Syntaxe — logické spojky

- Pokud φ je dobře vytvořená formule, tak i $\neg\varphi$ je dobře vytvořená formule.
- Pokud φ a ψ jsou dobře vytvořené formule, tak i $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou dobře vytvořené formule.
- $\bot$ a $\top$ jsou dobře vytvořené formule.

Abstraktní syntaktický strom (abstract syntax tree).

Konvence pro vypouštění závorek.

Výroková logika — syntaxe

At — množina atomických výroků

Abeceda — množina symbolů:

- atomické výroky: všechny prvky z At
- logické spojky: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\bot$, $\top$
- závorky: $)$, $($

Jazyk — které sekvence symbolů jsou formulemi:

- Pokud $p \in At$, tak p je formule.
- $\bot$ a $\top$ jsou formule.
- Pokud φ je formule, tak i $\neg\varphi$ je formule.
- Pokud φ a ψ jsou formule, tak i $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou formule.
- Neexistují žádné další formule než ty, vytvořené podle předchozích bodů.

Výroková logika — syntaxe

Stručnější popis syntaxe pomocí tzv. Backus-Naurovy formy:

$$\varphi \ ::= \ p \ | \ \bot \ | \ \top \ | \ \neg\varphi \ | \ (\varphi \land \varphi) \ | \ (\varphi \lor \varphi) \ | \ (\varphi \rightarrow \varphi) \ | \ (\varphi \leftrightarrow \varphi)$$

p reprezentuje libovolný atomický výrok z množiny At

V tzv. abstraktní syntaxi se abstrahuje od detailů jako jsou závorky, priority apod.:

$$\varphi \ ::= \ p \ | \ \bot \ | \ \top \ | \ \neg\varphi \ | \ \varphi \land \varphi \ | \ \varphi \lor \varphi \ | \ \varphi \rightarrow \varphi \ | \ \varphi \leftrightarrow \varphi$$

Alternativní způsob zápisu abstraktní syntaxe:

$$\varphi \ ::= \ p \ | \ \bot \ | \ \top \ | \ \neg\varphi_1 \ | \ \varphi_1 \land \varphi_2 \ | \ \varphi_1 \lor \varphi_2 \ | \ \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \ | \ \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$$

Výroková logika — sémantika

Pravdivostní ohodnocení: $\nu : At \to \{0, 1\}$

- $\nu \models \varphi$ — formule φ platí (tj. je pravdivá) při ohodnocení ν
- $\nu \not\models \varphi$ — formule φ neplatí (tj. je nepravdivá) při ohodnocení ν

Definice toho, kdy je formule pravdivá při ohodnocení ν:

- $\nu \models p$, kde $p \in At$, platí právě tehdy, když $\nu(p) = 1$.
- $\nu \models \bot$ neplatí nikdy (tj. vždy platí $\nu \not\models \bot$).
- $\nu \models \top$ platí vždy.
- $\nu \models \neg\varphi$ platí právě tehdy, když $\nu \not\models \varphi$.
- $\nu \models \varphi \wedge \psi$ platí právě tehdy, když $\nu \models \varphi$ a $\nu \models \psi$.
- $\nu \models \varphi \vee \psi$ platí právě tehdy, když $\nu \models \varphi$ nebo $\nu \models \psi$.
- $\nu \models \varphi \to \psi$ platí právě tehdy, když $\nu \not\models \varphi$ nebo $\nu \models \psi$.
- $\nu \models \varphi \leftrightarrow \psi$ platí právě tehdy, když $\nu \models \varphi$ a $\nu \models \psi$, nebo když $\nu \not\models \varphi$ a $\nu \not\models \psi$.

