

Cvičení 1

Příklad 1: Pro každý z následujících formálních zápisů množin uveďte (svými slovy), jaké prvky daná množina obsahuje:

- (a) $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$
- (b) $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
- (c) $\{n \mid n = 2m \text{ pro nějaké } m \in \mathbb{N}\}$
- (d) $\{n \mid n = 2m \text{ pro nějaké } m \in \mathbb{N} \text{ a } n = 3k \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}\}$
- (e) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = n + 1\}$

Příklad 2: Popište vhodným formálním zápisem následující množiny:

- (a) Množina obsahující čísla 1, 10 a 100.
- (b) Množina obsahující všechna celá čísla větší než 5.
- (c) Množina obsahující všechna přirozená čísla menší než 5.
- (d) Množina neobsahující žádné prvky.
- (e) Množina všech podmnožin dané množiny X .

Příklad 3: Uvažujme množiny $A = \{x, y, z\}$ a $B = \{x, y\}$.

- (a) Je $A \subseteq B$?
- (b) Je $A \supseteq B$?
- (c) Co je $A \cup B$?
- (d) Co je $A \cap B$?
- (e) Co je $A \times B$?
- (f) Co je $\mathcal{P}(B)$?

Příklad 4: Rozhodněte, zda platí:

- (a) $a \in \{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}$
- (b) $\{a, \{a\}\} \cap \mathcal{P}(\{a, \{a\}\}) = \emptyset$
- (c) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

Příklad 5: Určete všechny prvky následujících množin:

- (a) $\{a, \{a\}\} \cup \{a, \{b\}, c\}$
- (b) $\{a, \{a\}\} \cap \{a, \{b\}, c\}$
- (c) $\{a, \{a\}\} - \{a, \{b\}, c\}$

Příklad 6: Jestliže množina A má a prvků a množina B má b prvků, kolik prvků má množina $A \times B$? Vaši odpověď vysvětlete.

Příklad 7: Jestliže množina C má c prvků, kolik prvků má množina $\mathcal{P}(C)$? Vaši odpověď vysvětlete.

Příklad 8: Připomeňte si, co je to relace, a jaké znáte typy relací (homogenní vs. nehomogenní, unární, binární, atd.).

- Přesně definujte, co to znamená, že relace je reflexivní, ireflexivní, symetrická, asymetrická, antisymetrická, tranzitivní, funkční.
- Uvědomte si souvislost mezi binárními relacemi a orientovanými grafy (které mohou být i nekonečné) a popište, co jednotlivé vlastnosti uvedené v předchozím bodě znamenají z hlediska grafu reprezentujícího příslušnou relaci.
- Připomeňte si, co to znamená, že relace je ekvivalence. Jak pojem ekvivalence souvisí s pojmem rozkladu?

Příklad 9: Uveďte příklad binární relace, která je:

- Reflexivní a symetrická, ale není tranzitivní.
- Reflexivní a tranzitivní, ale není symetrická.
- Symetrická a tranzitivní, ale není reflexivní.

Příklad 10: Připomeňte si, co to znamená, že relace je uspořádání. Jaké znáte typy uspořádání? Uveďte příklad uspořádání na množině přirozených čísel, které není úplným uspořádáním.

Příklad 11: Nechť $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $Y = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Unární funkce $f : X \rightarrow Y$ a binární funkce $g : X \times Y \rightarrow Y$ jsou popsány následujícími tabulkami:

n	$f(n)$
1	6
2	7
3	6
4	7
5	6

g	6	7	8	9	10
1	10	10	10	10	10
2	7	8	9	10	6
3	7	7	8	8	9
4	9	8	7	6	10
5	6	6	6	6	6

- Jaká je hodnota $f(2)$?
- Co definičním oborem a oborem hodnot funkce f ?
- Jaká je hodnota $g(2, 10)$?
- Co definičním oborem a oborem hodnot funkce g ?

(e) Jaká je hodnota $g(4, f(4))$?

Příklad 12: Připomeňte si, co to znamená, že funkce je injektivní (prostá), surjektivní (na) a bijektivní. Je funkce $f(x) = x + 1$ injektivní, surjektivní a/nebo bijektivní na množině přirozených čísel \mathbb{N} ? A na množině celých čísel \mathbb{Z} ?

Příklad 13: Připomeňte si pojem binární operace na množině a co to znamená, že daná operace je asociativní, a co to znamená, že je komutativní. Uveďte příklad operace, která:

- (a) je asociativní, ale není komutativní,
- (b) je komutativní, ale není asociativní.
- (c) není asociativní ani komutativní.

***Příklad 14:** Uvažujme asociativní operaci \circ na množině S . Ukažte, že hodnota výrazu $x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n$, kde $x_i \in S$, je dobře definovaná, neboť tato hodnota nezávisí na konkrétním uzávorkování.