

Cvičení 9

Příklad 1: Uvažujme následující bezkontextovou gramatiku:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow aBb \mid AB \\ A &\longrightarrow bAb \mid a \\ B &\longrightarrow \varepsilon \mid aABb \end{aligned}$$

- Uvedte (nějakou) derivaci slova *babaab* v této gramatice.
- Nakreslete příslušný derivační strom.
- Uvedte příslušnou levou a pravou derivaci odpovídající derivačnímu stromu nakreslenému v předchozím bodě.

Příklad 2: Vytvořte bezkontextovou gramatiku pro každý z následujících jazyků:

- $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } babb\}$

Řešení:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AbabbA \\ A &\longrightarrow \varepsilon \mid aA \mid bA \mid cA \end{aligned}$$

- $L_2 = \{0^n 1^m \mid 1 \leq n < m\}$
- $L_3 = \{a^n b^m a^{n+2} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

Řešení:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow Aaa \\ A &\longrightarrow aAa \mid B \\ B &\longrightarrow bB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

- $L_4 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$

Řešení:

$$S \longrightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$$

- $L_5 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 > 1, |w|_1 \leq 2\}$
- $L_6 = \{0^n w w^R 1^n \mid w \in \{0, 1\}^*, n \in \mathbb{N}\}$
- $L_7 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{ve } w \text{ je každé } a \text{ bezprostředně následováno } b \text{ nebo } w = b^n a^m, \text{ kde } 0 \leq m \leq n\}$

Řešení:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow A \mid BC \\ A &\longrightarrow \varepsilon \mid abA \mid bA \\ B &\longrightarrow \varepsilon \mid bB \\ C &\longrightarrow bCa \mid \varepsilon \end{aligned}$$

- $L_8 = \{wv^R \mid u, v \in \{0, 1\}^*, |u|_0 \bmod 4 = 2, u \text{ končí sufixem } 101 \text{ a } v \text{ obsahuje podslovo } 10\}$
- $L_9 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R, |w| \bmod 4 = 0\}$

- $L_{10} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R, |w| \bmod 3 = 0\}$

Řešení:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow aTa|bTb|\varepsilon \\ T &\longrightarrow aUa|bUb|a|b \\ U &\longrightarrow aSa|bSb \end{aligned}$$

- $L_{11} = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \text{za každým úsekem znaků } a \text{ bezprostředně následuje dvakrát delší úsek znaků } b\}$
- $L_{12} = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$

Řešení:

$$S \longrightarrow \varepsilon \mid 0S1 \mid 1S0 \mid SS$$

Příklad 3: Pro následující dvojice gramatik určete, zda obě gramatiky generují tentýž jazyk. Vaše odpovědi zdůvodněte.

a) $S \longrightarrow aaSbb \mid ab \mid aabb$ $S \longrightarrow aSb \mid ab$

Řešení: Druhá gramatika zřejmě generuje jazyk $\{a^i b^i : i \geq 1\}$. Zbývá tedy ověřit, zda první gramatika generuje tentýž jazyk. I první gramatika generuje jazyk, ve kterém jsou nejprve znaky a a až pak znaky b . Pravidlo $S \longrightarrow aaSbb$ vygeneruje všechna slova tvaru $a^j S b^j$, kde $j \geq 0$ je sudé. Takže pokud i z druhé gramatiky je liché, jsme hotovi užitím $S \longrightarrow ab$. Pokud máme generovat slovo $a^i b^i$ pro sudé $i \geq 2$, nakonec aplikujeme pravidlo $S \longrightarrow aabb$, čímž vznikne slovo $a^{j+2} b^{j+2}$ a $i = j + 2$. Takže jsme dokázali, že obě gramatiky generují tutéž množinu slov nad $\{a, b\}$.

b) $S \longrightarrow aaSbb \mid ab \mid \varepsilon$ $S \longrightarrow aSb \mid ab$

Řešení: Negenerují, neboť z druhé gramatiky nezískáme slovo ε .

c) $S \longrightarrow aaSb \mid ab \mid \varepsilon$ $S \longrightarrow aSb \mid aab \mid \varepsilon$

Příklad 4: Navrhněte bezkontextovou gramatiku pro jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{ (,), [,] \}$ tvořený všemi „dobře uzávorkovanými“ výrazy. Dobře uzávorkovaným výrazem se myslí taková sekvence znaků, kde každé levé závorce odpovídá právě jedna příslušná pravá závorka stejného typu, a kde se závorky „nekříží“ (tj. odpovídající si páry závorek jsou do sebe správně zanořeny).

Příklad 5: Napište bezkontextovou gramatiku generující množinu všech dobře vytvořených formulí výrokové logiky. Jako množinu atomických výroků uvažujte množinu $At = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, kde jednotlivé proměnné můžete zapisovat jako x_0, x_1, x_2, \dots

- a) Zjistěte, zda je vámi vytvořená gramatika jednoznačná.

- b) Pokud gramatika jednoznačná není, upravte ji tak, aby jednoznačná byla.
- c) Upravte gramatiku tak, aby byla jednoznačná a aby struktura vytvořeného derivačního stromu pro libovolnou derivaci slova v této gramatice odpovídala skutečné prioritě logických spojek, tj. \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow (od největší po nejmenší).

Řešení:

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow A \mid A \leftrightarrow S \\
 A &\rightarrow B \mid B \rightarrow A \\
 B &\rightarrow C \mid C \vee B \\
 C &\rightarrow D \mid D \wedge C \\
 D &\rightarrow \neg D \mid (S) \mid \mathbf{x}E \mid \perp \mid \top \\
 E &\rightarrow F \mid EF \\
 F &\rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9
 \end{aligned}$$

Tato gramatika je jednoznačná a struktura derivačního stromu odpovídá prioritě logických spojek.

Příklad 6: Navrhněte syntaxi pro zápis jednoduchých aritmetických výrazů pomocí slov nad abecedou

$$\Sigma = \{A, B, \dots, Z, a, b, \dots, z, 0, 1, \dots, 9, ., +, -, *, /, (,)\}.$$

a popište vámi navrženou syntaxi bezkontextovou gramatikou.