Negace

Negace: $\neg A$

A	$\neg A$
0	1
1	0

Poznámka: označuje se též $\sim$ nebo **not**

Důkazy sporem

$$\text{Ctr:}\quad \frac{\Gamma, A \vdash B \qquad\qquad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

$$\text{CtrN:}\quad \frac{\Gamma, \neg A \vdash B \qquad\qquad \Gamma, \neg A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash A}$$

Dvojitá negace

$$\neg\neg\mathrm{i}: \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \neg\neg A} \qquad\qquad \neg\neg\mathrm{e}: \quad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

1.	$\Gamma \vdash A$	(premisa)
2.	$\Gamma, \neg A \vdash A$	(Ant 1)
3.	$\Gamma, \neg A \vdash \neg A$	(Assm)
4.	$\Gamma \vdash \neg\neg A$	(Ctr 2,3)

1.	$\Gamma \vdash \neg\neg A$	(premisa)
2.	$\Gamma, \neg A \vdash \neg A$	(Assm)
3.	$\Gamma, \neg A \vdash \neg\neg A$	(Ant 1)
4.	$\Gamma \vdash A$	(CtrN 2,3)

Dvojitá negace

Odvození CtrN pomocí Ctr a $\neg\neg\mathrm{e}$:

$$\mathrm{CtrN}: \quad \frac{\Gamma, \neg A \vdash B \qquad\qquad \Gamma, \neg A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash A}$$

1.	$\Gamma, \neg A \vdash B$	(premisa)
2.	$\Gamma, \neg A \vdash \neg B$	(premisa)
3.	$\Gamma \vdash \neg\neg A$	(Ctr 1,2)
4.	$\Gamma \vdash A$	($\neg\neg\mathrm{e}$ 3)

Ze sporných předpokladů plyne cokoliv

$$\mathrm{CtrA:}\quad \frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$

1.	$\Gamma \vdash A$	(premisa)
2.	$\Gamma \vdash \neg A$	(premisa)
3.	$\Gamma, \neg B \vdash A$	(Ant 1)
4.	$\Gamma, \neg B \vdash \neg A$	(Ant 2)
5.	$\Gamma \vdash B$	(CtrN 3,4)

Kontrapozice

$$\text{Cp (a)}: \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash \neg A} \qquad \text{Cp (b)}: \quad \frac{\Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma, B \vdash \neg A}$$

$$\text{Cp (c)}: \quad \frac{\Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash A} \qquad \text{Cp (d)}: \quad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \neg B}{\Gamma, B \vdash A}$$

1. $\Gamma, A \vdash B$ (premisa)
2. $\Gamma, \neg B, A \vdash B$ (Ant 1)
3. $\Gamma, \neg B, A \vdash \neg B$ (Assm)
4. $\Gamma, \neg B \vdash \neg A$ (Ctr 2,3)

1. $\Gamma, A \vdash \neg B$ (premisa)
2. $\Gamma, B, A \vdash B$ (Assm)
3. $\Gamma, B, A \vdash \neg B$ (Ant 1)
4. $\Gamma, B \vdash \neg A$ (Ctr 2,3)

Řetězení argumentů

$$\text{Ch:} \quad \frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

1.	$\Gamma \vdash A$	(premisa)
2.	$\Gamma, A \vdash B$	(premisa)
3.	$\Gamma, \neg B \vdash A$	(Ant 1)
4.	$\Gamma, \neg B \vdash \neg A$	(Cp (a) 2)
5.	$\Gamma \vdash B$	(CtrN 3,4)

Rozbor případů (proof by cases)

$$\text{PC:}\quad \frac{\Gamma, A \vdash B \qquad\qquad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

1. $\Gamma, A \vdash B$ (premisa)
2. $\Gamma, \neg A \vdash B$ (premisa)
3. $\Gamma, \neg B \vdash A$ (Cp (c) 2)
4. $\Gamma, \neg B \vdash \neg A$ (Cp (a) 1)
5. $\Gamma \vdash B$ (CtrN 3,4)

Zákon vyloučení třetího (tertium non datur)

$$\vdash A \lor \neg A$$

1.	$A \vdash A$	(Assm)
2.	$A \vdash A \lor \neg A$	($\lor\mathrm{i}_1$ 1)
3.	$\neg A \vdash \neg A$	(Assm)
4.	$\neg A \vdash A \lor \neg A$	($\lor\mathrm{i}_2$ 3)
5.	$\vdash A \lor \neg A$	(PC 2,4)