Výroková logika — sémantika

$$h_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$$

x	$h_\neg(x)$
0	1
1	0

$$h_* : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\} \qquad \text{pro } * \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$$

x	y	$h_\wedge(x,y)$	$h_\vee(x,y)$	$h_\to(x,y)$	$h_\leftrightarrow(x,y)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Výroková logika — sémantika

$\mathcal{L}_{At}$ — množina všech dobře vytvořených formulí

Každému pravdivostnímu ohodnocení $\nu : At \to \{0,1\}$ je přiřazena funkce

$$\hat{\nu} : \mathcal{L}_{At} \to \{0,1\}$$

- $\hat{\nu}(p) = \nu(p)$ pro $p \in At$
- $\hat{\nu}(\bot) = 0$
- $\hat{\nu}(\top) = 1$
- $\hat{\nu}(\neg\varphi) = h_{\neg}(\hat{\nu}(\varphi))$
- $\hat{\nu}(\varphi * \psi) = h_{*}(\hat{\nu}(\varphi), \hat{\nu}(\psi))$ pro $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

- $\nu \models \varphi$ — pokud $\hat{\nu}(\varphi) = 1$
- $\nu \not\models \varphi$ — pokud $\hat{\nu}(\varphi) = 0$

Interpretace a modely

Obecně se při popisu sémantiky mluví o **interpretacích**.

- V případě výrokové logiky má interpretace podobu pravdivostního ohodnocení.
- V případě jiných logik mohou interpretace vypadat jinak.
- Pokud ν je interpretace, zápis $\nu \models \varphi$ znamená, že formule φ v interpretaci ν platí.
- Interpretaci, ve které platí formule φ, se říká **model** formule φ.
- Pokud Γ je množina formulí, **modelem** této množiny formulí je taková interpretace, která je modelem každé formule z Γ.

Logické vyplývání

φ – formule, Γ – množina formulí

Formule φ **logicky vyplývá** z formulí Γ, což se zapisuje

$$\Gamma \models \varphi,$$

jestliže $\nu \models \varphi$ platí pro každou takovou interpretaci ν, kde pro všechny formule $\psi \in \Gamma$ platí $\nu \models \psi$.

Poznámka: Množina Γ může být i nekonečná.

Místo $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\} \models \varphi$ se obvykle píše $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \models \varphi$.

Místo $\emptyset \models \varphi$ se obvykle píše $\models \varphi$.

Tautologie, kontradikce a splnitelné formule

Formule φ je:

- **tautologie** — pro každou interpretaci ν platí $\nu \models \varphi$
- **kontradikce** — pro každou interpretaci ν platí $\nu \not\models \varphi$
- **splnitelná** — existuje alespoň jedna interpretace ν, pro kterou platí $\nu \models \varphi$

$\models \varphi$ — označuje, že φ je tautologie

Poznámka:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$$

právě tehdy, když

$$\models A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\quad \cdots \quad \rightarrow (A_n \rightarrow B) \cdots))$$

Tabulková metoda

$$p \wedge (q \rightarrow \neg r)$$

p	q	r	$\neg r$	$q \rightarrow \neg r$	$p \wedge (q \rightarrow \neg r)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Tabulková metoda

$$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \rightarrow A$	$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Dedukční systémy

Dedukční neboli **odvozovací systém** — sada pravidel, která určují, jak vypadají důkazy, a jaké kroky je možno v rámci důkazů provádět .

Příklad: Dedukční systém pro výrokovou logiku založený na sekventech (sekventový kalkul), obsahující následující pravidla:

Assm	Ant
$\wedge\mathrm{i}$	$\wedge\mathrm{e}_1$, $\wedge\mathrm{e}_2$
$\vee\mathrm{i}_1$, $\vee\mathrm{i}_2$	$\vee\mathrm{e}$
$\rightarrow\mathrm{i}$	$\rightarrow\mathrm{e}$
$\leftrightarrow\mathrm{i}$	$\leftrightarrow\mathrm{e}_1$, $\leftrightarrow\mathrm{e}_2$
$\neg\mathrm{i}$	$\neg\mathrm{e}$
$\top\mathrm{i}$	$\bot\mathrm{e}$
	$\neg\neg\mathrm{e}$

Poznámka: Jedná se o jednu z variant tzv. **přirozené dedukce**.

Dedukční systémy

φ – formule, Γ – množina formulí (může být i nekonečná)

Pro daný dedukční systém $\mathcal{D}$ zápis

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \varphi$$

označuje, že v rámci systému $\mathcal{D}$ existuje důkaz formule φ z předpokladů Γ.

Pro daný dedukční systém $\mathcal{D}$ musí být přesně specifikováno, kdy platí $\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \varphi$.

