Cvičení 5

Příklad 1: Následující formule převeďte do KNF a DNF:

1. $p \wedge \neg r \wedge s$
2. $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (r \wedge q)$
3. $p \rightarrow (q \wedge r)$
4. $p \leftrightarrow q$
5. $((p \rightarrow \neg q) \rightarrow r) \wedge \neg p$
6. $((p \wedge (q \vee r)) \vee (q \rightarrow \neg r)$

Příklad 2: Pomocí ekvivalentních úprav u následujících formulí rozhodněte, o jakou formuli se jedná (splnitelná, tautologie, kontradikce).

1. $((p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow (q \vee p)))$
2. $\big((p \vee \neg q) \wedge \neg(p \wedge q)\big) \rightarrow (\neg p \vee q)$
3. $\neg\big((q \wedge p) \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \vee q))\big)$
4. $\big((p \vee \neg(p \wedge q)) \rightarrow (\neg p \vee q \vee p)\big) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$

Příklad 3: Následující formule převeďte do ÚKNF a ÚDNF pomocí tabulky nebo ekvivalentních úprav.

1. $(p \leftrightarrow \neg q)$
2. $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow (q \vee p))$
3. $\big((p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow \neg q)\big) \wedge \neg r \wedge p$

Příklad 4: Pro každou z následujících sekvencí symbolů rozhodněte, zda se jedná o a) term, b) formuli predikátové logiky 1. řádu. Pokud se jedná o formuli predikátové logiky 1. řádu, určete, zda je tato formule i) atomická, ii) uzavřená; pokud není formule uzavřená určete množinu volných proměnných, které se v ní vyskytují.

Berte jako dané, že použitá signatura je $(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathsf{arity})$, kde $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$ je množina predikátových symbolů, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ je množina funkčních symbolů a $\mathcal{C} = \{c, d\}$ je množina konstatních symbolů, přičemž $\mathsf{arity}(P) = 1$, $\mathsf{arity}(Q) = 2$, $\mathsf{arity}(R) = 2$, $\mathsf{arity}(f) = 1$ a $\mathsf{arity}(g) = 2$.

Poznámka: Používejte běžné konvence o vypouštění závorek.

1. $(\neg((\neg p) \rightarrow (\neg(\neg r))))$
2. $\forall x \in A : P$
3. $f(c)$
4. $R(c, d)$
5. $\forall x \exists y P(c)$
6. $\forall x \exists x P(x)$
7. $\forall x \exists y P(R(x, y))$
8. $\forall x \exists y f(R(x, y))$
9. $\forall x \exists y P(g(x, y))$
10. $\forall x \exists y f(g(x, y))$
11. $\forall x \exists y P(g(f(f(x)), c))$
12. $\forall x(P(d) \wedge \exists y Q(y, c))$

13. $P(d) \wedge \exists y Q(y,c)$
14. $P(x) \wedge \exists y Q(d,c)$
15. $\forall x \exists y (R(x, f(y)) \leftrightarrow \exists z Q(z,c))$
16. $\forall x P(g(x))$
17. $\forall x R(f(x))$
18. $\forall x R(f(x), f(x), f(x))$
19. $\forall x P(f(x,x))$
20. $\forall x P(g(x,x))$
21. $f(f(g(c,d)))$
22. $P(f(g(c,d)))$
23. $P(f(d)) \rightarrow \forall x P(x)$
24. $P(f(g(f,f)))$
25. $P(f(g(c,x)))$
26. $\forall x (f(x) \rightarrow g(c,x))$
27. $\forall x P(f(x) \rightarrow g(c,x))$
28. $\forall x P(\neg f(x))$
29. $\forall x \neg P(f(x))$
30. $\neg(P(f(x)) \vee Q(y,z))$

U sekvencí symbolů, které jsou termem nebo formulí, nakreslete příslušný abstraktní syntaktický strom.

Příklad 5: Vezměme si signaturu $(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathsf{arity})$, kde $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{C} = \{c, d\}$, přičemž $\mathsf{arity}(P) = 1$, $\mathsf{arity}(Q) = 1$, $\mathsf{arity}(R) = 2$, $\mathsf{arity}(f) = 2$, $\mathsf{arity}(g) = 1$.

Pro každou z následujících formulí a každou z následujícících interpretací s valuací, určete, zda je daná formule pravdivá v dané interpretaci a valuaci.

Formule:

1. $R(c,d)$
2. $R(c,d) \rightarrow R(c,x)$
3. $\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$
4. $\exists x (Q(x) \wedge \forall y R(y, g(x)))$
5. $\exists x \neg P(f(x,y))$
6. $\forall x \exists y \neg R(x, g(g(y)))$

Interpretace:

a) Univerzem je množina $A = \{a, b, c\}$. Funkce $\bar{f}$ a $\bar{g}$ přiřazené funkčním symbolům f a g jsou dány následujícími tabulkami:

$\bar{f}$	a	b	c
a	b	a	c
b	b	b	b
c	a	c	b

x	$\bar{g}(x)$
a	b
b	c
c	c

Konstantám c a d jsou přiřazeny prvky a a b. Predikátu P je přiřazena relace $\{a, c\}$, predikátu Q relace $\emptyset$ a predikátu R relace $\{(a,b), (b,c), (a,c)\}$.

Předpokládejme valuaci v, kde $v(x) = c$, $v(y) = a$ a $v(z) = a$.

b) Univerzem je množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

- Funkčnímu symbolu f je přiřazena funkce $\bar{f} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kde $\bar{f}(x,y) = x + y$.
- Funkčnímu symbolu g je přiřazena funkce $\bar{g} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kde $\bar{g}(x) = x + 1$.
- Konstantám c a d jsou přiřazeny prvky 0 a 2.
- Predikátovému symbolu P je přiřazena relace $\{x \in \mathbb{N} \mid x \bmod 2 = 0\}$.
- Predikátovému symbolu Q je přiřazena relace $\{x \in \mathbb{N} \mid x = y^2 \text{ pro nějaké } y \in \mathbb{N}\}$.
- Predikátovému symbolu R je přiřazena relace $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\}$.

Předpokládejme valuaci v, kde $v(x) = 7$, $v(y) = 2$, $v(z) = 9$.

Příklad 6: Pro každou z následujících formulí najděte nějakou interpretaci, která je jejím modelem, a nějakou interpretaci, která jejím modelem není.

1. $\forall x\big((P(x) \wedge Q(x,a)) \rightarrow R(x)\big)$
2. $\forall x\big(P(a,x) \rightarrow Q(x)\big)$
3. $\exists x\big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$
4. $\forall x\big(P(x) \rightarrow \neg Q(x)\big)$
5. $\exists x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$
6. $\exists x\big(P(x, f(x))\big)$
7. $\forall x \exists y\big(P(x) \rightarrow \neg R(x,y)\big)$