

## Cvičení 7

**Příklad 1:** Uvažujme následující jazyky:

$$L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{ve } w \text{ je každá } 0 \text{ (přímo) následována } 1\}$$

$$L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$$

a) Vyjmenujte prvních 5 slov z každého z jazyků  $L_1, L_2$  (nejmenších vzhledem k uspořádání  $<_L$ ).

*Řešení:*

$$L_1: \varepsilon, 1, 01, 11, 011$$

$$L_2: \varepsilon, 0, 1, 00, 11$$

b) Vyjmenujte prvních 5 slov z každého z jazyků  $\overline{L_1}, \overline{L_2}$ .

*Řešení:*

$$\overline{L_1}: 0, 00, 10, 000, 001$$

$$\overline{L_2}: 01, 10, 001, 011, 100$$

c) Vyjmenujte prvních 5 slov z jazyka  $L_1 \cap L_2$ .

*Řešení:*

$$L_1 \cap L_2: \varepsilon, 1, 11, 101, 111$$

d) Vyjmenujte prvních 5 slov z jazyka  $L_1 \cup L_2$ .

*Řešení:*

$$L_1 \cup L_2: \varepsilon, 0, 1, 00, 01$$

**Příklad 2:** Uvažujme jazyky nad abecedou  $\{a, b\}$ . Vypište všechna slova ve zřetězení jazyků  $L_1 = \{\varepsilon, abb, bba\}$  a  $L_2 = \{a, b, abba\}$ .

*Řešení:*  $L_1 \cdot L_2 = \{a, b, abba, abbb, abbabba, bbaa, bbab, bbaabba\}$

**Příklad 3:** Uvažujme jazyky nad abecedou  $\{0, 1\}$ . Vypište všechna slova ve zřetězení

$$\{0, 001, 111\} \cdot \{\varepsilon, 01, 0101\}$$

**Příklad 4:** Uvažujme jazyky nad abecedou  $\{0, 1\}$ . Popište (slovně) jazyk vzniklý iterací  $\{00, 111\}^*$  a vyjmenujte prvních 10 slov z tohoto jazyka.

*Řešení:* Je to jazyk všech těch slov, která mají úseky nul sudé délky a úseky jedniček délky dělitelné třemi.

**Příklad 5:** Uvažujme následující jazyky:

$$L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_1 \leq 1\}$$

$$L_2 = \{w \in \{0, 1\} \mid w = w^R\}$$

Popište, jak vypadají slova v jazyce  $L_1 \cap L_2$ .

**Příklad 6:** Napište regulární výrazy pro následující jazyky:

a) Jazyk  $\{ab, ba, abb, bab, abbb, babb\}$

*Řešení:*  $ab + ba + abb + bab + abbb + babb$  nebo  $(ab + ba)(\varepsilon + b + bb)$

b) Jazyk nad abecedou  $\{a, b, c\}$  obsahující právě ta slova, která obsahují podslovo  $abb$ .

*Řešení:*  $(a + b + c)^*abb(a + b + c)^*$

c) Jazyk nad abecedou  $\{a, b, c\}$  obsahující právě ta slova, která začínají prefixem  $bca$  nebo končí sufixem  $ccab$ .

*Řešení:*  $bca(a + b + c)^* + (a + b + c)^*ccab$

d) Jazyk  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 \bmod 2 = 0\}$ .

e) Jazyk  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 \bmod 3 = 1\}$ .

*Řešení:*  $1^*01^*(01^*01^*01^*)^*$

f) Jazyk  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w$  obsahuje podslova 010 a 111}

g) Jazyk  $\{w \in \{a, b\}^* \mid w$  obsahuje podslovo  $bab$  nebo  $|w|_b \leq 3\}$

h) Jazyk  $\{w \in \{a, b\}^* \mid w$  obsahuje podslovo  $bab$  a  $|w|_b \leq 3\}$

*Řešení:*  $a^*ba^*baba^* + a^*baba^*ba^* + a^*baba^*$  nebo  $(\varepsilon + a^*b)a^*baba^* + a^*baba^*ba^*$

i) Jazyk všech slov nad abecedou  $\{a, b, c\}$ , ve kterých se nikde nevyskytují dva znaky  $a$  hned za sebou.

**Příklad 7:** Mějme dva jazyky  $L_1$  a  $L_2$  popsané regulárními výrazy

$$L_1 = [0^*1^*0^*1^*0^*], \quad L_2 = [(01 + 10)^*].$$

a) Jaké je nejkratší a nejdelší slovo v průniku  $L_1 \cap L_2$ ?

*Řešení:* Nejkratší je  $\varepsilon$  a nejdelší 01100110, neboť jazyk  $L_2$  nedovoluje opakovat stejný znak za sebou více než dvakrát.

b) Proč žádný z těchto jazyků  $L_1$  a  $L_2$  není podmnožinou toho druhého?

*Řešení:* Protože  $1 \in L_1 - L_2$  a  $010101 \in L_2 - L_1$ .

c) Jaké je nejkratší slovo, které nepatří do sjednocení  $L_1 \cup L_2$ ? Je to jednoznačné?

*Řešení:* 10101, jednoznačně.

