Cvičení 6

Příklad 1: Připomeňte si pravidla pro kvantifikátory ($\forall$i, $\forall$e, $\exists$i, $\exists$e). Pomocí těchto pravidel (a dalších dříve zavedených pravidel) dokažte následující sekventy:

a) $\forall x(P(x) \to Q(x)),\ \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$

Řešení: $\Gamma := \forall x(P(x) \to Q(x)),\ \forall x P(x)$

1. $\Gamma \vdash \forall x(P(x) \to Q(x))$ (Assm)
2. $\Gamma \vdash \forall x(P(x))$ (Assm)
3. $\Gamma \vdash P(x) \to Q(x)$ ($\forall$e 1)
4. $\Gamma \vdash P(x)$ ($\forall$e 2)
5. $\Gamma \vdash Q(x)$ ($\to$e 3,4)
6. $\Gamma \vdash \forall x Q(x)$ ($\forall$i 5)

b) $P(f(y,z)),\ \forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \vdash \neg Q(f(y,z))$

Řešení: $\Gamma := P(f(y,z)),\ \forall x(P(x) \to \neg Q(x))$

1. $\Gamma \vdash \forall x(P(x) \to \neg Q(x))$ (Assm)
2. $\Gamma \vdash P(f(y,z)) \to \neg Q(f(y,z))$ ($\forall$e 1)
3. $\Gamma \vdash P(f(y,z))$ (Assm)
4. $\Gamma \vdash \neg Q(f(y,z))$ ($\to$e 2,3)

c) $\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$

Řešení: $\Gamma := \forall x P(x)$

1. $\Gamma \vdash \forall x P(x)$ (Assm)
2. $\Gamma \vdash P(x)$ ($\forall$e 1)
3. $\Gamma \vdash \exists x P(x)$ ($\exists$i 2)

d) $\forall x(P(x) \to Q(x)),\ \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$

Řešení: $\Gamma := \forall x(P(x) \to Q(x)),\ \exists x P(x)$

1. $\Gamma \vdash \exists x P(x)$ (Assm)
2. $\Gamma, P(x) \vdash \forall x(P(x) \to Q(x))$ (Assm)
3. $\Gamma, P(x) \vdash P(x) \to Q(x)$ ($\forall$e 2)
4. $\Gamma, P(x) \vdash P(x)$ (Assm)
5. $\Gamma, P(x) \vdash Q(x)$ ($\to$e 3,4)
6. $\Gamma, P(x) \vdash \exists x Q(x)$ ($\exists$i 5)
7. $\Gamma \vdash \exists x Q(x)$ ($\exists$e 1,6)

Příklad 2: Následující tvrzení formulovaná v přirozené řeči zapište formálně formulemi predikátové logiky 1. řádu.

Každé tvrzení zapište následujícími dvěma způsoby:

- formulí, kde jako predikátové, funkční a konstatní symboly mohou být použity standardní matematické symboly jako třeba $>$, $+$, $\cap$, $\in$, $\subseteq$, zápis číselných konstant pomocí číslic, apod., a kde jsou použity běžné konvence, jako například infixový zápis binárních funkčních a predikátových symbolů,

- formulí, která je vytvořena přesně podle formální definice syntaxe formulí predikátové logiky 1. řádu (přičemž je možné použít standardní konvence pro vynechávání závorek) a kde jsou jako predikátové, funkční a konstantní symboly použita pouze písmena latinské abecedy.

Poznámka: Nejprve vždy určete signaturu, kterou budete používat, tj. určete, co budou jednotlivé predikátové, funkční a konstatní symboly, a jaké budou jejich příslušné arity.

Popište také zamýšlenou interpretaci, kterou máte při vytváření formule na mysli, tj. co bude univerzum, a jaké relace, funkce a prvky univerza budou reprezentovány jednotlivými predikátovými, funkčními a konstatními symboly.

a) Pro jakékoliv přirozené číslo existuje prvočíslo větší než toto číslo.
b) Některé přirozené číslo není beze zbytku dělitelné číslem 5 ani číslem 7.
c) Pro každé reálné číslo větší než 10 platí, že po odečtení čísla 9 dostaneme kladné číslo.

Řešení:

- Signatura $(\{>, K\}, \{-\}, \{10, 9, 0\}, \mathsf{arity})$, kde $\mathsf{arity}(>) = 2$, $\mathsf{arity}(K) = 1$, $\mathsf{arity}(-) = 2$.

$$\forall x(x > 10 \ \rightarrow\ K(x - b))$$

nebo

$$\forall x(x > 10 \ \rightarrow\ x - 9 > 0)$$

- Signatura $(\{V, K\}, \{g\}, \{a, b, c\}, \mathsf{arity})$, kde $\mathsf{arity}(V) = 2$, $\mathsf{arity}(K) = 1$, $\mathsf{arity}(g) = 2$.

