou vždy tvaru 'a', a kde jako operátory můžeme používat symboly $+$ a $*$.

Například $(a + a) * a + (a * a) \in L$.

Řešení:

$$E \rightarrow a \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk L tvořený všemi dobře vytvořenými aritmetickými výrazy, kde operandy jsou vždy tvaru 'a', a kde jako operátory můžeme používat symboly $+$ a $*$.

Například $(a + a) * a + (a * a) \in L$.

Řešení:

$$E \rightarrow a \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$\begin{aligned} E &\Rightarrow E + E \Rightarrow E * E + E \Rightarrow (E) * E + E \Rightarrow (E + E) * E + E \Rightarrow \\ &(a + E) * E + E \Rightarrow (a + a) * E + E \Rightarrow (a + a) * a + E \Rightarrow (a + a) * a + (E) \Rightarrow \\ &(a + a) * a + (E * E) \Rightarrow (a + a) * a + (a * E) \Rightarrow (a + a) * a + (a * a) \end{aligned}$$

$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$
$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

A

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$

A

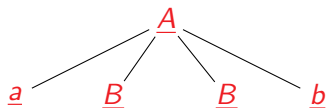
A

A $\rightarrow aBBb \mid AaA$

$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$

A

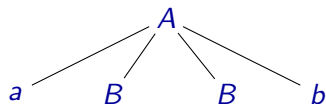


A \rightarrow aBBb | AaA

B \rightarrow ϵ | bCA

C \rightarrow AB | a | b

A \Rightarrow aBBb

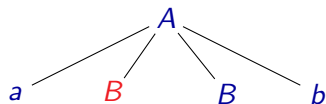


$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$

$A \Rightarrow aBBb$



$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$\underline{B} \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

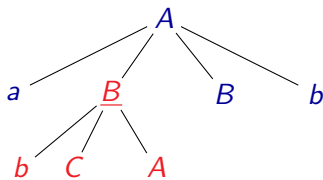
$C \rightarrow AB \mid a \mid b$

$A \Rightarrow a\underline{B}Bb$

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$B \rightarrow \varepsilon \mid \underline{bCA}$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$

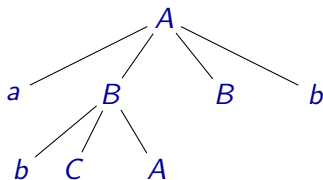


$A \Rightarrow a\underline{B}Bb \Rightarrow ab\underline{C}A\underline{B}b$

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$

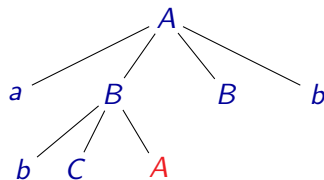


$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb$

$\underline{A} \rightarrow aBBb \mid AaA$

$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$



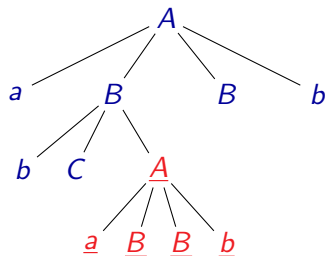
$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abC\underline{A}Bb$

Derivační strom

$\underline{A} \rightarrow \underline{aBBb} \mid AaA$

$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$

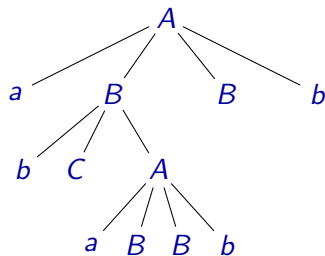


$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abC\underline{A}Bb \Rightarrow abC\underline{aBBb}Bb$

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$

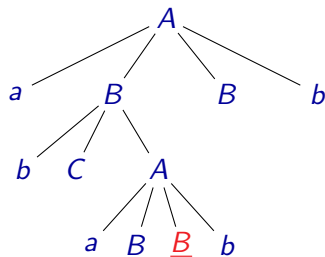


$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb$

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$\underline{B} \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$

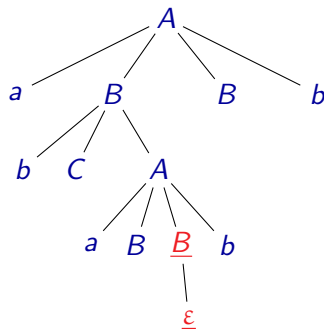


$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaB\underline{B}bBb$

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$\underline{B} \rightarrow \underline{\epsilon} \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$