**Příklad 8:** Řekněme, že bychom chtěli navrhnout syntaxi pro zápis jednoduchých aritmetických výrazů pomocí slov nad abecedou

$$\Sigma = \{A, B, \dots, Z, a, b, \dots, z, 0, 1, \dots, 9, ., +, -, *, /, (, )\}.$$

- a) Navrhněte, jak budou vypadat identifikátory, a popište to pomocí regulárního výrazu.
- b) Navrhněte, jak budou vypadat číselné konstanty, a popište to pomocí regulárního výrazu.

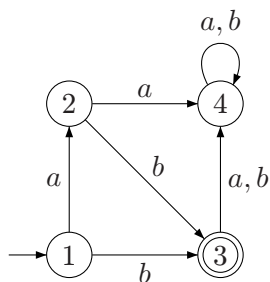
*Poznámka:* Při popisu číselných konstant umožněte jak celočíselné konstanty, např. 129 nebo 0, tak neceločíselné konstanty, např. 3.14, -1e10 nebo 4.2E-23. Zvažte i možnost zápisu číselných konstant v dalších číselných soustavách kromě desítkové (např. hexadecimální, oktalové, binární).

**Příklad 9:** Pro každý z následujících jazyků sestrojte DKA, který ho rozpoznává. Vytvořené automaty znázorněte grafem a zapište tabulkou.

a)  $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = a\}$

b)  $L_2 = \{b, ab\}$

Řešení:

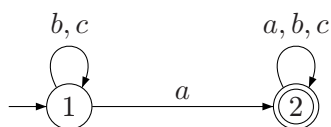


	a	b
→ 1	2	3
2	4	3
⊙ 3	4	4
4	4	4

c)  $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \exists n \in \mathbb{N} : w = a^n\}$

d)  $L_4 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a \geq 1\}$

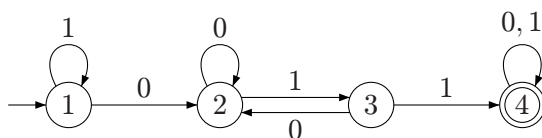
Řešení:



	a	b	c
→ 1	2	1	1
⊙ 2	2	2	2

e)  $L_5 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } 011\}$

Řešení:

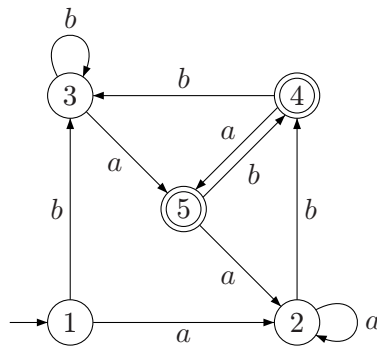


	0	1
→ 1	2	1
2	2	3
3	2	4
→ ⊙ 4	4	4

f)  $L_6 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| > 0 \wedge |w|_a = 0\}$

g)  $L_7 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 2 \text{ a poslední dva symboly slova } w \text{ nejsou stejné}\}$

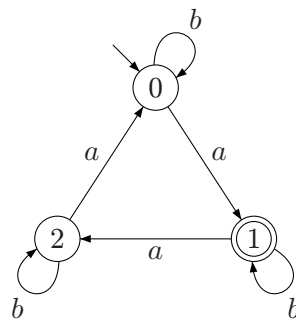
Řešení:



	a	b
→ 1	2	3
2	2	4
3	5	3
4	5	3
5	2	4

$$h) L_8 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \bmod 3 = 1\}$$

Řešení:

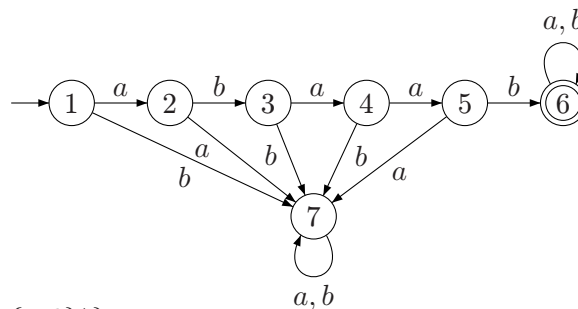


	a	b
→ 0	1	0
1	2	1
2	0	2

**Příklad 10:** Sestrojte DKA přijímající slova začínající *abaab*, končící *abaab* a obsahující *abaab*, tj. sestrojte DKA rozpoznávající následující tři jazyky:

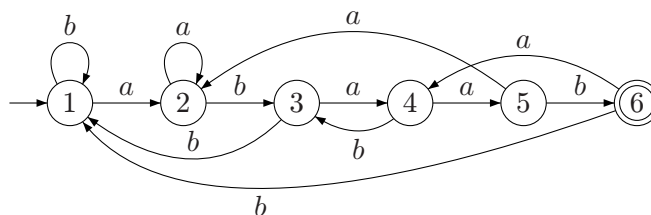
$$a) L_1 = \{abaabw \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

Řešení:



$$b) L_2 = \{wabaab \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

Řešení:



$$c) L_3 = \{w_1abaabw_2 \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$$

---

**Příklad 11:** Navrhněte obecný postup, jak pro daný DKA  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  zjistit, zda:

a)  $L(A) = \emptyset$

b)  $L(A) = \Sigma^*$