Ekvivalentní úpravy

Každá formule se dá převést na ekvivalentní formuli, která obsahuje z logických spojek pouze "$\neg$", "$\wedge$" a "$\vee$".

- Spojku "$\leftrightarrow$" je možno odstranit pomocí libovolné z následujících tří ekvivalencí:
  - $p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
  - $p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$
  - $p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- Spojku "$\rightarrow$" je možno odstranit pomocí následující ekvivalence:
  - $p \rightarrow q \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee q$

Příklad:

$$
\begin{aligned}
(\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r) \;&\Leftrightarrow\; (\neg\neg q \vee r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r) \\
&\Leftrightarrow\; (\neg\neg q \vee r) \wedge \neg((p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r))
\end{aligned}
$$

Ekvivalentní úpravy

Každá formule se dá převést na ekvivalentní formuli, která obsahuje z logických spojek pouze "$\neg$", "$\wedge$" a "$\vee$", a kde jsou navíc negace aplikovány pouze na atomické výroky.

- Můžeme předpokládat, že formule obsahuje pouze "$\neg$", "$\wedge$" a "$\vee$".
- Negace můžeme postupně „zatlačit“ k atomickým výrokům použitím následujících tří ekvivalencí:
  - $\neg\neg p \;\Leftrightarrow\; p$
  - $\neg(p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee \neg q$
  - $\neg(p \vee q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \wedge \neg q$

Ekvivalentní úpravy

Příklad:

$$
\begin{aligned}
&(\neg\neg q \vee r) \wedge \neg((p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)) \\
&\qquad \Leftrightarrow \; (q \vee r) \wedge \neg((p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)) \\
&\qquad \Leftrightarrow \; (q \vee r) \wedge (\neg(p \wedge r) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg r)) \\
&\qquad \Leftrightarrow \; (q \vee r) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg r)) \\
&\qquad \Leftrightarrow \; (q \vee r) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg\neg p \vee \neg\neg r)) \\
&\qquad \Leftrightarrow \; (q \vee r) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg\neg r)) \\
&\qquad \Leftrightarrow \; (q \vee r) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge (p \vee r))
\end{aligned}
$$

Logické konstanty

Pro některé účely se hodí zavést následující dvě speciální formule:

- $\top$ — formule, která je vždy pravdivá
- $\bot$ — formule, která je vždy nepravdivá

Pro každé pravdivostní ohodnocení v tedy platí:

- $v \models \top$ ($\top$ má tedy vždy pravdivostní hodnotu 1)
- $v \not\models \bot$ ($\bot$ má tedy vždy pravdivostní hodnotu 0)

Logické konstanty

Symboly $\top$ a $\bot$ je možné chápat jako „zkratky“:

- $\top$ zastupuje libovolnou tautologii (např. $p \to p$)
- $\bot$ zastupuje libovolnou kontradikci (např. $p \wedge \neg p$)

Alternativou by bylo rozšířit definici syntaxe a sémantiky výrokové logiky o příslušné položky.

Na $\top$ a $\bot$ se lze dívat jako na logické spojky s aritou 0.

Logické konstanty

Příklady ekvivalencí, které platí pro $\top$ a $\bot$ (a pro libovolné p):

$$\begin{array}{rcl} \top & \Leftrightarrow & p \vee \neg p \\ \neg\top & \Leftrightarrow & \bot \\ p \wedge \top & \Leftrightarrow & p \\ p \vee \top & \Leftrightarrow & \top \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \bot & \Leftrightarrow & p \wedge \neg p \\ \neg\bot & \Leftrightarrow & \top \\ p \vee \bot & \Leftrightarrow & p \\ p \wedge \bot & \Leftrightarrow & \bot \end{array}$$

Ekvivalence formulí

Ekvivalentní formule **nemusí** nutně obsahovat stejné atomické výroky.

