Cvičení 13

Příklad 1: Navrhněte (nějaký) algoritmus řešící následující problém:

> VSTUP: Číslo n a sekvence čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, kde pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
>
> OTÁZKA: Je v sekvenci $a_1, a_2, \ldots, a_n$ každé $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ obsaženo právě jednou?

Analyzujte časovou sloužitost vašeho algoritmu. Pokud je větší než $O(n)$, zkuste navrhnout algoritmus s časovou složitostí $O(n)$.

Příklad 2: Připomeňte si pro každý z následujících problémů, co je jeho vstupem a jaká je otázka. Poté ukažte pro všechny tyto problémy, že patří do třídy NPTIME, tj. pro každý z nich popište nedeterministický algoritmus s polynomiální časovou složitostí řešící daný problém:

a) SAT
b) 3-SAT
c) Problém nezávislé množiny (IS)
d) Problém kliky (CLIQUE)
e) Problém vrcholového pokrytí (VC)
f) Problém Hamiltonovského cyklu (HC)
g) Problém Hamiltonovské kružnice (HK)
h) Problém obchodního cestujícího (TSP)
i) Problém obarvení (vrcholů) grafu k barvami
j) SUBSET-SUM

Řešení: Jednotlivé problémy (co je vstupem a co je otázka) najdete ve slidech ke 13. přednášce.
Nedeterministické algoritmy s polynomiální časovou složitostí pro všechny tyto problémy jsou následujícího typu:

1. Algoritmus nedeterministicky vygeneruje určitý objekt (např. ohodnocení bool. proměnných, podmnožinu vrcholů grafu, cyklus v grafu, obarvení vrcholů v grafu atd.), na jehož existenci se ptá otázka. (Ve všech případech jsou tyto objekty vzhledem k původní instanci problému polynomiálně velké.

2. Algoritmus (deterministicky) ověří, že to, co vygeneroval je opravdu hledaným objektem. Pokud ano, skončí daný výpočet s odpovědí ANO, pokud ne, skončí s odpovědí NE. Pokud tedy nějaký takový objekt, na jehož existenci se ptá otázka, skutečně existuje, alespoň jeden z výpočtů skončí s odpovědí ANO. Pokud takový objekt neexistuje, skončí všechny výpočty s odpovědí NE.

Například pro problém nezávislé množiny (IS):

> VSTUP: Neorientovaný graf G a číslo k.

OTÁZKA: Existuje v grafu G nezávislá množina velikosti k?

bude algoritmus vypadat třeba takto:

1. Nedeterministicky navolí podmnožinu vrcholů grafu G velikosti k (jeden vrchol po druhém).
2. Projde postupně všechny hrany grafu G. Pokud oba koncové vrcholy nějaké hrany patří do navolené podmnožiny vrcholů, skončí s opovědí NE. Pokud projde všechny hrany a u každé z nich byl v navolené podmnožině nejvýše jeden z jejích koncových vrcholů, skončí s odpovědí ANO.

Příklad 3: Pro které z následujících problémů umíte dokázat, že patří do třídy PTIME?

a) Problém rozhodnout, zda daný graf obsahuje nezávislou množinu (tj. podmnožinu vrcholů nespojených hranami) velikosti 7.
b) Problém rozhodnout, zda daný graf obsahuje nezávislou množinu (tj. podmnožinu vrcholů nespojených hranami) velikosti nejméně 2005.
c) Problém rozhodnout, zda daný graf má barevnost nejméně tři.
d) Problém rozhodnout, zda daný graf má barevnost nejvýše tři.
e) Problém rozhodnout, zda daný graf má barevnost přesně tři.
f) Problém rozhodnout, zda daný graf má barevnost přesně dva.

Poznámka: Barevnost grafu je minimální počet barev, kterým je možné obarvit vrcholy grafu tak, aby žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou.

Řešení: a, b, c, f

Příklad 4: Pro které z následujících problémů umíte ukázat, že patří do třídy NPTIME?

a) Problém rozhodnout, zda daný graf má barevnost nejvýše čtyři.
b) Problém rozhodnout, zda daný graf má barevnost přesně čtyři.
c) Problém rozhodnout, zda daný graf má barevnost nejméně čtyři.
d) Problém rozhodnout, zda daný graf obsahuje nejméně tři Hamiltonovské kružnice.
e) Problém rozhodnout, zda daný graf obsahuje přesně tři Hamiltonovské kružnice.

Řešení: a, d