# Syntaxe formulí predikátové logiky

**Abeceda**:

- **logické spojky** — "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$" "$\rightarrow$" a "$\leftrightarrow$"
- **kvantifikátory** — "$\forall$" a "$\exists$"
- **pomocné symboly** — "$($", "$)$" a "$,$"
- **proměnné** — "$x$", "$y$", "$z$", ..., "$x_0$", "$x_1$", "$x_2$", ...
- **predikátové symboly** — například symboly "$P$", "$Q$", "$R$", apod. (u každého symbolu musí být navíc stanovena příslušná arita)
- ...

**Poznámka:** Další typy symbolů budou uvedeny později.

# Syntaxe formulí predikátové logiky

## Definice

Dobře utvořené **atomické formule** predikátové logiky jsou formule tvaru:

- $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $P$ je predikátový symbol s aritou $n$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou (ne nutně různé) proměnné.
- ...

**Poznámka:** Tato definice není úplná. Později bude poněkud zobecněna a rozšířena o další položky.

**Příklad:**

$$P(x, y) \qquad R(z, z, z) \qquad S(y)$$

# Syntaxe formulí predikátové logiky

## Definice

Dobře utvořené **formule predikátové logiky** jsou posloupnosti symbolů vytvořené podle následujících pravidel:

1. Dobře utvořené atomické formule jsou dobře utvořené formule.
2. Jestliže $\varphi$ a $\psi$ jsou dobře utvořené formule, pak i $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou dobře utvořené formule.
3. Jestliže $\varphi$ je dobře utvořená formule a $x$ je proměnná, tak $\forall x \varphi$ a $\exists x \varphi$ jsou dobře utvořené formule.
4. Neexistují žádné další dobře utvořené formule než ty, které jsou vytvořené pomocí předchozích pravidel.

# Syntaxe formulí predikátové logiky

Pojmy jako

- podformule
- abstraktní syntaktický strom

jsou zavedeny v predikátové logice podobně jako ve výrokové logice (pouze rozšířeny o konstrukce, které jsou v predikátové logice navíc).

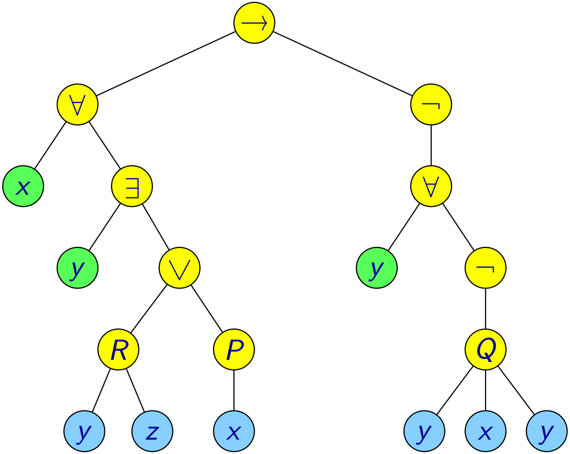
**Konvence pro vypouštění závorek:**

- Stejné jako ve výrokové logice.
- Kvantifikátory ("$\forall$" a "$\exists$") mají stejnou prioritu jako negace ("$\neg$"), tj. nejvyšší prioritu.

# Syntaxe formulí predikátové logiky

Abstraktní syntaktický strom formule

$$\forall x \exists y (R(y,z) \vee P(x)) \rightarrow \neg \forall y \neg Q(y,x,y)$$



# Volné a vázané výskyty proměnných

Každý výskyt proměnné $x$ v podformuli tvaru $\exists x \varphi$ nebo $\forall x \varphi$ je **vázaný**.

Výskyt proměnné, který není vázaný, je **volný**.