Příklad: $(q \rightarrow \neg\neg q) \wedge \neg p \;\Leftrightarrow\; p \rightarrow (r \wedge \neg r)$

$$
\begin{aligned}
(q \rightarrow \neg\neg q) \wedge \neg p \;&\Leftrightarrow\; (q \rightarrow q) \wedge \neg p \\
&\Leftrightarrow\; \top \wedge \neg p \\
&\Leftrightarrow\; \neg p \\
&\Leftrightarrow\; \neg p \vee \bot \\
&\Leftrightarrow\; p \rightarrow \bot \\
&\Leftrightarrow\; p \rightarrow (r \wedge \neg r)
\end{aligned}
$$

Například také libovolné dvě tautologie jsou spolu ekvivalentní.

Konjunkce a disjunkce více formulí

Díky asociativitě konjunkce platí například:

$$p \wedge ((q \wedge r) \wedge (s \wedge t)) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \wedge ((r \wedge s) \wedge t)$$

Obě tyto formule jsou také ekvivalentní formulím

- $p \wedge (q \wedge (r \wedge (s \wedge t)))$
- $(((p \wedge q) \wedge r) \wedge s) \wedge t$

Všechny výše uvedené formule jsou pravdivé právě tehdy, když jsou pravdivé všechny výroky p, q, r, s a t.

Konvence: Díky asociativitě konjunkce je možno vypustit závorky a psát

$$p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t$$

Konjunkce a disjunkce více formulí

Protože je konjunkce nejen asociativní, ale i komutativní, nezáleží na pořadí členů v takové komplikovanější konjunkci, např.:

$$r \wedge t \wedge q \wedge s \wedge p \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t$$

Díky idempotenci není podstatné, kolikrát se v dané konjunkci který člen vyskytuje, např.:

$$p \wedge q \wedge p \quad \Leftrightarrow \quad q \wedge p \wedge q \wedge q$$

Konjunkce a disjunkce více formulí

Totéž, co platí pro konjunkci, platí i pro disjunkci, např.:

$$(p \vee q) \vee (r \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad q \vee (p \vee (r \vee (r \vee r)))$$

Konvence: Místo $(p \vee q) \vee (r \vee (s \vee t))$ lze psát

$$p \vee q \vee r \vee s \vee t$$

Toto vše platí nejen pro atomické výroky, ale pro libovolné formule, např.:

- Místo $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge (\varphi_3 \wedge (\varphi_4 \wedge \varphi_5))$ lze psát

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \varphi_5$$

Konjunkce a disjunkce více formulí

Konjunkcí n formulí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, kde $n \geq 0$, budeme rozumět formuli

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$$

Speciálně:

- Pro $n = 0$ bude touto konjunkcí formule $\top$.
- Pro $n = 1$ bude touto konjunkcí formule φ_1.

Disjunkcí n formulí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, kde $n \geq 0$, budeme rozumět formuli

$$\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$$

Speciálně:

- Pro $n = 0$ bude touto disjunkcí formule $\perp$.
- Pro $n = 1$ bude touto disjunkcí formule φ_1.

Konjunkce a disjunkce více formulí

Konjunkce $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$:

- Celá formule je pravdivá právě tehdy, když všechny formule φ_1, φ_2, ..., φ_n jsou pravdivé.
- Pokud je některá formule φ_i ekvivalentní $\perp$, je celá formule ekvivalentní $\perp$.
- Pokud je některá formule φ_i ekvivalentní negaci nějaké formule φ_j (tj. $\varphi_i \Leftrightarrow \neg\varphi_j$), pak celá formule je ekvivalentní $\perp$.
- Pokud je některá formule φ_i ekvivalentní $\top$, je možné formuli φ_i z celé formule vypustit.

Konjunkce a disjunkce více formulí

Disjunkce $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$:

- Celá formule je pravdivá právě tehdy, když alespoň jedna z formulí φ_1, φ_2, ..., φ_n je pravdivá.
- Pokud je některá formule φ_i ekvivalentní $\top$, je celá formule ekvivalentní $\top$.
- Pokud je některá formule φ_i ekvivalentní negaci nějaké formule φ_j (tj. $\varphi_i \Leftrightarrow \neg\varphi_j$), pak celá formule je ekvivalentní $\top$.
- Pokud je některá formule φ_i ekvivalentní $\bot$, je možné formuli φ_i z celé formule vypustit.

