Cvičení 3

Příklad 1: Připomeňte si pravidla pro důkazy sporem (Ctr, CtrN) a další pravidla, která se z nich dají odvodit (CtrA, ¬¬i, ¬¬e, Cp, PC, Ch).

S případným využitím těchto pravidel (a dalších dříve zavedených pravidel) dokažte:

a) $\neg p \vdash \neg(p \wedge q)$

Řešení:

1.	$p \wedge q \vdash p \wedge q$	(Assm)
2.	$p \wedge q \vdash p$	($\wedge e_1$ 1)
3.	$\neg p \vdash \neg(p \wedge q)$	(Cp (a) 2)

b) $\neg(p \wedge q), p \vdash \neg q$

Řešení:

1.	$p, q \vdash p$	(Assm)
2.	$p, q \vdash q$	(Assm)
3.	$p, q \vdash p \wedge q$	($\wedge$i 1,2)
4.	$p, \neg(p \wedge q) \vdash \neg q$	(Cp (a) 3)
5.	$\neg(p \wedge q), p \vdash \neg q$	(Ant 4)

c) $\neg p, p \vee q \vdash q$
d) $\neg(p \vee q) \vdash \neg p$
e) $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$
f) $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$
g) $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$
h) $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$

Řešení:

1.	$p \vdash p$	(Assm)
2.	$p \vdash p \vee q$	($\vee i_1$ 1)
3.	$\neg(p \vee q) \vdash \neg p$	(Cp (a) 2)
4.	$q \vdash q$	(Assm)
5.	$q \vdash p \vee q$	($\vee i_2$ 4)
6.	$\neg(p \vee q) \vdash \neg q$	(Cp (a) 5)
7.	$\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$	($\wedge$i 3,6)

i) $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$

Řešení: $\varphi := \neg p \wedge \neg q$

1. $\varphi, p \vee q \vdash p \vee q$ (Assm)
2. $\varphi, p \vee q, p \vdash p$ (Assm)
3. $\varphi, p \vee q, p \vdash \neg p \wedge \neg q$ (Assm)
4. $\varphi, p \vee q, p \vdash \neg p$ ($\wedge e_1$ 3)
5. $\varphi, p \vee q, p \vdash \neg(p \vee q)$ (CtrA 2,4)
6. $\varphi, p \vee q, q \vdash q$ (Assm)
7. $\varphi, p \vee q, q \vdash \neg p \wedge \neg q$ (Assm)
8. $\varphi, p \vee q, q \vdash \neg q$ ($\wedge e_2$ 7)
9. $\varphi, p \vee q, q \vdash \neg(p \vee q)$ (CtrA 6,8)
10. $\varphi, p \vee q \vdash \neg(p \vee q)$ ($\vee$e 1,5,9)
11. $\varphi \vdash \neg(p \vee q)$ (Ctr 1,10)

Příklad 2: Připomeňte si logickou spojku implikace ($\rightarrow$) a její tabulku pravdivostních hodnot. Připomeňte si odvozovací pravidla pro implikaci ($\rightarrow$i, $\rightarrow$e).
S využitím těchto pravidel (a dalších dříve zavedených pravidel) dokažte:

a) $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Řešení:
1. $p, q \vdash p$ (Assm)
2. $p \vdash q \rightarrow p$ ($\rightarrow$i 1)
3. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$ ($\rightarrow$i 2)

b) $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Řešení:
1. $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash p$ (Assm)
2. $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$ (Assm)
3. $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash q \rightarrow r$ ($\rightarrow$e 2,1)
4. $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q$ (Assm)
5. $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash q$ ($\rightarrow$e 4,1)
6. $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$ ($\rightarrow$e 5,3)
7. $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q \vdash p \rightarrow r$ ($\rightarrow$i 6)
8. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ ($\rightarrow$i 7)
9. $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ ($\rightarrow$i 8)

c) $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$
d) $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$
e) $p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$

Příklad 3: Připomeňte si pravidla pro ekvivalenci ($\leftrightarrow$i, $\leftrightarrow e_1$, $\leftrightarrow e_2$).
S využitím těchto pravidel (a dalších dříve zavedených pravidel) dokažte:

a) $\vdash p \leftrightarrow p$

Řešení:

1. $p \vdash p$ (Assm)
2. $\vdash p \leftrightarrow p$ ($\leftrightarrow$i 1,1)

b) $p \leftrightarrow q \vdash q \leftrightarrow p$

c) $p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r \vdash p \leftrightarrow r$

Řešení: $\Gamma := p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r$

1. $\Gamma, p \vdash p \leftrightarrow q$ (Assm)
2. $\Gamma, p \vdash p$ (Assm)
3. $\Gamma, p \vdash q$ ($\leftrightarrow e_1$ 1,2)
4. $\Gamma, p \vdash q \leftrightarrow r$ (Assm)
5. $\Gamma, p \vdash r$ ($\leftrightarrow e_1$ 4,3)
6. $\Gamma, r \vdash q \leftrightarrow r$ (Assm)
7. $\Gamma, r \vdash r$ (Assm)
8. $\Gamma, r \vdash q$ ($\leftrightarrow e_2$ 6,7)
9. $\Gamma, r \vdash p \leftrightarrow q$ (Assm)
10. $\Gamma, r \vdash p$ ($\leftrightarrow e_2$ 9,8)
11. $\Gamma \vdash p \leftrightarrow r$ ($\leftrightarrow$i 5,10)

d) $p \leftrightarrow q, q \vee r \vdash p \vee r$

Příklad 4: Připomeňte si pravidla $\top$i, $\bot$e, $\neg$i a $\neg$e.
S využitím těchto pravidel (a dalších dříve zavedených pravidel) dokažte:

a) $p \vee \bot \vdash p$

Řešení:

1. $p \vee \bot \vdash p \vee \bot$ (Assm)
2. $p \vee \bot, p \vdash p$ (Assm)
3. $p \vee \bot, \bot \vdash \bot$ (Assm)
4. $p \vee \bot, \bot \vdash p$ ($\bot$e 3)
5. $p \vee \bot \vdash p$ ($\vee$e 1,2,4)

b) $p \vdash p \wedge \top$

c) $p \to \bot \vdash \neg p$

d) $\neg p \vdash p \to \bot$

e) $\neg \top \vdash \bot$

f) $\top \to (p \vee q), \neg q \vdash p$

Řešení: $\Gamma := \top \to (p \vee q), \neg q$

1. $\Gamma \vdash \top \to (p \vee q)$ (Assm)
2. $\vdash \top$ ($\top$i)
3. $\Gamma \vdash \top$ (Ant 2)
4. $\Gamma \vdash p \vee q$ ($\to$e 1,3)
5. $\Gamma, p \vdash p$ (Assm)
6. $\Gamma, q \vdash \neg q$ (Assm)
7. $\Gamma, q \vdash q$ (Assm)
8. $\Gamma, q \vdash p$ (CtrA 6,7)
9. $\Gamma \vdash p$ ($\vee$e 4,5,8)

Příklad 5: Určete, které z následujících sekvencí symbolů jsou dobře vytvořenými formulemi výrokové logiky

a) pokud použijeme formální definici formulí výrokové logiky,
b) pokud použijeme konvence o vypouštění závorek.

Vaše odpovědi zdůvodněte.

1. $)(p)\neg \wedge \wedge$

   Řešení: a) ne, b) ne
2. $\forall x : q(x) \wedge r(x, x)$
3. p
4. $(\neg(\neg q))$
5. $(\neg(\neg q()))$
6. $(\neg(\neg)q)$
7. $(p\neg q)$
8. $\wedge pq$
9. $p \wedge q$
10. $(p \wedge q)$
11. $((p \wedge q))$
12. $((p \wedge q) \vee r)$
13. $((\neg p) \vee (q \leftrightarrow (\neg r)))$
14. $r \vee \neg q \vee s$
15. $(\neg r \vee \neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee s)$

    Řešení: a) ne, b) ano
16. $(\neg((\neg p) \rightarrow (\neg(\neg r))))$

    Řešení: a) ano, b) ano

U těch sekvencí symbolů, které jsou dobře vytvořenými formulemi výrokové logiky, nakreslete příslušný abstraktní syntaktický strom.