Systém založený na sekventech (sekventový kalkul):

- $\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \varphi$ platí právě tehdy, když existují nějaké formule $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ z množiny Γ takové, že pomocí pravidel daného systému se dá odvodit sekvent

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$$

  (tj. existuje důkaz tohoto sekventu).

Dedukční systémy

Dedukční systém $\mathcal{D}$ je:

- **korektní** — jestliže platí, že pokud $\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \varphi$, pak $\Gamma \models \varphi$

  Tj. v rámci systému není možné odvodit nekorektní závěr, co se odvodí, to také skutečně platí.

- **úplný** — jestliže platí, že pokud $\Gamma \models \varphi$, pak $\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \varphi$

  Tj. vše, co platí, se dá v rámci daného systému odvodit.

Pro dokázání toho, že daný systém je korektní stačí dokázat, že každé jednotlivé pravidlo je korektní.

Příklad: Pro dokázání toho, že pravidlo

$$\wedge\text{i:}\quad \frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

je korektní, stačí dokázat, že:

- pokud $\Gamma \models A$ a $\Gamma \models B$, pak $\Gamma \models A \wedge B$.

Tabulková metoda v rámci dedukčního systému

Tabulkovou metodu je možné v rámci dedukčního systému „simulovat“:

- To, že φ má při daném ohodnocení pravdivostní hodnotu 1 je reprezentováno formulí φ.
- To, že φ má při daném ohodnocení pravdivostní hodnotu 0 je reprezentováno formulí $\neg\varphi$.

Tabulková metoda v rámci dedukčního systému

Příklad: Mějme atomické výroky p, q, r a formuli φ vytvořenou z těchto atomických výroků pomocí logických spojek.

- Pokud například $\nu_1 \models \varphi$ pro ohodnocení ν_1, kde
  $$\nu_1(p) = 1, \qquad \nu_1(q) = 0, \qquad \nu_1(r) = 0,$$
  v rámci odvozovacího systému se dá odvodit sekvent
  $$p, \neg q, \neg r \vdash \varphi$$

- Pokud například $\nu_2 \not\models \varphi$ pro ohodnocení ν_2, kde
  $$\nu_2(p) = 0, \qquad \nu_2(q) = 1, \qquad \nu_2(r) = 0,$$
  v rámci odvozovacího systému se dá odvodit sekvent
  $$\neg p, q, \neg r \vdash \neg\varphi$$

Tabulková metoda v rámci dedukčního systému

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Například pro konjunkci se dají odvodit následující pravidla:

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg(A \wedge B)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \neg(A \wedge B)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg(A \wedge B)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

Tabulková metoda v rámci dedukčního systému

Na tabulkovou metodu lze nahlížet jako na příklad důkazu rozborem případů:

p_1	p_2	p_3	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

1. $\neg p_1, \neg p_2, \neg p_3 \vdash \varphi$ (...)
2. $\neg p_1, \neg p_2, p_3 \vdash \varphi$ (...)
3. $\neg p_1, p_2, \neg p_3 \vdash \varphi$ (...)
4. $\neg p_1, p_2, p_3 \vdash \varphi$ (...)
5. $p_1, \neg p_2, \neg p_3 \vdash \varphi$ (...)
6. $p_1, \neg p_2, p_3 \vdash \varphi$ (...)
7. $p_1, p_2, \neg p_3 \vdash \varphi$ (...)
8. $p_1, p_2, p_3 \vdash \varphi$ (...)
9. $\neg p_1, \neg p_2 \vdash \varphi$ (PC 2,1)
10. $\neg p_1, p_2 \vdash \varphi$ (PC 4,3)
11. $p_1, \neg p_2 \vdash \varphi$ (PC 6,5)
12. $p_1, p_2 \vdash \varphi$ (PC 8,7)
13. $\neg p_1 \vdash \varphi$ (PC 10,9)
14. $p_1 \vdash \varphi$ (PC 12,11)
15. $\vdash \varphi$ (PC 14,13)

Ekvivalence formulí

Formule φ a ψ jsou **logicky ekvivalentní**, což se označuje $\varphi \Leftrightarrow \psi$, jestliže pro každou interpretaci ν platí

$$\nu \models \varphi \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad \nu \models \psi.$$

Poznámka: $\varphi \Leftrightarrow \psi$ platí právě tehdy, když $\varphi \models \psi$ a $\psi \models \varphi$.