Normální formy formulí

- **Literál** — atomický výrok nebo jeho negace, např.

$$p \qquad\qquad \neg q \qquad\qquad \neg r$$

- **Elementární konjunkce** — konjunkce jednoho nebo více literálů, např.

$$(p \wedge \neg q) \qquad\qquad (r) \qquad\qquad (q \wedge \neg r \wedge p)$$

- **Elementární disjunkce** (**klauzule**) — disjunkce jednoho nebo více literálů, např.

$$(p \vee \neg q) \qquad\qquad (r) \qquad\qquad (q \vee \neg r \vee p)$$

Normální formy formulí

Příklad:

- Elementární konjunkce

$$(p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s \wedge \neg t)$$

je **pravdivá** právě v těch pravdivostních ohodnoceních v, kde

$$v(p) = 1 \qquad v(q) = 0 \qquad v(r) = 1 \qquad v(s) = 0 \qquad v(t) = 0$$

- Elementární disjunkce

$$(p \vee \neg q \vee r \vee \neg s \vee \neg t)$$

je **nepravdivá** právě v těch pravdivostních ohodnoceních v, kde

$$v(p) = 0 \qquad v(q) = 1 \qquad v(r) = 0 \qquad v(s) = 1 \qquad v(t) = 1$$

Normální formy formulí

- **Disjunktivní normální forma** (**DNF**) — disjunkce jedné nebo více elementárních konjunkcí, např.

$$(p \wedge \neg q) \;\vee\; (\neg r) \;\vee\; (\neg r \wedge \neg p \wedge \neg q)$$

- **Konjunktivní normální forma** (**KNF**) — konjunkce jedné nebo více elementárních disjunkcí (klauzulí), např.

$$(p \vee \neg q) \;\wedge\; (\neg r) \;\wedge\; (\neg r \vee \neg p \vee \neg q)$$

Poznámka: Formule $\perp$ a $\top$ také budeme považovat za formule v DNF a KNF.

Normální formy formulí

Předpokládejme, že u formule φ v KNF žádná elementární disjunkce neobsahuje zároveň literály p a $\neg p$ (takové elementární disjunkce je možno vypustit).

Tato formule φ je **tautologie** právě tehdy, když je $\top$, tj. když neobsahuje žádné elementární disjunkce.

Předpokládejme, že u formule ψ v DNF žádná elementární konjunkce neobsahuje zároveň literály p a $\neg p$ (takové elementární konjunkce je možno vypustit).

Tato formule ψ je **kontradikce** právě tehdy, když je $\bot$, tj. když neobsahuje žádné elementární konjunkce.

Normální formy formulí

Převod formule do DNF a do KNF:

- Můžeme předpokládat, že formule obsahuje pouze atomické výroky, spojky "$\neg$" aplikované na atomické výroky a spojky "$\wedge$" a "$\vee$".
- Požadovaný tvar formule můžeme dosáhnout pomocí následujících ekvivalencí:
  - $p \wedge (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ — při převodu do DNF
  - $p \vee (q \wedge r) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ — při převodu do KNF

Normální formy formulí

Příklad: Převod formule $q \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge (p \vee r))$ do DNF:

$$
\begin{aligned}
& q \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge (p \vee r)) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \wedge (p \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & ((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge (p \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge p) \ \vee \ (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (((q \wedge \neg p) \wedge p) \vee ((q \wedge \neg r) \wedge p)) \ \vee \ (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge \neg p \wedge p) \ \vee \ (q \wedge \neg r \wedge p) \ \vee \ (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge \bot) \ \vee \ (q \wedge \neg r \wedge p) \ \vee \ (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & \bot \ \vee \ (q \wedge \neg r \wedge p) \ \vee \ (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge \neg r \wedge p) \ \vee \ (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \ \vee \ (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Normální formy formulí

$$\begin{aligned}
&\ldots \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (((q \wedge \neg p) \wedge r) \vee ((q \wedge \neg r) \wedge r)) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (q \wedge \bot) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee \bot \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)
\end{aligned}$$

