Cvičení 4

Příklad 1: U následujících formulí pomocí tabulkové metody určete všechny modely a rozhodněte, o jakou formuli se jedná (splnitelná, tautologie, kontradikce).

1. $\neg(p \vee q) \rightarrow p$
2. $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge r$
3. $\neg p \wedge \neg(q \vee \neg p)$
4. $(p \wedge q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \leftrightarrow p)$

Příklad 2: Pro každý z následujících sekventů ukažte, že se jedná o nekoretní sekvent, kde příslušný závěr logicky nevyplývá z daných předpokladů. Ukažte vždy nějaký konkrétní protipříklad, tj. nějakou interpretaci (pravdivostní ohodnocení), při které platí všechny předpoklady, ale neplatí závěr.

1. $\neg p \vee (q \rightarrow p) \vdash \neg p \wedge q$
2. $\neg r \rightarrow (p \vee q), r \wedge \neg q \vdash r \rightarrow q$
3. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash p \rightarrow (r \rightarrow q)$
4. $\neg p, p \vee q \vdash \neg q$
5. $p \rightarrow (\neg q \vee r), \neg r \vdash \neg q \rightarrow \neg p$

Příklad 3: Připomeňte si, co to znamená, že formule výrokové logiky jsou logicky ekvivalentní, a co to znamená, že jsou dokazatelně ekvivalentní. Které z následujících ekvivalencí mezi dvojicemi formulí platí? Vaše odpovědi zdůvodněte:

- Pokud ekvivalence $\varphi \Leftrightarrow \psi$ platí, dokažte to buď tabulkovou metodou nebo důkazem $\varphi \dashv\vdash \psi$ (tj. dokázaním sekventů $\varphi \vdash \psi$ a $\psi \vdash \varphi$).
- Pokud ekvivalence $\varphi \Leftrightarrow \psi$ neplatí, ukažte příklad konkrétní interpretace, při které jedna z formulí φ a ψ platí a druhá ne.

1. $p \Leftrightarrow p$
2. $p \Leftrightarrow \neg p$
3. $p \Leftrightarrow \neg\neg p$
4. $\neg p \Leftrightarrow \neg\neg p$
5. $p \wedge p \Leftrightarrow p$
6. $p \vee p \Leftrightarrow p$
7. $p \rightarrow p \Leftrightarrow p$
8. $p \leftrightarrow p \Leftrightarrow p$
9. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
10. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
11. $p \rightarrow q \Leftrightarrow q \rightarrow p$
12. $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$
13. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
14. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
15. $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$
16. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
17. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$
18. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge r$
19. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
20. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$
21. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
22. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
23. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge q$
24. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

25. $\neg(p \to q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \to \neg q$
26. $(p \to q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \wedge q$
27. $(p \to q) \;\Leftrightarrow\; p \wedge \neg q$
28. $(p \to q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee q$
29. $(p \to q) \;\Leftrightarrow\; p \vee \neg q$
30. $(p \leftrightarrow q) \;\Leftrightarrow\; (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$
31. $(p \leftrightarrow q) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
32. $(p \to q) \;\Leftrightarrow\; (p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$
33. $(p \leftrightarrow q) \;\Leftrightarrow\; (p \to q) \vee (q \to p)$
34. $(p \leftrightarrow q) \;\Leftrightarrow\; (p \to q) \wedge (q \to p)$