**Příklad:** Formule

$$\forall x \exists y (R(y, z) \vee P(x)) \rightarrow \neg \forall y \neg Q(y, x, y)$$

- $y$ v podformuli $R(y, z)$ — vázaný výskyt ($\exists y$)
- $z$ v podformuli $R(y, z)$ — volný výskyt
- $x$ v podformuli $P(x)$ — vázaný výskyt ($\forall x$)
- oba výskyty $y$ v podformuli $Q(y, x, y)$ — vázané výskyty ($\forall y$)
- $x$ v podformuli $Q(y, x, y)$ — volný výskyt

# Volné a vázané výskyty proměnných

Množinu proměnných, které se vyskytují jako **volné** proměnné ve formuli $\varphi$, budeme označovat $\mathit{free}(\varphi)$.

**Příklad:**

- Pokud $\varphi$ je formule $P(x, y)$, tak $\mathit{free}(\varphi) = \{x, y\}$.
- Pokud $\psi$ je formule $\exists x \exists y P(x, y)$, tak $\mathit{free}(\psi) = \emptyset$.
- Pokud $\chi$ je formule
$$\forall x \exists y (R(y, z) \vee P(x)) \rightarrow \neg \forall y \neg Q(y, x, y)$$
tak $\mathit{free}(\chi) = \{x, z\}$.

# Volné a vázané výskyty proměnných

Množinu volných proměnných $\mathit{free}(\varphi)$ je možné popsat následující induktivní definicí:

- $\mathit{free}(P(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
  (kde $P$ je predikátový symbol)
- $\mathit{free}(\neg\varphi) = \mathit{free}(\varphi)$
- $\mathit{free}(\varphi \wedge \psi) = \mathit{free}(\varphi) \cup \mathit{free}(\psi)$
  (pro formule tvaru $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ a $\varphi \leftrightarrow \psi$ je to podobné)
- $\mathit{free}(\forall x \varphi) = \mathit{free}(\varphi) - \{x\}$ (kde $x$ je proměnná)
- $\mathit{free}(\exists x \varphi) = \mathit{free}(\varphi) - \{x\}$ (kde $x$ je proměnná)

# Sémantika predikátové logiky

Formule jsou vyhodnocovány při dané **interpretaci** (**interpretační struktuře**) a **valuaci**.

To, že formule $\varphi$ je pravdivá (tj. má pravdivostní hodnotu $1$) v interpretaci $\mathcal{A}$ při valuaci $v$, budeme označovat

$$\mathcal{A}, v \models \varphi$$

To, že formule $\varphi$ je nepravdivá (má pravdivostní hodnotu $0$) v interpretaci $\mathcal{A}$ při valuaci $v$, budeme označovat $\mathcal{A}, v \not\models \varphi$.

# Sémantika predikátové logiky

**Interpretace** $\mathcal{A}$ je struktura skládající se z následujících položek:

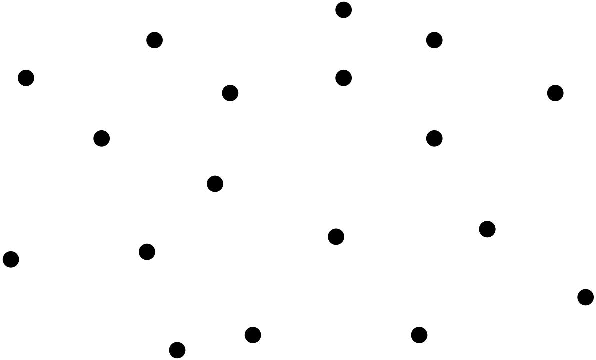
- **Universum** $A$ — libovolná neprázdná množina
- Každému unárnímu predikátovému symbolu $P$ je přiřazena podmnožina množiny $A$ (tj. unární relace na $A$) — označme ji $P^{\mathcal{A}}$.
  (Platí tedy $P^{\mathcal{A}} \subseteq A$.)
- Každému binárnímu predikátovému symbolu $Q$ je přiřazena binární relace na $A$ — označme ji $Q^{\mathcal{A}}$.
  (Platí tedy $Q^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A$.)
- Podobné to bude pro predikátové symboly s dalšími aritami (3, 4, 5, $\ldots$).