Interpretace, kde univerzum je množina reálných čísel, V reprezentuje binární relaci „větší než“, K unární relaci „být kladný“, g funkci „minus“ a a, b, c konstanty 10, 9 a 0.

$$\forall x(V(x, a) \rightarrow K(g(x, b)))$$

nebo

$$\forall x(V(x, a) \rightarrow V(g(x, b), c))$$

d) Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.
e) Pro každé dvě množiny platí, že jsou obě podmnožinou jejich sjednocení.

Řešení:

- Signatura $(\{\subseteq\}, \{\cup\}, \emptyset, \mathsf{arity})$, kde $\mathsf{arity}(\subseteq) = 2$ a $\mathsf{arity}(\cup) = 2$.

$$\forall x \forall y(x \subseteq x \cup y \ \wedge\ y \subseteq x \cup y)$$

- Signatura $(\{P\}, \{s\}, \emptyset, \mathsf{arity})$, kde $\mathsf{arity}(P) = 2$ a $\mathsf{arity}(s) = 2$.

Interpretace, kde univerzum je množinové univerzum, tj. soubor všech množin (pozor — tento soubor není množina, ale vlastní třída). Symbol P reprezentuje binární relaci „být podmnožinou“ a s binární funkci „sjednocení“.

$$\forall x \forall y(P(x, s(x, y)) \wedge P(y, s(x, y)))$$

f) Průnik dvou množin je podmnožinou obou těchto množin.

g) Každé čtyřkolové motorové vozidlo má volant.

Řešení:

- Signatura $(\{C, M, V\}, \emptyset, \emptyset, \mathsf{arity})$, kde $\mathsf{arity}(C) = \mathsf{arity}(M) = \mathsf{arity}(V) = 1$.
  Interpretace, kde univerzum je množina všech vozidel, C reprezentuje unární relaci „být čtyřkolové“, M unární relaci „být motorové“ a V unární relaci „mít volant“.

$$\forall x(C(x) \wedge M(x) \to V(x))$$

Příklad 3: Pro každý z následujících jazyků uveďte nějakých 5 slov, která do něj patří, a nějakých 5 slov, která do něj nepatří.

a) $L_1 = \{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid$ délka slova w je menší než 5$\}$

Řešení: Slova z jazyka L_1 jsou např. $\varepsilon, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{00}, \mathtt{01}$ atd. Do jazyka L_1 nepatří např. $\mathtt{00000}, \mathtt{00001}, \mathtt{00010}, \mathtt{000000}, \mathtt{1111111}$

b) $L_2 = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid$ počet výskytů symbolu $\mathtt{b}$ ve slově w je sudý$\}$

c) $L_3 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid$ ve w je každá 0 (přímo) následována 1$\}$

Řešení: Slova z jazyka L_1 jsou např. $\varepsilon, \mathtt{1}, \mathtt{01}, \mathtt{11}, \mathtt{101101}$ atd. Do jazyka L_1 nepatří např. $\mathtt{0}, \mathtt{10}, \mathtt{001}, \mathtt{010}, \mathtt{1010}$

d) $L_4 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w$ začíná a končí stejným symbolem$\}$

e) $L_5 = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w$ obsahuje jako podslovo sekvenci $\mathtt{abb}\}$

Příklad 4: Vezměme si následující abecedu

$$\Sigma = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \ldots, \mathtt{Z}, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \ldots, \mathtt{z}, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \ldots, \mathtt{9}, \mathtt{.}, \mathtt{+}, \mathtt{-}, \mathtt{*}, \mathtt{/}, \mathtt{(}, \mathtt{)}\},$$

která obsahuje velká a malá písmena latinské abecedy, číslice `0` až `9` a několik dalších výše uvedených symbolů, jako jsou tečka (`.`), aritmetické operátory (`+`, `-`, `*`, `/`) a závorky.

Řekněme, že bychom chtěli navrhnout syntaxi pro zápis jednoduchých aritmetických výrazů pomocí slov nad abecedou Σ. Zkuste nějakou vhodnou syntaxi pro tento zápis navrhnout a slovně neformálně (ale pokud možno přesně) popsat:

a) Popište, jak budou vypadat identifikátory, tj. jaký jazyk nad abecedou Σ bude odpovídat množině všech identifikátorů.

b) Popište, jak budou vypadat číselné konstanty, tj. jaký jazyk nad abecedou Σ bude odpovídat množině všech číselných konstant.

c) Popište, jak budou vypadat aritmetické výrazy, tj. jaký jazyk nad abecedou Σ bude odpovídat množině všech dobře utvořených aritmetických výrazů.

Příklad 5: Předpokládejme, že $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ a $n \in \mathbb{N}$.

a) Kolik existuje slov ze Σ^* délky n?

Řešení: 2^n

b) Kolik existuje slov ze Σ^* délky nejvýše n?

Řešení:

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = \sum_{i=0}^{n} 2^i = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$