Normální formy formulí

Uvažujme nyní pouze formule výrokové logiky.

- **Literál** — atomický výrok nebo jeho negace, např. p nebo $\neg r$

$$L ::= p \mid \neg p$$

- **Elementární konjunkce** — konjunkce jednoho nebo více literálů, např. $p \wedge \neg q$, r, $q \wedge \neg r \wedge p$

$$C ::= L \mid L \wedge C$$

- **Elementární disjunkce** (**klauzule**) — disjunkce jednoho nebo více literálů, např. $p \vee \neg q$, r, $q \vee \neg r \vee p$

$$D ::= L \mid L \vee D$$

Normální formy formulí

- **Disjunktivní normální forma** (**DNF**) — disjunkce jedné nebo více elementárních konjunkcí, např. $(p \wedge \neg q) \vee (\neg r) \vee (\neg r \wedge \neg p \wedge \neg q)$

$$E \ ::= \ C \ \mid \ C \vee E$$

- **Konjunktivní normální forma** (**KNF**) — konjunkce jedné nebo více elementárních disjunkcí (klauzulí),
  např. $(p \vee \neg q) \wedge (\neg r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q)$

$$F \ ::= \ D \ \mid \ D \wedge F$$

Poznámka: Formule $\bot$ a $\top$ také budeme považovat za formule v DNF a KNF.

Normální formy formulí

- U formulí v KNF se snadno zjistí, jestli jde nebo nejde o tautologii:

  U tautologie v KNF musí každá klauzule obsahovat jako literál nějaký atomický výrok p a zároveň jeho negaci $\neg p$.

- U formulí v DNF se snadno zjistí, jestli jde nebo nejde o kontradikci:

  U kontradikce v DNF musí každá elementární konjunkce obsahovat nějaký atomický výrok p a zároveň jeho negaci $\neg p$.

Normální formy formulí

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

DNF:

$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

KNF:

$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Normální formy formulí

Pokud uvažujeme pevně danou **konečnou** množinu atomických výroků At:

- **Úplná disjunktivní normální forma** (**ÚDNF**) — formule v DNF, kde každá elementární konjunkce obsahuje každý atomický výrok z At právě jednou.

  Příklad: $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

- **Úplná konjunktivní normální forma** (**ÚKNF**) — formule v KNF, kde každá klauzule obsahuje každý atomický výrok z At právě jednou.

  Příklad: $(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$

Poznámka: V příkladech je $At = \{p, q, r\}$.

Množiny

Množina — soubor prvků

Prvek a je prvkem množiny S:

$$a \in S$$

Prvek a není prvkem množiny S: $a \notin S$

Konečnou množinu je možné vyjádřit výčtem prvků, které obsahuje:

$$S = \{a, b, c\}$$

Podmnožina: $S \subseteq T$ — každý prvek množiny S je prvkem množiny T

Uspořádané n-tice

Uspořádaná n-tice: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nebo $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$

- Uspořádaná dvojice: (a, b) nebo $\langle a, b \rangle$
- Uspořádaná trojice: (a, b, c) nebo $\langle a, b, c \rangle$
- ...

Kartézský součin:

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$$

— množina všech uspořádaných n-tic

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

kde $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$, ..., $a_n \in S_n$

Relace

Relace: $R \subseteq S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$

- vyjádření vztahů mezi n-ticemi prvků
- n — arita relace
  - $n = 1$ — unární
  - $n = 2$ — binární
  - $n = 3$ — ternární

Příklad: Binární relace $R_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tvořená dvojicemi čísel (m, n), kde $m < n$

$$(m, n) \in R_1 \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad m < n$$

Poznámka: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Relace

Predikát — dané n-tici prvků $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ přiřadí pravdivostní hodnotu podle toho, zda je nebo není tato n-tice v dané relaci R:

$$R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Tj. $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ platí právě tehdy, když $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$.

Příklad: Predikát R_1, kde

$$R_1(m, n)$$

platí právě tehdy, když $(m, n) \in R_1$, tj. když $m < n$

Relace

Unární relace — $R \subseteq S$ vyjařuje nějakou vlastnost prvků z množiny S

Příklad: Unární relace $R_2 \subseteq \mathbb{N}$ tvořená těmi čísly, která jsou prvočísly

Predikát R_2 vyjádřující, že n je prvočíslo

$$R_2(n)$$

Funkce

Funkce — binární relace $f \subseteq S \times T$ splňující:

- pokud $(x, y_1) \in f$ a $(x, y_2) \in f$, pak $y_1 = y_2$

Tj. ke každému prvku $x \in S$ existuje nejvýše jeden prvek $y \in T$ takový, že $(x, y) \in f$.