**Poznámka:** Tato definice není úplná a bude později doplněna o další položky.

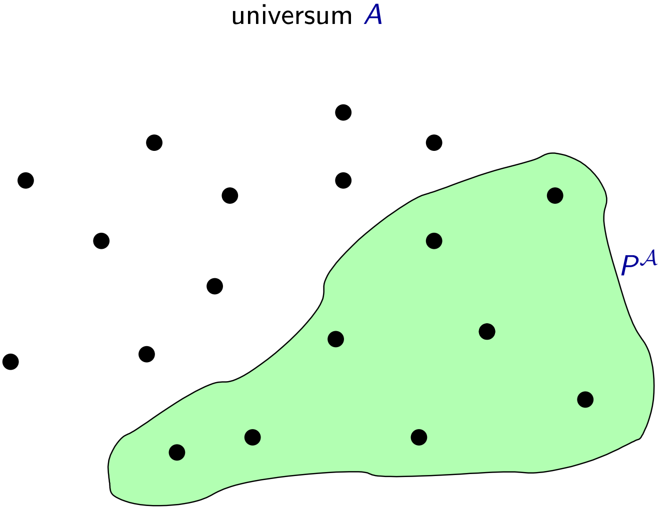
# Sémantika predikátové logiky

Příklad interpretace $\mathcal{A}$:

universum $A$



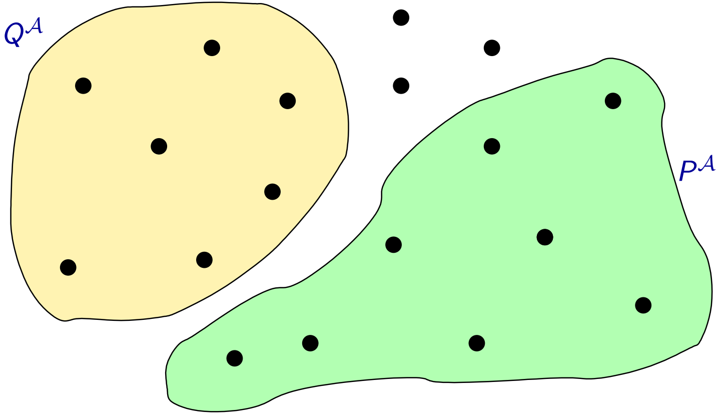
Příklad interpretace $\mathcal{A}$:



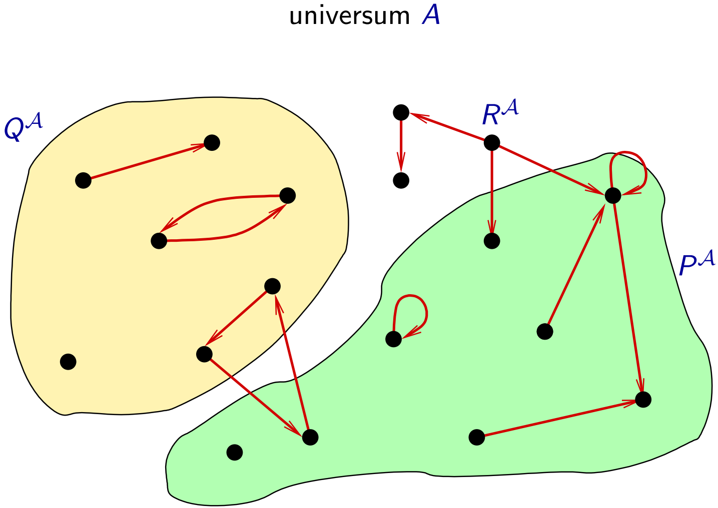
# Sémantika predikátové logiky

Příklad interpretace $\mathcal{A}$:

universum $A$



Příklad interpretace $\mathcal{A}$:



# Sémantika predikátové logiky

Jiný příklad interpretace $\mathcal{A}$:

- universum $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
- $P^{\mathcal{A}} = \{b, d, e\}$
- $Q^{\mathcal{A}} = \{a, b, e, g\}$
- $R^{\mathcal{A}} = \{(a, b),\ (a, e),\ (a, g),\ (b, b),\ (c, e),\ (f, c), (f, g),\ (g, a),\ (g, g)\}$

# Sémantika predikátové logiky

Označme množinu všech proměnných $\mathit{Var}$, tj.

$$\mathit{Var} = \{x, y, z, \ldots, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$$

Při dané interpretaci $\mathcal{A}$ s universem $A$ je **valuace** $v$ libovolná funkce

$$v : \mathit{Var} \to A$$

přiřazující jednotlivým proměnným prvky universa.