Normální formy formulí

K dané tabulce pravdivostních hodnot můžeme snadno vyrobit příslušné formule v DNF a KNF:

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

DNF:
$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

KNF:
$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Normální formy formulí

Pokud uvažujeme pevně danou **konečnou** množinu atomických výroků At:

- **Úplná disjunktivní normální forma** (**ÚDNF**) — formule v DNF, kde každá elementární konjunkce obsahuje každý atomický výrok z At právě jednou.

  Příklad: $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

- **Úplná konjunktivní normální forma** (**ÚKNF**) — formule v KNF, kde každá klauzule obsahuje každý atomický výrok z At právě jednou.

  Příklad: $(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$

Poznámka: V příkladech je $At = \{p, q, r\}$.

Minimální množiny logických spojek

Z předchozího vidíme, že spojky "$\neg$", "$\wedge$" a "$\vee$" postačují na vytvoření formule pro jakoukoliv tabulku pravdivostních hodnot.

Ve skutečnosti stačí i některé menší množiny logických spojek:

- "$\neg$", "$\wedge$":
  $\varphi \vee \psi$ je možno vyjádřit jako $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- "$\neg$", "$\vee$":
  $\varphi \wedge \psi$ je možno vyjádřit jako $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- "$\neg$", "$\rightarrow$":
  $\varphi \vee \psi$ je možno vyjádřit jako $\neg\varphi \rightarrow \psi$
  $\varphi \wedge \psi$ je možno vyjádřit jako $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$

Minimální množiny logických spojek

- "$\rightarrow$", "$\perp$":
  $\neg\varphi$ je možno vyjádřit jako $\varphi \rightarrow \perp$
  $\varphi \vee \psi$ je možno vyjádřit jako $(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \psi$
  $\varphi \wedge \psi$ je možno vyjádřit jako $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$

- "$\mid$" — NAND — Shefferova funkce (též se označuje "$\uparrow$"):

φ	ψ	$\varphi \mid \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

  $\neg\varphi$ je možno vyjádřit jako $\varphi \mid \varphi$
  $\varphi \vee \psi$ je možno vyjádřit jako $(\varphi \mid \varphi) \mid (\psi \mid \psi)$
  $\varphi \wedge \psi$ je možno vyjádřit jako $(\varphi \mid \psi) \mid (\varphi \mid \psi)$

Minimální množiny logických spojek

- "$\downarrow$" — NOR — Peirceova funkce:

φ	ψ	$\varphi \downarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$\neg\varphi$ je možno vyjádřit jako $\varphi \downarrow \varphi$
$\varphi \vee \psi$ je možno vyjádřit jako $(\varphi \downarrow \psi) \downarrow (\varphi \downarrow \psi)$
$\varphi \wedge \psi$ je možno vyjádřit jako $(\varphi \downarrow \varphi) \downarrow (\psi \downarrow \psi)$

Logické vyplývání

Definice

Formule ψ **logicky vyplývá** z formule φ, jestliže při každém pravdivostním ohodnocení v, při kterém platí φ, platí i ψ.

To, že ψ logicky vyplývá z φ se označuje zápisem

$$\varphi \models \psi.$$

- φ — předpoklad
- ψ — závěr

Formule ψ logicky vyplývá z φ (tj. $\varphi \models \psi$) právě tehdy, když $\varphi \rightarrow \psi$ je tautologie.