Formule φ a ψ jsou v rámci daného dedukčního systému **dokazatelně ekvivalentní**, což se označuje $\varphi \dashv\vdash \psi$, jestliže platí

$$\varphi \vdash \psi \qquad \text{a} \qquad \psi \vdash \varphi.$$

Poznámka: Pokud je dedukční systém korektní, tak z $\varphi \dashv\vdash \psi$ plyne $\varphi \Leftrightarrow \psi$, pokud je úplný, tak z $\varphi \Leftrightarrow \psi$ plyne $\varphi \dashv\vdash \psi$.

Ekvivalence formulí

$\varphi \Leftrightarrow \psi$ právě tehdy, když $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

$\varphi \dashv\vdash \psi$ právě tehdy, když $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Pro libovolné formule φ, ψ a χ platí:

- $\varphi \Leftrightarrow \varphi$.
- Pokud $\varphi \Leftrightarrow \psi$, tak $\psi \Leftrightarrow \varphi$.
- Pokud $\varphi \Leftrightarrow \psi$ a $\psi \Leftrightarrow \chi$, tak $\varphi \Leftrightarrow \chi$.

Podobně:

- $\varphi \dashv\vdash \varphi$.
- Pokud $\varphi \dashv\vdash \psi$, tak $\psi \dashv\vdash \varphi$.
- Pokud $\varphi \dashv\vdash \psi$ a $\psi \dashv\vdash \chi$, tak $\varphi \dashv\vdash \chi$.

Ekvivalence formulí

Pokud platí $A \dashv\vdash A'$:

- Z $\Gamma \vdash A$ se dá dokázat $\Gamma \vdash A'$ (a naopak).
- Z $\Gamma, A, \Delta \vdash B$ se dá dokázat $\Gamma, A', \Delta \vdash B$ (a naopak).

Pokud platí $A \dashv\vdash A'$, tak platí i:

- $\neg A \dashv\vdash \neg A'$
- $A \wedge B \dashv\vdash A' \wedge B$, $\quad B \wedge A \dashv\vdash B \wedge A'$
- $A \vee B \dashv\vdash A' \vee B$, $\quad B \vee A \dashv\vdash B \vee A'$
- $A \rightarrow B \dashv\vdash A' \rightarrow B$, $\quad B \rightarrow A \dashv\vdash B \rightarrow A'$
- $A \leftrightarrow B \dashv\vdash A' \leftrightarrow B$, $\quad B \leftrightarrow A \dashv\vdash B \leftrightarrow A'$

(podobně to platí i pro $\Leftrightarrow$)

Některé důležité ekvivalence

Poznámka: Všechny níže uvedené ekvivalence jsou i dokazatelné ($\dashv\vdash$).

$$A \Leftrightarrow \neg\neg A\,,$$

Asociativita $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$:

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \wedge C &\Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C) \\ (A \vee B) \vee C &\Leftrightarrow A \vee (B \vee C) \\ (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C &\Leftrightarrow A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \end{aligned}$$

Komutativita $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$:

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A \qquad A \vee B \Leftrightarrow B \vee A \qquad A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$$

Idempotence $\wedge$ a $\vee$:

$$A \wedge A \Leftrightarrow A \qquad A \vee A \Leftrightarrow A$$

Některé důležité ekvivalence

Distributivní zákony pro $\wedge$ a $\vee$:

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \qquad A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

De Morganovy zákony:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \qquad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

Konjunkce, resp. disjunkce, formulí A a $\neg A$ je ekvivalentní formuli $\bot$, resp. $\top$:

$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow \bot \qquad A \vee \neg A \Leftrightarrow \top$$