**Poznámka:** Jak uvidíme, ve skutečnosti jsou pro určení pravdivosti formule $\varphi$ důležité hodnoty přiřazené valuací $v$ proměnným z množiny $\mathit{free}(\varphi)$.

Hodnoty přiřazené valuací $v$ ostatním proměnným z tohoto hlediska důležité nejsou.

# Sémantika predikátové logiky

Vezměme si libovolnou interpretaci $\mathcal{A}$ s universem $A$ a libovolnou valuaci $v$.

Řekněme, že $x$ je proměnná (tj. $x \in \mathit{Var}$) a $a$ je prvek universa (tj. $a \in A$).

Zápis

$$v[x \mapsto a]$$

označuje valuaci $v' : \mathit{Var} \to A$, která se s valuací $v$ shoduje v hodnotách všech proměnných jiných než $x$, a kde $x$ nabývá hodnoty $a$.

Tj. pro každou proměnnou $y$ (kde $y \in \mathit{Var}$) platí

$$v'(y) = \begin{cases} a & \text{pokud } y = x \\ v(y) & \text{jinak} \end{cases}$$

**Příklad:**

- universum $A = \{a, b, c, d, e, f, g, \dots\}$

  valuace $v$:

  $$v(x_0) = c \qquad v(x_1) = e \qquad v(x_2) = b \qquad v(x_3) = e \qquad \dots$$

  valuace $v[x_2 \mapsto g]$:

  $$v(x_0) = c \qquad v(x_1) = e \qquad v(x_2) = g \qquad v(x_3) = e \qquad \dots$$

## Definice

Předpokládejme danou interpretaci $\mathcal{A}$ s universem $A$ a valuaci $v$, přiřazující proměnným prvky z universa $A$.

**Pravdivost formulí predikátové logiky** v interpretaci $\mathcal{A}$ a valuaci $v$ je definována následovně:

- Pro predikát $P$ s aritou $n$ platí $\mathcal{A}, v \models P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ právě tehdy, když $(v(x_1), v(x_2), \ldots, v(x_n)) \in P^{\mathcal{A}}$.
- $\mathcal{A}, v \models \neg\varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{A}, v \not\models \varphi$.
- $\mathcal{A}, v \models \varphi \wedge \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{A}, v \models \varphi$ a $\mathcal{A}, v \models \psi$.
- $\mathcal{A}, v \models \varphi \vee \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{A}, v \models \varphi$ nebo $\mathcal{A}, v \models \psi$.
- $\mathcal{A}, v \models \varphi \rightarrow \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{A}, v \not\models \varphi$ nebo $\mathcal{A}, v \models \psi$.
- $\mathcal{A}, v \models \varphi \leftrightarrow \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{A}, v \models \varphi$ a $\mathcal{A}, v \models \psi$, nebo když $\mathcal{A}, v \not\models \varphi$ a $\mathcal{A}, v \not\models \psi$.
- ...

# Sémantika predikátové logiky

## Definice (pokrač.)

- ...
- $\mathcal{A}, v \models \forall x \varphi$ právě tehdy, když pro **každé** $a \in A$ platí $\mathcal{A}, v[x \mapsto a] \models \varphi$.
- $\mathcal{A}, v \models \exists x \varphi$ právě tehdy, když **existuje** $a \in A$ takové, že $\mathcal{A}, v[x \mapsto a] \models \varphi$.

**Poznámka:** Ty interpretace, ve kterých daná formule platí, se označují jako její **modely**.

# Vyhodnocování pravdivosti formulí jako hra

Vezměme si formuli tvaru

$$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \cdots \exists x_{n-1} \forall x_n \varphi,$$

kde se nějak libovolně střídají kvantifikátory a kde $\varphi$ neobsahuje žádné kvantifikátory.