Logické vyplývání

Příklad: Formule $r \rightarrow p$ logicky vyplývá z formule $p \vee (q \wedge \neg r)$, tj.

$$p \vee (q \wedge \neg r) \models r \rightarrow p$$

	p	q	r	$p \vee (q \wedge \neg r)$	$r \rightarrow p$
	0	0	0	0	1
	0	0	1	0	0
$*$	0	1	0	1	1
	0	1	1	0	0
$*$	1	0	0	1	1
$*$	1	0	1	1	1
$*$	1	1	0	1	1
$*$	1	1	1	1	1

Logické vyplývání

Předpokladů může být libovolný počet:

Definice

Formule ψ **logicky vyplývá** z předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, jestliže při každém pravdivostním ohodnocení v, při kterém platí všechny tyto předpoklady, platí i ψ.

To, že ψ logicky vyplývá z $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ se označuje zápisem

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi.$$

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — předpoklady
- ψ — závěr

Logické vyplývání

Příklad:

- *Jestliže měl vlak zpoždění a na nádraží nebyly taxíky, tak Honza přišel pozdě do práce.*
- *Honza nepřišel do práce pozdě.*
- *Vlak měl zpoždění.*

- *Na nádraží byly taxíky.*

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow r,\ \neg r,\ p \ \models\ q$$

Logické vyplývání

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow r,\ \neg r,\ p \ \models\ q$$

	p	q	r	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$	$\neg r$	p	q
	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0
	0	1	0	1	1	0	1
	0	1	1	1	0	0	1
	1	0	0	0	1	1	0
	1	0	1	1	0	1	0
$*$	1	1	0	1	1	1	1
	1	1	1	1	0	1	1

Logické vyplývání

Pro konkrétnost řekněme, že máme celkem 4 předpoklady, ale podobně to platí i pro libovolný (konečný) počet předpokladů:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \psi$$

právě tehdy, když

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \varphi_4 \rightarrow \psi$$

právě tehdy, když

$$\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3 \rightarrow (\varphi_4 \rightarrow \psi)$$

právě tehdy, když

$$\varphi_1 \models \varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow (\varphi_4 \rightarrow \psi))$$

právě tehdy, když

$$\models \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow (\varphi_4 \rightarrow \psi)))$$

(tj. právě tehdy, když $\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow (\varphi_4 \rightarrow \psi)))$ je tautologie)

Logické vyplývání

Příklad: Skutečně platí

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow r,\ \neg r,\ p \ \models\ q$$

(tj. závěr q logicky vyplývá z předpokladů $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$, $\neg r$ a p), protože

$$((p \wedge \neg q) \rightarrow r) \rightarrow (\neg r \rightarrow (p \rightarrow q))$$

je tautologie.

(Lze ověřit například pomocí tabulkové metody nebo pomocí nalezení sémantického sporu.)

Logické vyplývání

Věta o dedukci

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \chi \models \psi$$

právě tehdy, když

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \models \chi \rightarrow \psi$$

Logické vyplývání

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \models \psi$$

právě tehdy, když

$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$ je tautologie

Zdůvodnění (pro případ se čtyřmi předpoklady):

$$\begin{aligned}
& \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow (\varphi_4 \rightarrow \psi))) \\
\Leftrightarrow \quad & \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ((\varphi_3 \wedge \varphi_4) \rightarrow \psi)) \\
\Leftrightarrow \quad & \varphi_1 \rightarrow ((\varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4) \rightarrow \psi)) \\
\Leftrightarrow \quad & (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4) \rightarrow \psi
\end{aligned}$$

Poznámka: Využívá toho, že platí $p \rightarrow (q \rightarrow r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \rightarrow r$.

Logické vyplývání

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \models \psi$$

právě tehdy, když

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \wedge \psi$$

$$\varphi \;\Leftrightarrow\; \psi$$

právě tehdy, když

$\varphi \models \psi$ a $\psi \models \varphi$

Logické vyplývání

Pokud je formule ψ **tautologie**, tak logicky vyplývá z jakékoliv množiny předpokladů, tj. pro jakoukoliv množinu předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ platí

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \models \psi$$

Speciálně, pokud je ψ tautologie, tak vyplývá i z prázdné množiny předpokladů:

$$\models \psi$$

Tautologie jsou jediné formule, které logicky vyplývají z prázdné množiny předpokladů.