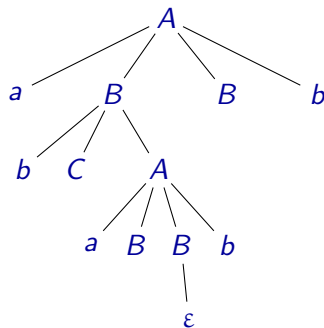


$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaB\underline{B}bBb \Rightarrow abCaBbbBb$

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$



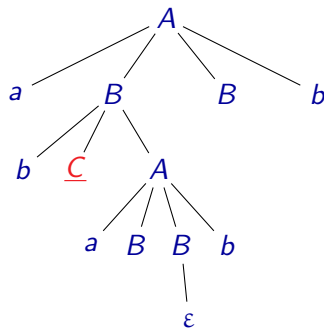
$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb$

Derivační strom

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$\underline{C} \rightarrow AB \mid a \mid b$



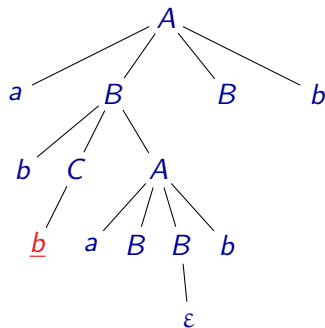
$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow ab\underline{C}aBbBb$

Derivační strom

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$\underline{C} \rightarrow AB \mid a \mid \underline{b}$



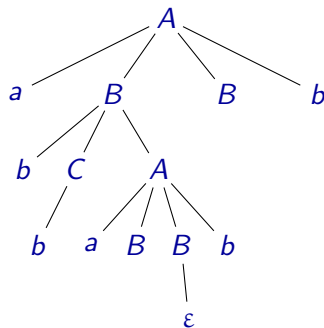
$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow ab\underline{C}aBbBb \Rightarrow ab\underline{b}aBbBb$

Derivační strom

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$



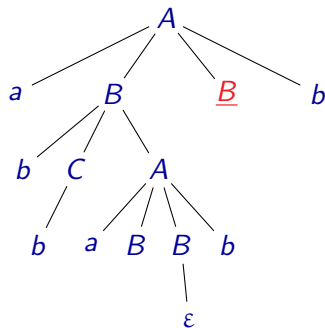
$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb$

Derivační strom

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$\underline{B} \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$



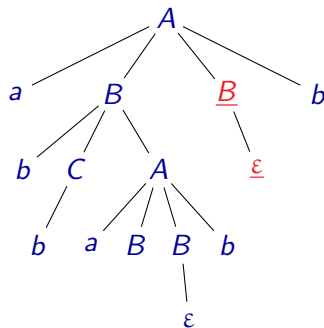
$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBb\underline{B}b$

Derivační strom

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$\underline{B} \rightarrow \underline{\epsilon} \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$



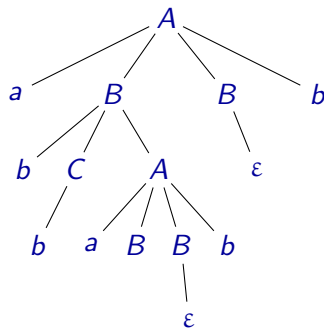
$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBb\underline{B}b \Rightarrow abbaBbb$

Derivační strom

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$



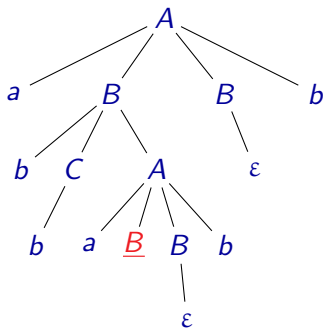
$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abbaBbb$

Derivační strom

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$\underline{B} \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$



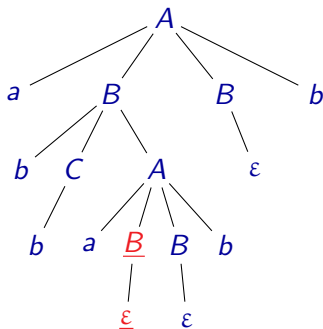
$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abba\underline{B}bb$

Derivační strom

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$\underline{B} \rightarrow \underline{\epsilon} \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$



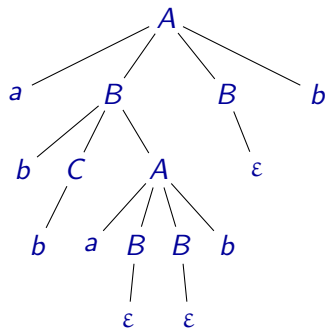
$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abba\underline{B}bb \Rightarrow abbabb$

Derivační strom

$A \rightarrow aBBb \mid AaA$

$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$

$C \rightarrow AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abbaBbb \Rightarrow abbabb$

Každé derivaci odpovídá nějaký **derivační strom**:

- Vrcholy stromu jsou ohodnoceny terminály a neterminály.
- Kořen stromu je ohodnocen počátečním neterminálem.
- Listy stromu jsou ohodnoceny terminály nebo symboly ϵ .
- Ostatní vrcholy stromu jsou ohodnoceny neterminály.
- Pokud je vrchol ohodnocen neterminálem A , pak jeho potomci jsou ohodnoceni symboly pravé strany nějakého přepisovacího pravidla $A \rightarrow \alpha$.