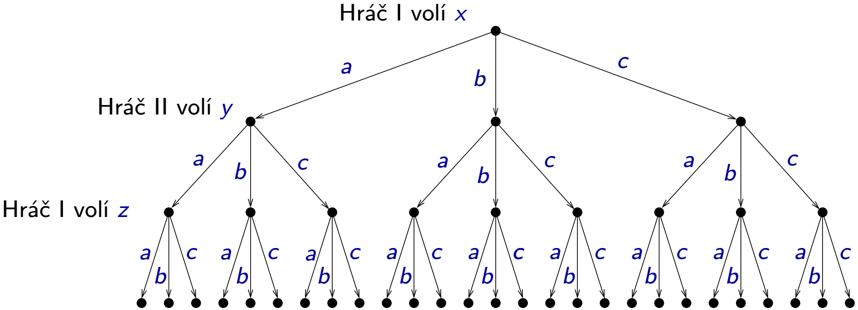
Na vyhodnocování pravdivosti formulí tohoto tvaru v dané interpretaci $\mathcal{A}$ a valuaci $v$ lze nahlížet jako na určitý druh hry:

- Hrají dva hráči — **Hráč I** a **Hráč II**.
- Hráč I se snaží ukázat, že formule platí.
- Hráč II se snaží ukázat, že formule neplatí.
- Hráč I volí hodnoty proměnných vázaných existenčním kvantifikátorem ($\exists$).
- Hráč II volí hodnoty proměnných vázaných univerzálním kvantifikátorem ($\forall$).

# Vyhodnocování pravdivosti formulí jako hra

**Příklad:** Formule $\exists x \forall y \exists z (P(x, y) \rightarrow Q(y, z))$

universum $A = \{a, b, c\}$



# Vyhodnocování pravdivosti formulí jako hra

- Formule $\varphi$ platí právě tehdy, když má Hráč I v této hře **vítěznou strategii**.
- Formule $\varphi$ neplatí právě tehdy, když má vítěznou strategii Hráč II.

**Strategie** — určuje, jak má hráč hrát v každé situaci, tj. určuje tahy pro všechny možné tahy protihráče.

**Vítězná strategie** — strategie, která zaručí vítězství daného hráče bez ohledu na to, jak hraje protihráč.

# Vyhodnocování pravdivosti formulí jako hra

**Příklad:** Interpretace, kde universum je množina reálných čísel $\mathbb{R}$ a binární predikátový symbol $R$ reprezentuje relaci *„větší nebo rovno"* (tj. $R(x, y)$ platí právě tehdy, když $x \geq y$).

Formule $\exists x \forall y R(x, y)$ — vítězná strategie Hráče II:

- Hráč I zvolí číslo $x$.
- Hráč II zvolí číslo $y = x + 1$ — Hráč II vyhrál, protože zjevně není pravda, že $x \geq x + 1$.

Formule $\forall y \exists x R(x, y)$ — vítězná strategie Hráče I:

- Hráč II zvolí číslo $y$.
- Hráč I zvolí číslo $x = y$ — Hráč I vyhrál, protože zjevně platí, že $x \geq x$.

# Logicky platné formule

Formule $\varphi$ je **logicky platná**, jestliže je pravdivá v každé interpretaci a valuaci, tj. jestliže pro každou interpretaci $\mathcal{A}$ a valuaci $v$ platí

$$\mathcal{A}, v \models \varphi.$$

**Příklad:**

- $\exists x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$
- $\forall x P(x) \wedge \neg \exists y Q(y) \rightarrow \forall z (P(z) \wedge \neg Q(z))$
- $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$

# Logicky platné formule

Pokud vezmeme libovolnou tautologii výrokové logiky a nahradíme v ní atomické výroky libovolnými formulemi predikátové logiky, dostaneme logicky platnou formuli.