Další pravidla pro disjunkci

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, \neg B \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

1.	$\Gamma, A \vdash A$	(Assm)
2.	$\Gamma, A \vdash A \vee B$	($\vee\mathrm{i}_1$ 1)
3.	$\Gamma, \neg A \vdash B$	(premisa)
4.	$\Gamma, \neg A \vdash A \vee B$	($\vee\mathrm{i}_2$ 3)
5.	$\Gamma \vdash A \vee B$	(PC 2,4)

Implikace

Implikace: $A \rightarrow B$

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Poznámka: označuje se též $\Rightarrow$ nebo $\supset$

$$\rightarrow\mathrm{i}: \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \qquad\qquad \rightarrow\mathrm{e}: \quad \frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

Poznámka: $\rightarrow\mathrm{e}$ je známější pod názvem *modus ponens*

Příklady důkazů s implikací

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma, A \vdash B}$$

$$\text{Ch:} \quad \frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

1.	$\Gamma \vdash A \rightarrow B$	(premisa)
2.	$\Gamma, A \vdash A \rightarrow B$	(Ant 1)
3.	$\Gamma, A \vdash A$	(Assm)
4.	$\Gamma, A \vdash B$	($\rightarrow$e 2,3)

1.	$\Gamma \vdash A$	(premisa)
2.	$\Gamma, A \vdash B$	(premisa)
3.	$\Gamma \vdash A \rightarrow B$	($\rightarrow$i 2)
4.	$\Gamma \vdash B$	($\rightarrow$e 3,1)

Ekvivalence

Ekvivalence: $A \leftrightarrow B$

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Poznámka: označuje se též $\Leftrightarrow$ nebo $\equiv$ nebo **iff**

Pravidla pro ekvivalenci

$$\leftrightarrow\mathrm{i}: \quad \frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}$$

$$\leftrightarrow\mathrm{e}_1: \quad \frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

$$\leftrightarrow\mathrm{e}_2: \quad \frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A}$$

Logické konstanty

Logické konstanty: $\bot$ (false), $\top$ (true)

Poznámka: označují se též 0, 1 nebo **ff**, **tt**

$$\bot\mathrm{e}: \ \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \qquad\qquad \top\mathrm{i}: \ \frac{}{\vdash \top}$$

$\perp$ a negace

$$\neg\mathrm{i:}\quad \frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A}$$

1. $\Gamma, A \vdash \perp$ (premisa)
2. $\Gamma, A \vdash \neg\perp$ ($\perp$e 1)
3. $\Gamma \vdash \neg A$ (Ctr 1,2)

$$\neg\mathrm{e:}\quad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \perp}$$

$\bot$ a negace

$$\mathrm{Ctr:}\quad \frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

1.	$\Gamma, A \vdash B$	(premisa)
2.	$\Gamma, A \vdash \neg B$	(premisa)
3.	$\Gamma, A \vdash \bot$	($\neg$e 2,1)
4.	$\Gamma \vdash \neg A$	($\neg$i 3)

$$\mathrm{CtrA:}\quad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$

1.	$\Gamma \vdash A$	(premisa)
2.	$\Gamma \vdash \neg A$	(premisa)
3.	$\Gamma \vdash \bot$	($\neg$e 2,1)
4.	$\Gamma \vdash B$	($\bot$e 3)

Syntaxe — logické spojky

- Pokud φ je dobře vytvořená formule, tak i $\neg\varphi$ je dobře vytvořená formule.
- Pokud φ a ψ jsou dobře vytvořené formule, tak i $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou dobře vytvořené formule.
- $\bot$ a $\top$ jsou dobře vytvořené formule.

Abstraktní syntaktický strom (abstract syntax tree).

Konvence pro vypouštění závorek.