Tento prvek se označuje

$$f(x)$$

Funkce f — reprezentuje zobrazení, které prvkům z množiny S přiřazuje prvky z množiny T:

$$f : S \to T$$

Totální vs. parciální funkce

Funkce

Funkce $f : S \to T$, kde $S = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$:

$$f : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to T$$

n — arita funkce f

Místo $f((a_1, a_2, \ldots, a_n))$ se píše $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Příklad: Binární funkce $f_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která dvojici přirozených čísel přiřadí jejich součet

$$f_1(x, y) = x + y$$

Struktury

Struktura — neprázdná množina prvků spolu s několika relacemi a funkcemi nad prvky této množiny

Příklad: Množina $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ spolu s následujícími relacemi a funkcemi:

- unární funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f(x) = x + 1$
- binární funkce $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $g(x, y) = x + y$
- binární funkce $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $h(x, y) = x \cdot y$
- binární relace $P \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, kde $(x, y) \in P$ právě tehdy, když $x = y$
- binární relace $Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, kde $(x, y) \in Q$ právě tehdy, když $x < y$

Struktury

Příklad: Množina $A = \{a, b, c\}$ spolu následující funkcemi f a g a relací R:

- unární funkce $f : A \to A$ a binární funkce $g : A \times A \to A$

x	$f(x)$
a	b
b	a
c	b

g	a	b	c
a	c	a	a
b	a	b	c
c	a	c	c

- binární relace $R \subseteq A \times A$, kde

$$R = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, b)\}$$

Signatury

Signatura — čtveřice

$$(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \text{arity})$$

- $\mathcal{P}$ — množina **predikátových symbolů**
- $\mathcal{F}$ — množina **funkčních symbolů**
- $\mathcal{C}$ — množina **konstantních symbolů**
- $\text{arity} : \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ — funkce určující **aritu** jednotlivých predikátových a funkčních symbolů

Příklad: Signatura $S = (\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \text{arity})$, kde $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{C} = \{c, d\}$ a kde $\text{arity}(P) = 1$, $\text{arity}(Q) = 1$, $\text{arity}(R) = 2$, $\text{arity}(f) = 2$, $\text{arity}(g) = 1$

Interpretace

Signatura $S = (\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathrm{arity})$

Interpretace: $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$

- A — **univerzum** — libovolná neprázdná množina
- $\mathfrak{a}$ — zobrazení přiřazující význam jednotlivým symbolům signatury S:
  - pro $P \in \mathcal{P}$ (kde $\mathrm{arity}(P) = n$):
    $\mathfrak{a}(P) = P^{\mathfrak{A}}$, kde $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ je libovolná n-ární relace nad množinou A
  - pro $f \in \mathcal{F}$ (kde $\mathrm{arity}(f) = n$):
    $\mathfrak{a}(f) = f^{\mathfrak{A}}$, kde $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ je libovolná n-ární (totální) funkce nad množinou A
  - pro $c \in \mathcal{C}$:
    $\mathfrak{a}(c) = c^{\mathfrak{A}}$, kde $c^{\mathfrak{A}} \in A$ je libovolný prvek univerza A

Valuace

Proměnné: $Var = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$

Poznámka: Proměnné budeme označovat x, y, z

Předpokládejme interpretaci $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$.

Valuace — určuje hodnoty proměnných, přiřazuje proměnným prvky univerza:

$$v : Var \to A$$

Interpretace a valuace:

$$\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, v)$$

Termy

Term — výraz označující prvek univerza:

- x — kde $x \in Var$
- c — kde $c \in \mathcal{C}$
- $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — kde $f \in \mathcal{F}$, $\mathrm{arity}(f) = n$ a kde $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy

Příklady termů: x c $f(x, y)$ $f(g(x), f(c, y))$

Syntaxe:

$$t \quad ::= \quad x \mid c \mid f(t, t, \ldots, t)$$

Termy

Interpretace a valuace $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, v)$

$\mathfrak{I}(t)$ — hodnota, jaké nabývá term t v interpretaci $\mathfrak{A}$ při ohodnocení v

- pro $x \in Var$: $\mathfrak{I}(x) = v(x)$
- Pro $c \in \mathcal{C}$: $\mathfrak{I}(c) = c^{\mathfrak{A}}$
- Pro $f \in \mathcal{F}$ (kde $\mathrm{arity}(f) = n$) a termy $t_1, t_2, \ldots, t_n$:
  $\mathfrak{I}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_1), \mathfrak{I}(t_2), \ldots, \mathfrak{I}(t_n))$

Atomické formule

Atomická formule:

$$P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

kde $P \in \mathcal{P}$ (kde $\mathrm{arity}(P) = n$) a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy

Příklady atomických formulí: $P(x)$ $Q(g(g(c)))$ $R(f(x, y), x)$

Interpretace a valuace $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, v)$

Formule φ platí při interpretaci $\mathfrak{A}$ a valuaci v:

$$\mathfrak{I} \models \varphi$$

- $\mathfrak{I} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ právě tehdy, když $(\mathfrak{I}(t_1), \mathfrak{I}(t_2), \ldots, \mathfrak{I}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$.