**Příklad:** Tautologie $p \rightarrow (q \vee p)$

- $p$ nahradíme $\forall z(P(x,z) \leftrightarrow \neg Q(z,y))$
- $q$ nahradíme $R(x)$

Dostaneme logicky platnou formuli

$$\forall z(P(x,z) \leftrightarrow \neg Q(z,y)) \;\rightarrow\; (R(x) \vee \forall z(P(x,z) \leftrightarrow \neg Q(z,y)))$$

# Logicky ekvivalentní formule

Formule $\varphi$ a $\psi$ jsou **logicky ekvivalentní**, jestliže mají stejné pravdivostní hodnoty v každé interpretaci a valuaci, tj. jestliže pro každou interpretaci $\mathcal{A}$ a valuaci $v$ platí

$$\mathcal{A}, v \models \varphi \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad \mathcal{A}, v \models \psi.$$

To, že $\varphi$ a $\psi$ jsou logicky ekvivalentní, se označuje zápisem

$$\varphi \Leftrightarrow \psi.$$

- Stejně jako ve výrokové logice, je v predikátové logice možné provádět ekvivalentní úpravy.
- Všechny ekvivalence, které platí ve výrokové logice, platí i v predikátové logice.

# Logicky ekvivalentní formule

- V predikátové logice platí řada dalších ekvivalencí, které nemají analogii ve výrokové logice.

Příklady některý důležitých ekvivalencí:

$$\begin{aligned}\neg\forall x\varphi &\Leftrightarrow \exists x\neg\varphi\\ \neg\exists x\varphi &\Leftrightarrow \forall x\neg\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x\forall y\varphi &\Leftrightarrow \forall y\forall x\varphi\\ \exists x\exists y\varphi &\Leftrightarrow \exists y\exists x\varphi\end{aligned}$$

Pokud $x \notin \mathit{free}(\varphi)$:

$$\begin{aligned}\forall x\varphi &\Leftrightarrow \varphi\\ \exists x\varphi &\Leftrightarrow \varphi\end{aligned}$$

# Logicky ekvivalentní formule

Některé další důležité ekvivalence:

$$
\begin{array}{rcl}
(\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi) & \Leftrightarrow & \forall x (\varphi \wedge \psi) \\
(\exists x \varphi) \vee (\exists x \psi) & \Leftrightarrow & \exists x (\varphi \vee \psi)
\end{array}
$$

Pokud $x \notin \mathit{free}(\psi)$:

$$
\begin{array}{rcl}
(\forall x \varphi) \wedge \psi & \Leftrightarrow & \forall x (\varphi \wedge \psi) \\
(\forall x \varphi) \vee \psi & \Leftrightarrow & \forall x (\varphi \vee \psi) \\
(\exists x \varphi) \wedge \psi & \Leftrightarrow & \exists x (\varphi \wedge \psi) \\
(\exists x \varphi) \vee \psi & \Leftrightarrow & \exists x (\varphi \vee \psi)
\end{array}
$$

# Přejmenování vázaných proměnných

Pokud přejmenujeme ve formuli vázanou proměnnou, dostaneme ekvivalentní formuli.

**Příklad:** $\forall x P(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(z, y)$

- Pokud přejmenováváme např. $x$ na $y$ ve formuli $\forall x \varphi$ nebo $\exists x \varphi$, proměnná $y$ se **nesmí** vyskytovat ve formuli $\varphi$ jako volná proměnná.

  $\exists x P(x, y)$ není ekvivalentní $\exists y P(y, y)$

- Při přejmenování se volné výskyty proměnných v podformuli **nesmí** stát vázanými. Např.

  $\exists x \forall y P(x, y)$ není ekvivalentní $\exists y \forall y P(y, y)$

# Substituce

Řekněme, že ve formuli $\varphi$ chceme nahradit **volné** výskyty proměnné $x$ proměnnou $y$ (tj. za $x$ dosadit $y$).

Tato operace na formulích se nazývá **substituce** a výsledná formule se označuje

$$\varphi[y/x].$$

**Poznámka:** Formule $\varphi$ a $\varphi[y/x]$ obecně **nejsou** ekvivalentní.

**Příklad:**

$$P(x, z) \qquad \text{není ekvivalentní} \qquad P(y, z)$$

# Přejmenování vázaných proměnných

S použitím operace substituce je možné popsat přejmenování vázaných proměnných pomocí následujících ekvivalencí.