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid a$$

Levá derivace je derivace, ve které v každém kroku nahrazujeme vždy nejlevější neterminál.

$$\underline{E} \Rightarrow \underline{E} + E \Rightarrow \underline{E} * E + E \Rightarrow a * \underline{E} + E \Rightarrow a * a + \underline{E} \Rightarrow a * a + a$$

Pravá derivace je derivace, ve které v každém kroku nahrazujeme vždy nejpravější neterminál.

$$\underline{E} \Rightarrow E + \underline{E} \Rightarrow \underline{E} + a \Rightarrow E * \underline{E} + a \Rightarrow \underline{E} * a + a \Rightarrow a * a + a$$

Derivace však nemusí být ani levá ani pravá:

$$\underline{E} \Rightarrow \underline{E} + E \Rightarrow E * \underline{E} + E \Rightarrow E * a + \underline{E} \Rightarrow \underline{E} * a + a \Rightarrow a * a + a$$

- Jednomu derivačnímu stromu může odpovídat více různých derivací.
- Každému derivačnímu stromu odpovídá právě jedna levá a právě jedna pravá derivace.

Gramatiky G_1 a G_2 jsou **ekvivalentní**, jestliže generují tentýž jazyk, tj. jestliže $L(G_1) = L(G_2)$.

Poznámka: Problém ekvivalence bezkontextových gramatik je algoritmicky nerozhodnutelný. Dá se dokázat, že není možné vytvořit algoritmus, který by pro libovolné dvě bezkontextové gramatiky rozhodl, zda jsou ekvivalentní či ne.

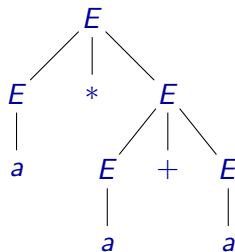
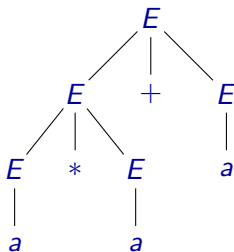
Dokonce je algoritmicky nerozhodnutelný i problém, zda gramatika generuje jazyk Σ^* .

Nejednoznačné gramatiky

Gramatika G je **nejednoznačná**, jestliže existuje nějaké slovo $w \in L(G)$, kterému přísluší dva různé derivační stromy, resp. dvě různé levé či dvě různé pravé derivace.

Příklad:

$E \Rightarrow E + E \Rightarrow E * E + E \Rightarrow a * E + E \Rightarrow a * a + E \Rightarrow a * a + a$
 $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E * E + E \Rightarrow a * E + E \Rightarrow a * a + E \Rightarrow a * a + a$



Nejednoznačné gramatiky

Někdy je možné nejednoznačnou gramatiku nahradit gramatikou, která generuje tentýž jazyk, ale není nejednoznačná.

Příklad: Gramatiku

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid a$$

můžeme nahradit ekvivalentní gramatikou

$$E \rightarrow T \mid T + E$$

$$T \rightarrow F \mid F * T$$

$$F \rightarrow a \mid (E)$$

Poznámka: Pokud se nejednoznačná gramatika žádnou ekvivalentní jednoznačnou gramatikou nahradit nedá, říkáme, že je **podstatně nejednoznačná**.

Definice

Jazyk L je **bezkontextový**, jestliže existuje bezkontextová gramatika G taková, že $L = L(G)$.

Třída bezkontextových jazyků je uzavřená vůči:

- zřetězení
- sjednocení
- iteraci

Třída bezkontextových jazyků však není uzavřená vůči:

- doplňku
- průniku

Máme dány gramatiky $G_1 = (\Pi_1, \Sigma, S_1, P_1)$ a $G_2 = (\Pi_2, \Sigma, S_2, P_2)$, přičemž můžeme předpokládat, že $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$ a $S \notin \Pi_1 \cup \Pi_2$.

- Gramatika G taková, že $L(G) = L(G_1)L(G_2)$:

$$G = (\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1S_2\})$$

- Gramatika G taková, že $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$:

$$G = (\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\})$$

- Gramatika G taková, že $L(G) = L(G_1)^*$:

$$G = (\Pi_1 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow S_1S\})$$