Tutoriál 2

Příklad 1: U následujících formulí rozhodněte, o jakou formuli se jedná (splnitelná, tautologie, kontradikce). Využijte ekvivalentních úprav formulí. Formule dále převeďte do KNF a DNF..

a) $(p \wedge \neg q) \supset (\neg p \supset (q \vee p))$

b) $(p \supset q) \equiv (\neg q \supset \neg p)$

Příklad 2: Vezměme si následující věty z příkladu 3 ze cvičení 2 . Tyto věty negujte slovně i formálně tak, aby se negace vyskytovaly pouze u atomických tvrzení.

a) Když prší, tak nemůžeme jít do školy.

b) Pouze když prší, nemůžeme jít do školy.

c) Pojedu vlakem nebo autobusem.

d) Prší, právě tehdy a jen tehdy, když sněží.

e) Postačující podmínkou toho, aby nosil brýle, je, že svítí slunce.

Příklad 3: Následující formule převeďte do UKNF a UDNF pomocí tabulky nebo ekvivalentních úprav.

a) $(p \equiv \neg q)$

b) $(p \wedge \neg q) \supset (\neg p \supset (q \vee p))$

Příklad 4: Ověřte správnost / nesprávnost následujících úsudků: i) sporem, ii) tabulkou. V případě, že úsudek není správně, navrhněte nějakou, pokud možno co nejmenší, změnu závěru tak, aby byl úsudek platný.

a) Má přednášku nebo se toulá po škole.
Jestliže má přednášku, pak se jedná o vzorného studenta.
———
Jestliže se nejedná o vzorného studenta, pak se toulá po škole.

b) Nefunguje-li program jak má, je chyba v programu nebo není v pořádku systém.
Je-li chyba v programu, musím se poradit se svým cvičícím.
Program funguje jak má.
———
Nefunguje-li program, musím se poradit se svým cvičícím.

Příklad 5: Ověřte platnost/neplatnost úsudku rezoluční metodou. Dále odvoďte, co všechno vyplývá z předpokladů.:

a) Nefunguje-li program, je chyba v programu nebo není v pořádku systém.
Je-li chyba v programu, musím se poradit se cvičícím.
Systém je v pořádku.
____
Nefunguje-li program, musím se poradit se cvičícím.

b) Karel pojede autobusem nebo vlakem.
Jede-li Karel autobusem nebo svým vozem, pak přijede pozdě a zmešká schůzku.
Karel nepřišel pozdě.
____
Karel pojede vlakem.

Příklad 6: Pro každou z následujících sekvencí symbolů rozhodněte, zda se jedná o a) term, b) formuli predikátové logiky 1. řádu. Pokud se jedná o formuli predikátové logiky 1. řádu, určete, zda je tato formule i) atomická, ii) uzavřená; pokud není formule uzavřená určete množinu volných proměnných, které se v ní vyskytují.

Při posuzování berte jako dané, že f je funkční symbol s aritou 1, g je funkční symbol s aritou 2, c a d jsou konstanty, P je predikátový symbol s aritou 1 a Q a R jsou predikátové symboly s aritou 2.

1. $(\neg((\neg p) \supset (\neg(\neg r))))$
2. $\forall x \in A : P$
3. $f(c)$
4. $R(c, d)$
5. $\forall x \exists y P(c)$
6. $\forall x \exists x P(x)$
7. $\forall x \exists y P(R(x, y))$
8. $\forall x \exists y f(R(x, y))$
9. $\forall x \exists y P(g(x, y))$
10. $\forall x \exists y f(g(x, y))$
11. $\forall x \exists y P(g(f(f(x)), c))$
12. $\forall x (P(d) \wedge \exists y Q(y, c))$
13. $P(d) \wedge \exists y Q(y, c)$
14. $P(x) \wedge \exists y Q(d, c)$
15. $\forall x \exists y (R(x, f(y)) \equiv \exists z Q(z, c))$
16. $\forall x P(g(x))$
17. $\forall x R(f(x))$
18. $\forall x R(f(x), f(x), f(x))$
19. $\forall x P(f(x, x))$
20. $\forall x P(g(x, x))$
21. $f(f(g(c, d)))$
22. $P(f(g(c, d)))$
23. $P(f(d)) \supset \forall x P(x)$
24. $P(f(g(f, f)))$
25. $P(f(g(c, x)))$
26. $\forall x (f(x) \supset g(c, x))$
27. $\forall x P(f(x) \supset g(c, x))$
28. $\forall x P(\neg f(x))$
29. $\forall x \neg P(f(x))$
30. $\neg(P(f(x)) \vee Q(y, z))$

Příklad 7: Předpokládejme, že f je funkční symbol s aritou 2, g je funkční symbol s aritou 1,

c, d jsou konstanty, P a Q jsou predikátové symboly s aritou 1 a R je predikátový symbol s aritou 2.

Pro každou z následujících formulí a každou z následujícících interpretací s valuací, určete, zda je daná formule pravdivá v dané interpretaci a valuaci.
Formule:

1. $R(c, d)$
2. $R(c, d) \supset R(c, x)$
3. $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \supset R(x, z))$
4. $\exists x (Q(x) \wedge \forall y R(y, g(x)))$
5. $\exists x \neg P(f(x, y))$
6. $\forall x \exists y \neg R(x, g(g(y)))$

Interpretace:

a) Univerzem je množina $A = \{a, b, c\}$. Funkce $\bar{f}$ a $\bar{g}$ přiřazené funkčním symbolům f a g jsou dány následujícími tabulkami:

$\bar{f}$	a	b	c
a	b	a	c
b	b	b	b
c	a	c	b

x	$\bar{g}(x)$
a	b
b	c
c	c

Konstantám c a d jsou přiřazeny prvky a a b. Predikátu P je přiřazena relace $\{a, c\}$, predikátu Q relace $\emptyset$ a predikátu R relace $\{(a, b), (b, c), (a, c)\}$.

Předpokládejme valuaci e, kde $e(x) = c$, $e(y) = a$ a $e(z) = a$.

b) Univerzem je množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

- Funkčnímu symbolu f je přiřazena funkce $\bar{f} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $\bar{f}(x, y) = x + y$.
- Funkčnímu symbolu g je přiřazena funkce $\bar{g} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $\bar{g}(x) = x + 1$.
- Konstantám c a d jsou přiřazeny prvky 0 a 2.
- Predikátovému symbolu P je přiřazena relace $\{x \in \mathbb{N} \mid x \bmod 2 = 0\}$.
- Predikátovému symbolu Q je přiřazena relace $\{x \in \mathbb{N} \mid x = y^2 \text{ pro nějaké } y \in \mathbb{N}\}$.
- Predikátovému symbolu R je přiřazena relace $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\}$.

Předpokládejme valuaci e, kde $e(x) = 7$, $e(y) = 2$, $e(z) = 9$.

Příklad 8: Převeďte následující věty do formulí PL1 a ověřte jejich ekvivalenci pomocí ekvivalentních úprav:

a) Všechna prvočísla větší než 2 jsou lichá.
Je-li prvočíslo větší než 2, pak je liché.
Neexistuje prvočíslo větší než 2, které by nebylo liché.
Není-li číslo liché, pak to není prvočíslo větší než 2.

b) Někteří studenti nejsou líní.
Ne všichni studenti jsou líní.

Příklad 9: Pro každou z formulí, kterou jste dostali analýzou výroků z příkladu 5, najděte interpretaci, která je jejím modelem, a interpretaci, která jejím modelem není.