Některé důležité ekvivalence

Vztahy s $\bot$ a $\top$:

$$
\begin{array}{ccc}
\neg\bot \Leftrightarrow \top & \qquad & \neg\top \Leftrightarrow \bot \\
A \wedge \bot \Leftrightarrow \bot & & A \wedge \top \Leftrightarrow A \\
A \vee \bot \Leftrightarrow A & & A \vee \top \Leftrightarrow \top \\
A \rightarrow \bot \Leftrightarrow \neg A & & A \rightarrow \top \Leftrightarrow \top \\
\bot \rightarrow A \Leftrightarrow \top & & \top \rightarrow A \Leftrightarrow A \\
A \leftrightarrow \bot \Leftrightarrow \neg A & & A \leftrightarrow \top \Leftrightarrow A
\end{array}
$$

Vztahy pro nahrazení implikace:

$$A \rightarrow B \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee B \qquad\qquad \neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

Vztahy pro nahrazení ekvivalence:

$$
\begin{aligned}
A \leftrightarrow B \;&\Leftrightarrow\; (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \\
A \leftrightarrow B \;&\Leftrightarrow\; (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \\
A \leftrightarrow B \;&\Leftrightarrow\; (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)
\end{aligned}
$$

Ekvivalentní úpravy

Místo $A_1 \Leftrightarrow A_2$, $A_2 \Leftrightarrow A_3$, ..., $A_{n-1} \Leftrightarrow A_n$ je možné psát

$$A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow A_3 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_{n-1} \Leftrightarrow A_n$$

Pro libovolné A_i, A_j, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pak platí $A_i \Leftrightarrow A_j$.

Podobně místo $A_1 \dashv\vdash A_2$, $A_2 \dashv\vdash A_3$, ..., $A_{n-1} \dashv\vdash A_n$ je možné psát

$$A_1 \dashv\vdash A_2 \dashv\vdash A_3 \dashv\vdash \cdots \dashv\vdash A_{n-1} \dashv\vdash A_n$$

Pro libovolné A_i, A_j, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pak platí $A_i \dashv\vdash A_j$.

Normální formy formulí

Uvažujme nyní pouze formule výrokové logiky.

- **Literál** — atomický výrok nebo jeho negace, např. p nebo $\neg r$

$$L \ ::= \ p \ \mid \ \neg p$$

- **Elementární konjunkce** — konjunkce jednoho nebo více literálů, např. $p \wedge \neg q$, r, $q \wedge \neg r \wedge p$

$$C \ ::= \ L \ \mid \ L \wedge C$$

- **Elementární disjunkce** (**klauzule**) — disjunkce jednoho nebo více literálů, např. $p \vee \neg q$, r, $q \vee \neg r \vee p$

$$D \ ::= \ L \ \mid \ L \vee D$$

Normální formy formulí

- **Disjunktivní normální forma** (**DNF**) — disjunkce jedné nebo více elementárních konjunkcí, např. $(p \wedge \neg q) \vee (\neg r) \vee (\neg r \wedge \neg p \wedge \neg q)$

$$E \;::=\; C \;\mid\; C \vee E$$

- **Konjunktivní normální forma** (**KNF**) — konjunkce jedné nebo více elementárních disjunkcí (klauzulí), např. $(p \vee \neg q) \wedge (\neg r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q)$

$$F \;::=\; D \;\mid\; D \wedge F$$

Poznámka: Formule $\bot$ a $\top$ také budeme považovat za formule v DNF a KNF.

Normální formy formulí

- U formulí v KNF se snadno zjistí, jestli jde nebo nejde o tautologii:

  U tautologie v KNF musí každá klauzule obsahovat jako literál nějaký atomický výrok p a zároveň jeho negaci $\neg p$.

- U formulí v DNF se snadno zjistí, jestli jde nebo nejde o kontradikci:

  U kontradikce v DNF musí každá elementární konjunkce obsahovat nějaký atomický výrok p a zároveň jeho negaci $\neg p$.

Normální formy formulí

Pokud uvažujeme pevně danou **konečnou** množinu atomických výroků At:

- **Úplná disjunktivní normální forma** (**ÚDNF**) — formule v DNF, kde každá elementární konjunkce obsahuje každý atomický výrok z At právě jednou.

  Příklad: $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

- **Úplná konjunktivní normální forma** (**ÚKNF**) — formule v KNF, kde každá klauzule obsahuje každý atomický výrok z At právě jednou.

  Příklad: $(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$

Poznámka: V příkladech je $At = \{p, q, r\}$.