Výroková logika — syntaxe

At — množina atomických výroků

Abeceda — množina symbolů:

- atomické výroky: všechny prvky z At
- logické spojky: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\bot$, $\top$
- závorky: $)$, $($

Jazyk — sekvence symbolů jsou formulemi:

- Pokud $p \in At$, tak p je formule.
- $\bot$ a $\top$ jsou formule.
- Pokud φ je formule, tak i $\neg\varphi$ je formule.
- Pokud φ a ψ jsou formule, tak i $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou formule.
- Neexistují žádné další formule než ty, vytvořené podle předchozích bodů.

Výroková logika — sémantika

Pravdivostní ohodnocení: $\nu : At \rightarrow \{0, 1\}$

- $\nu \models \varphi$ — formule φ platí (tj. je pravdivá) při ohodnocení ν
- $\nu \not\models \varphi$ — formule φ neplatí (tj. je nepravdivá) při ohodnocení ν

Definice toho, kdy je formule pravdivá při ohodnocení ν:

- $\nu \models p$, kde $p \in At$, platí právě tehdy, když $\nu(p) = 1$.
- $\nu \models \bot$ neplatí nikdy (tj. vždy platí $\nu \not\models \bot$).
- $\nu \models \top$ platí vždy.
- $\nu \models \neg\varphi$ platí právě tehdy, když $\nu \not\models \varphi$.
- $\nu \models \varphi \wedge \psi$ platí právě tehdy, když $\nu \models \varphi$ a $\nu \models \psi$.
- $\nu \models \varphi \vee \psi$ platí právě tehdy, když $\nu \models \varphi$ nebo $\nu \models \psi$.
- $\nu \models \varphi \rightarrow \psi$ platí právě tehdy, když $\nu \not\models \varphi$ nebo $\nu \models \psi$.
- $\nu \models \varphi \leftrightarrow \psi$ platí právě tehdy, když $\nu \models \varphi$ a $\nu \models \psi$, nebo když $\nu \not\models \varphi$ a $\nu \not\models \psi$.

Výroková logika — sémantika

$$h_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$$

x	$h_\neg(x)$
0	1
1	0

$$h_* : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\} \qquad \text{pro } * \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$$

x	y	$h_\wedge(x,y)$	$h_\vee(x,y)$	$h_\to(x,y)$	$h_\leftrightarrow(x,y)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Výroková logika — sémantika

$\mathcal{L}_{At}$ — množina všech dobře vytvořených formulí

Každému pravdivostnímu ohodnocení $\nu : At \rightarrow \{0,1\}$ je přiřazena funkce

$$\hat{\nu} : \mathcal{L}_{At} \rightarrow \{0,1\}$$

- $\hat{\nu}(p) = \nu(p)$ pro $p \in At$
- $\hat{\nu}(\bot) = 0$
- $\hat{\nu}(\top) = 1$
- $\hat{\nu}(\neg\varphi) = h_{\neg}(\hat{\nu}(\varphi))$
- $\hat{\nu}(\varphi * \psi) = h_{*}(\hat{\nu}(\varphi), \hat{\nu}(\psi))$ pro $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

- $\nu \models \varphi$ — pokud $\hat{\nu}(\varphi) = 1$
- $\nu \not\models \varphi$ — pokud $\hat{\nu}(\varphi) = 0$

Logické vyplývání

Místo o pravdivostním ohodnocení ν se někdy mluví o interpretaci ν.

φ – formule, Γ – množina formulí

Formule φ **logicky vyplývá** z formulí Γ:

$$\Gamma \models \varphi$$

jestliže pro každou interpretaci ν takovou,

- že pro všechny formule $\psi \in \Gamma$ platí $\nu \models \psi$,

platí $\nu \models \varphi$

Tautologie, kontradikce a splnitelné formule

Formule φ je:

- **tautologie** — pro každou interpretaci ν platí $\nu \models \varphi$
- **kontradikce** — pro každou interpretaci ν platí $\nu \not\models \varphi$
- **splnitelná** — existuje alespoň jedna interpretace ν, pro kterou platí $\nu \models \varphi$

$\models \varphi$ — označuje, že φ je tautologie

Poznámka:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$$

právě tehdy, když

$$\models A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\;\cdots\; \rightarrow (A_n \rightarrow B) \cdots))$$

Tabulková metoda

$$p \wedge (q \rightarrow \neg r)$$

p	q	r	$\neg r$	$q \rightarrow \neg r$	$p \wedge (q \rightarrow \neg r)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Tabulková metoda

$$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \rightarrow A$	$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1