Cvičení 6

Příklad 1: Připomeňte si pravidla pro kvantifikátory (∀i, ∀e, ∃i, ∃e). Pomocí těchto pravidel (a dalších dříve zavedených pravidel) dokažte následující sekventy:

a) $\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$
b) $P(f(y,z)), \forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \vdash \neg Q(f(y,z))$
c) $\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$
d) $\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$

Příklad 2: Následující tvrzení formulovaná v přirozené řeči zapište formálně formulemi predikátové logiky 1. řádu.

Každé tvrzení zapište následujícími dvěma způsoby:

- formulí, kde jako predikátové, funkční a konstatní symboly mohou být použity standardní matematické symboly jako třeba $>$, $+$, $\cap$, $\in$, $\subseteq$, zápis číselných konstant pomocí číslic, apod., a kde jsou použity běžné konvence, jako například infixový zápis binárních funkčních a predikátových symbolů,
- formulí, která je vytvořena přesně podle formální definice syntaxe formulí predikátové logiky 1. řádu (přičemž je možné použít standardní konvence pro vynechávání závorek) a kde jsou jako predikátové, funkční a konstantní symboly použita pouze písmena latinské abecedy.

Poznámka: Nejprve vždy určete signaturu, kterou budete používat, tj. určete, co budou jednotlivé predikátové, funkční a konstatní symboly, a jaké budou jejich příslušné arity.

Popište také zamýšlenou interpretaci, kterou máte při vytváření formule na mysli, tj. co bude univerzum, a jaké relace, funkce a prvky univerza budou reprezentovány jednotlivými predikátovými, funkčními a konstatními symboly.

a) Pro jakékoliv přirozené číslo existuje prvočíslo větší než toto číslo.
b) Některé přirozené číslo není beze zbytku dělitelné číslem 5 ani číslem 7.
c) Pro každé reálné číslo větší než 10 platí, že po odečtení čísla 9 dostaneme kladné číslo.
d) Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.
e) Pro každé dvě množiny platí, že jsou obě podmnožinou jejich sjednocení.
f) Průnik dvou množin je podmnožinou obou těchto množin.
g) Každé čtyřkolové motorové vozidlo má volant.

Příklad 3: Pro každý z následujících jazyků uveďte nějakých 5 slov, která do něj patří, a nějakých 5 slov, která do něj nepatří.

a) $L_1 = \{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \mid \text{délka slova } w \text{ je menší než } 5\}$
b) $L_2 = \{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \mid \text{počet výskytů symbolu } \mathtt{b} \text{ ve slově } w \text{ je sudý}\}$
c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ve } w \text{ je každá } 0 \text{ (přímo) následována } 1\}$

d) $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ začíná a končí stejným symbolem}\}$
e) $L_5 = \{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \mid w \text{ obsahuje jako podslovo sekvenci } \mathtt{abb}\}$

Příklad 4: Vezměme si následující abecedu

$$\Sigma = \{\mathtt{A},\mathtt{B},\ldots,\mathtt{Z},\mathtt{a},\mathtt{b},\ldots,\mathtt{z},\mathtt{0},\mathtt{1},\ldots,\mathtt{9},\mathtt{.},\mathtt{+},\mathtt{-},\mathtt{*},\mathtt{/},\mathtt{(},\mathtt{)}\},$$

která obsahuje velká a malá písmena latinské abecedy, číslice `0` až `9` a několik dalších výše uvedených symbolů, jako jsou tečka (`.`), aritmetické operátory (`+`, `-`, `*`, `/`) a závorky.

Řekněme, že bychom chtěli navrhnout syntaxi pro zápis jednoduchých aritmetických výrazů pomocí slov nad abecedou Σ. Zkuste nějakou vhodnou syntaxi pro tento zápis navrhnout a slovně neformálně (ale pokud možno přesně) popsat:

a) Popište, jak budou vypadat identifikátory, tj. jaký jazyk nad abecedou Σ bude odpovídat množině všech identifikátorů.
b) Popište, jak budou vypadat číselné konstanty, tj. jaký jazyk nad abecedou Σ bude odpovídat množině všech číselných konstant.
c) Popište, jak budou vypadat aritmetické výrazy, tj. jaký jazyk nad abecedou Σ bude odpovídat množině všech dobře utvořených aritmetických výrazů.

Příklad 5: Předpokládejme, že $\Sigma = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ a $n \in \mathbb{N}$.

a) Kolik existuje slov ze Σ^* délky n?

b) Kolik existuje slov ze Σ^* délky nejvýše n?