Rovnost

Rovnost (**identita**): označuje se symbolem $=$

Atomická formule:

$$t_1 = t_2$$

Příklady atomických formulí s rovností:

$$x = y \qquad f(f(x, y), z) = g(x)$$

- $\mathfrak{I} \models t_1 = t_2$ právě tehdy, když $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$

Kvantifikátory

Formule je možné vytvářet z menších podformulí pomocí logických spojek: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\bot$, $\top$

Kromě toho je možné ve formulích používat **kvantifikátory**:

- univerzální kvantifikátor: $\forall$
- existenční kvantifikátor: $\exists$

Pokud φ je formule a x je proměnná ($x \in \mathit{Var}$), tak i:

- $\forall x \varphi$ je formule

  — reprezentuje tvrzení „pro každý prvek x platí φ", „pro všechna x platí φ", apod.

- $\exists x \varphi$ je formule

  — reprezentuje tvrzení „existuje prvek x, pro který platí φ", „pro nějaké x platí φ", apod.

Kvantifikátory

Interpretace $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$, valuace $v : Var \to A$

$x \in Var$, $a \in A$

Zápis

$$v[x \mapsto a]$$

označuje valuaci $v' : Var \to A$, která se s valuací v shoduje v hodnotách všech proměnných jiných než x, a kde x nabývá hodnoty a

Tj. pro $y \in Var$ je

$$v'(y) = \begin{cases} a & \text{pokud } y = x \\ v(y) & \text{jinak} \end{cases}$$

$\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, v)$

$$\mathfrak{I}[x \mapsto a] = (\mathfrak{A}, v[x \mapsto a])$$

Kvantifikátory

- $\mathfrak{I} \models \forall x \varphi$ platí právě tehdy, když pro každé $a \in A$ platí $\mathfrak{I}[x \mapsto a] \models \varphi$
- $\mathfrak{I} \models \exists x \varphi$ platí právě tehdy, když existuje nějaké $a \in A$ takové, že $\mathfrak{I}[x \mapsto a] \models \varphi$

Příklady formulí:

- $\forall x \exists y R(x, y)$ — ke každému x existuje y takové, že x a y jsou v relaci R
- $\neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))$ — neexistuje x, pro které by současně platilo $P(x)$ a $Q(x)$
- $\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$ — pokud existuje x, pro které platí $P(x)$, pak pro každé y platí $Q(y)$

Predikátová logika 1. řádu — shrnutí

Symboly:

- Logické symboly:
  - **proměnné**: $x \in Var$, kde $Var = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$
  - **logické spojky**: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - **kvantifikátory**: $\forall$, $\exists$
  - **závorky**:), (
  - **symbol pro rovnost**: $=$
- Mimologické symboly — dány signaturou $S = (\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \text{arity})$:
  - **predikátové symboly**: $P \in \mathcal{P}$
  - **funkční symboly**: $f \in \mathcal{F}$
  - **konstantní symboly**: $c \in \mathcal{C}$

Syntaxe:

$$
\begin{array}{rcl}
t & ::= & x \mid c \mid f(t, t, \ldots, t) \\
\varphi & ::= & P(t, t, \ldots, t) \mid t = t \mid \bot \mid \top \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \\
 & & \mid \varphi \rightarrow \varphi \mid \varphi \leftrightarrow \varphi \mid \forall x \varphi \mid \exists x \varphi
\end{array}
$$

Sémantika:

Hodnota termu při $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, v)$:

- pro $x \in Var$: $\mathfrak{I}(x) = v(x)$
- pro $c \in \mathcal{C}$: $\mathfrak{I}(c) = c^{\mathfrak{A}}$
- pro $f \in \mathcal{F}$ (kde $\mathrm{arity}(f) = n$) a termy $t_1, t_2, \ldots, t_n$:
  $\mathfrak{I}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_1), \mathfrak{I}(t_2), \ldots, \mathfrak{I}(t_n))$

Predikátová logika 1. řádu — shrnutí

Pravdivost formule při $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{a})$:

- Pro $P \in \mathcal{P}$, kde $\mathrm{arity}(P) = n$, a pro termy $t_1, t_2, \ldots, t_n$ platí $\mathfrak{I} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ právě tehdy, když $(\mathfrak{I}(t_1), \mathfrak{I}(t_2), \ldots, \mathfrak{I}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$
- Pro termy t_1, t_2 platí $\mathfrak{I} \models t_1 = t_2$ právě tehdy, když $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$
- $\mathfrak{I} \models \bot$ neplatí nikdy, tj. vždy platí $\mathfrak{I} \not\models \bot$
- $\mathfrak{I} \models \top$ platí vždy
- $\mathfrak{I} \models \neg\varphi$ platí právě tehdy, když $\mathfrak{I} \not\models \varphi$
- $\mathfrak{I} \models \varphi \wedge \psi$ platí právě tehdy, když $\mathfrak{I} \models \varphi$ a $\mathfrak{I} \models \psi$
- $\mathfrak{I} \models \varphi \vee \psi$ platí právě tehdy, když $\mathfrak{I} \models \varphi$ nebo $\mathfrak{I} \models \psi$
- $\mathfrak{I} \models \varphi \rightarrow \psi$ platí právě tehdy, když $\mathfrak{I} \not\models \varphi$ nebo $\mathfrak{I} \models \psi$
- $\mathfrak{I} \models \varphi \leftrightarrow \psi$ platí právě tehdy, když $\mathfrak{I} \models \varphi$ a $\mathfrak{I} \models \psi$, nebo když $\mathfrak{I} \not\models \varphi$ a $\mathfrak{I} \not\models \psi$
- $\mathfrak{I} \models \forall x \varphi$ platí právě tehdy, když pro každé $a \in A$ platí $\mathfrak{I}[x \mapsto a] \models \varphi$
- $\mathfrak{I} \models \exists x \varphi$ platí právě tehdy, když existuje nějaké $a \in A$ takové, že $\mathfrak{I}[x \mapsto a] \models \varphi$

Volné a vázané výskyty proměnných

Každý výskyt proměnné x ve v podformuli tvaru $\exists x \varphi$ nebo $\forall x \varphi$ je **vázaný**.

Výskyt proměnné, který není vázaný, je **volný**.

$\mathrm{free}(t)$ — množina proměnných, které se vyskytují jako volné proměnné v termu t:

- $\mathrm{free}(x) = \{x\}$ pro $x \in \mathit{Var}$
- $\mathrm{free}(c) = \emptyset$ pro $c \in \mathcal{C}$
- $\mathrm{free}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = \mathrm{free}(t_1) \cup \mathrm{free}(t_2) \cup \ldots \cup \mathrm{free}(t_n)$ pro $f \in \mathcal{F}$

$\mathrm{free}(\varphi)$ — množina proměnných, které se vyskytují jako volné proměnné ve formuli φ:

- $\mathrm{free}(P(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = \mathrm{free}(t_1) \cup \mathrm{free}(t_2) \cup \cdots \cup \mathrm{free}(t_n)$ pro $P \in \mathcal{P}$
- $\mathrm{free}(t_1 = t_2) = \mathrm{free}(t_1) \cup \mathrm{free}(t_2)$
- $\mathrm{free}(\bot) = \mathrm{free}(\top) = \emptyset$
- $\mathrm{free}(\neg\varphi) = \mathrm{free}(\varphi)$
- $\mathrm{free}(\varphi * \psi) = \mathrm{free}(\varphi) \cup \mathrm{free}(\psi)$ pro $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- $\mathrm{free}(\mathrm{Q}x\varphi) = \mathrm{free}(\varphi) - \{x\}$ pro $\mathrm{Q} \in \{\exists, \forall\}$ a $x \in \mathit{Var}$

Volné a vázané výskyty proměnných

Pravdivost formule φ při $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, v)$ závisí pouze na $\mathfrak{A}$ a hodnotách, které v přiřazuje proměnným z množiny $\mathsf{free}(\varphi)$.

Speciálně v případě, kdy $\mathsf{free}(\varphi) = \emptyset$, tak pravdivost φ při $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, v)$ závisí pouze na interpretaci $\mathfrak{A}$.

Pro formule φ, kde $\mathsf{free}(\varphi) = \emptyset$, můžeme psát

$$\mathfrak{A} \models \varphi \qquad \text{nebo} \qquad \mathfrak{A} \not\models \varphi$$

Formule φ, kde $\mathsf{free}(\varphi) = \emptyset$, se nazývá **uzavřená formule** neboli **sentence**.