Pokud $y \notin \mathit{free}(\forall x \varphi)$:

$$\forall x \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \forall y (\varphi[y/x])$$

Pokud $y \notin \mathit{free}(\exists x \varphi)$:

$$\exists x \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \exists y (\varphi[y/x])$$

**Příklad:**

$$\exists x \forall y P(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \forall z P(x, z) \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \forall z P(y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \forall x P(y, x)$$

# Logické vyplývání

**Definice**

Závěr $\psi$ **logicky vyplývá** z předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, což zapisujeme

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi,$$

jestliže v každé interpretaci $\mathcal{A}$ a každé valuaci $v$, kde platí předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, platí i závěr $\psi$.

- Vše, co bylo řečeno o logickém vyplývání ve výrokové logice, platí analogicky i v predikátové logice.

# Logické vyplývání

Pokud chceme ukázat, že daný závěr $\psi$ z předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ **nevyplývá**, stačí najít příklad jedné konkrétní interpretace $\mathcal{A}$ a valuace $v$, kde platí tyto předpoklady a neplatí závěr $\psi$.

**Příklad:**

- *Existuje vodní živočich živící se masem.*
- *Všechny ryby jsou vodní živočichové.*

---

- *Existuje ryba živící se masem.*

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \\ \forall x(R(x) \to P(x))\end{array}}{\exists x(R(x) \wedge Q(x))}$$

$P(x)$ — *„x je vodní živočich“*
$Q(x)$ — *„x se živí masem“*
$R(x)$ — *„x je ryba“*

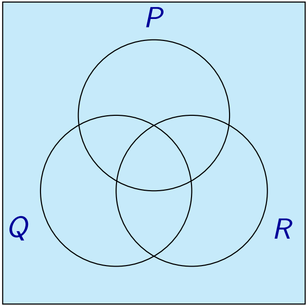
Interpretace $\mathcal{A}$, kde universum $A = \{a, b\}$

$$P^{\mathcal{A}} = \{a, b\} \qquad Q^{\mathcal{A}} = \{a\} \qquad R^{\mathcal{A}} = \{b\}$$

# Vennovy diagramy

Obecně je těžké zjistit, zda závěr vyplývá nebo nevyplývá z daných předpokladů.

V případě, kdy máme pouze unární predikáty a těchto predikátů je jen malý počet (např. 3), lze při úvahách pro názornost použít tzv. **Vennovy diagramy**.



**Příklad:**

- *Ryby jsou obratlovci.*
- *Ryby žijí ve vodě.*
- *Existuje alespoň jedna ryba.*

---

- *Existuje obratlovec žijící ve vodě.*

$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \\ \exists x P(x) \\ \hline \exists x(Q(x) \wedge R(x)) \end{array}$$

$P(x)$ — „$x$ *je ryba*“
$Q(x)$ — „$x$ *je obratlovec*“
$R(x)$ — „$x$ *žije ve vodě*“

⟨*řešení na tabuli*⟩

# Příklad důkazu

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x(\neg R(x,x)) \\ \forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))\end{array}}{\forall x \forall y(R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))}$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x(\neg R(x,x))$ | - předpoklad 1 |
| 2. | $\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$ | - předpoklad 2 |
| 3. | Předpokládejme libovolné prvky $x$ a $y$: | |
| 4. | Předpokládejme $R(x,y)$: | |
| 5. | Předpokládejme $R(y,x)$: | |
| 6. | $R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow R(x,x)$ | - z 2. |
| 7. | $R(x,x)$ | - z 4., 5., 6. |
| 8. | $\neg R(x,x)$ | - z 1. |
| 9. | $\neg R(y,x)$ | - spor 7. a 8., takže 5. neplatí |
| 10. | $R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x)$ | - z 4., 9. |
| 11. | $\forall x \forall y(R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$ | - z 3., 10. |