Logické vyplývání

Řekněme, že platí

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \chi_1 \qquad\qquad \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \chi_2$$

a zároveň $\chi_1, \chi_2 \models \psi$.

Pak platí i $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Příklad:

- Pokud $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models (q \vee \neg p)$ a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \neg s$, tak

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models (q \vee \neg p) \wedge \neg s,$$

  protože $q \vee \neg p, \neg s \models (q \vee \neg p) \wedge \neg s$.

Logické vyplývání

Příklad:

- Pokud $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models p \rightarrow q$ a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models p$, tak
$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models q,$$
protože $p \rightarrow q,\ p \models q$.

- Pokud $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \neg p \rightarrow \neg q$, tak
$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models q \rightarrow p,$$
protože $\neg p \rightarrow \neg p \models q \rightarrow p$.

Logické vyplývání

Při zdůvodnění toho, že závěr ψ logicky vyplývá z předpokladů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ je možno postupovat po menších krocích.

Začneme s předpoklady, například:

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$$

Postupně přidáváme další formule tak, aby každá nově přidaná formule logicky vyplývala z předchozích, například:

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3,\ \chi_4,\ \chi_5,\ \chi_6,\ \chi_7,\ \chi_8,\ \psi$$

Logické vyplývání

Předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ jsou **nekonzistentní** (**sporné**), jestliže neexistuje žádné pravdivostní ohodnocení v, při kterém by byly všechny tyto předpoklady pravdivé.

Předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ jsou nekonzistentní právě tehdy, když

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$$

je kontradikce.

Příklad: Předpoklady $p \rightarrow q,\ \ r \rightarrow p,\ \ r,\ \ \neg q$ jsou nekonzistentní.

Logické vyplývání

V případě, kdy předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ jsou nekonzistentní, tak $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ je kontradikce, takže

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \;\Leftrightarrow\; \bot.$$

V tom případě tedy platí

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \quad\Leftrightarrow\quad \bot \quad\Leftrightarrow\quad \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \wedge \bot,$$

z čehož plyne, že

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \bot.$$

Logické vyplývání

Předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ jsou nekonzistentní právě tehdy, když

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \bot.$$

Protože $\bot \rightarrow \psi$ je tautologie (pro jakoukoliv formuli ψ), platí pro libovolnou formuli ψ v případě, kdy jsou předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ nekonzistentní

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi .$$

Z nekonzistentních předpokladů tedy logicky vyplývá jakákoliv formule.

Speciálně pro jakoukoliv formuli χ platí, že z nekonzistentních předpokladů vyplývá jak χ, tak $\neg\chi$.

Logické vyplývání

Předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ jsou nekonzistentní právě tehdy, když existuje nějaká formule χ taková, že

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \chi \qquad \text{a zároveň} \qquad \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \neg\chi$$

Formule $\chi \rightarrow (\neg\chi \rightarrow \bot)$ je tautologie (pro libovolnou formuli χ).

Pokud tedy platí

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \chi \qquad \text{a zároveň} \qquad \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \neg\chi$$

tak platí i

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \bot.$$

Naopak pokud platí za daných předpokladů $\bot$, tak za těchto předpokladů platí i χ a $\neg\chi$.

Princip důkazu sporem

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n \models \psi$$

právě tehdy, když

předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \neg\psi$ jsou nekonzistentní

Předpoklady $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \neg\psi$ jsou nekonzistentní právě tehdy, když

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \neg\psi \models \bot,$$

což platí právě tehdy, když

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \models \neg\psi \rightarrow \bot.$$

Platí $\neg\psi \rightarrow \bot \;\Leftrightarrow\; \psi$ (protože $\neg p \rightarrow \bot \Leftrightarrow \neg\neg p \vee \bot \Leftrightarrow \neg\neg p \Leftrightarrow p$).