Tutoriál 1

Příklad 1: Pro každý z následujících formálních zápisů množin uveďte (svými slovy), jaké prvky daná množina obsahuje:

a) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

b) $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$

c) $\{n \mid n = 2m \text{ pro nějaké } m \in \mathbb{N}\}$

d) $\{n \mid n = 2m \text{ pro nějaké } m \in \mathbb{N} \text{ a } n = 3k \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}\}$

e) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = n + 1\}$

Příklad 2: Uvažujme množiny $A = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$ a $B = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$.

a) Je $A \subseteq B$?

b) Je $A \supseteq B$?

c) Co je $A \cup B$?

d) Co je $A \cap B$?

e) Co je $A \times B$?

f) Co je $\mathcal{P}(B)$?

Příklad 3: Jestliže množina A má a prvků a množina B má b prvků, kolik prvků má množina $A \times B$? Vaši odpověď vysvětlete.

Příklad 4: Jestliže množina C má c prvků, kolik prvků má množina $\mathcal{P}(C)$? Vaši odpověď vysvětlete.

Příklad 5: Připomeňte si, co je to relace, a jaké znáte typy relací (homogenní vs. nehomogenní, unární, binární, atd.).

a) Přesně definujte, co to znamená, že relace je reflexivní, ireflexivní, symetrická, asymetrická, antisymetrická, tranzitivní, funkční.

b) Uvědomte si souvislost mezi binárními relacemi a orientovanými grafy (které mohou být i nekonečné) a popište, co jednotlivé vlastnosti uvedené v předchozím bodě znamenají z hlediska grafu reprezentujícího příslušnou relaci.

c) Připomeňte si, co to znamená, že relace je ekvivalence. Jak pojem ekvivalence souvisí s pojmem rozkladu?

d) Připomeňte si, co to znamená, že relace je uspořádání. Jaké znáte typy uspořádání?

Příklad 6: Rozhodněte platnost následujících úsudků (a zdůvodněte).

a) Všechny myši jsou hranaté.
Všechno hranaté je modré.
– proto: Všechny myši jsou modré.

b) Někteří psi rádi přednášejí básně.
Všichni psi jsou laviny.
– proto: Některé laviny rády přednášejí básně.

c) Nikdo s fialovými vlasy není mladý.
Někteří lidé, kteří mají fialové vlasy, pijí mléko.
– proto: Někteří lidé, kteří pijí mléko, nejsou mladí.

Příklad 7: Určete, které z následujících sekvencí symbolů jsou dobře vytvořenými formulemi výrokové logiky

a) pokud použijeme formální definici formulí výrokové logiky,

b) pokud použijeme konvence o vypouštění závorek.

Vaše odpovědi zdůvodněte.

1. $)(p)\neg \wedge \wedge$
2. $\forall x : q(x) \wedge r(x, x)$
3. p
4. $(\neg(\neg q))$
5. $(\neg(\neg q()))$
6. $(\neg(\neg)q)$
7. $(p\neg q)$
8. $\wedge pq$
9. $p \wedge q$
10. $(p \wedge q)$
11. $((p \wedge q))$
12. $((p \wedge q) \vee r)$
13. $((\neg p) \vee (q \equiv (\neg r)))$
14. $r \vee \neg q \vee s$
15. $(\neg r \vee \neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee s)$
16. $(\neg((\neg p) \supset (\neg(\neg r))))$

Příklad 8: Následující věty zapište formálně ve VL:

a) Když prší, tak nemůžeme jít do školy.

b) Pojedu vlakem nebo autobusem.

c) Svítí slunce, ale fouká i vítr.

d) Prší, právě tehdy a jen tehdy, když sněží.

e) Buď zaprší a my nemusíme zalévat, nebo nezaprší a my zalévat musíme.

f) Pouze když prší, nemůžeme jít do školy.

g) Postačující podmínkou toho, aby nosil brýle, je, že svítí slunce.

Příklad 9: U formulí z příkladu 3 určete pomocí tabulkové metody všechny modely.

Příklad 10: U následujících formulí rozhodněte, o jakou formuli se jedná (splnitelná, tautologie, kontradikce). Použijte tabulkovou metodu.

a) $(p \wedge \neg q) \supset (\neg p \supset (q \vee p))$

b) $\big[(p \vee \neg(p \wedge q)) \supset (\neg p \vee q \vee p)\big] \supset (p \equiv \neg q)$

Příklad 11: Připomeňte si, co to znamená, že formule výrokové logiky jsou ekvivalentní. Které z následujících ekvivalencí mezi dvojicemi formulí platí? Vaše odpovědi zdůvodněte.

1. $p \Leftrightarrow p$
2. $p \Leftrightarrow \neg p$
3. $p \Leftrightarrow \neg\neg p$
4. $\neg p \Leftrightarrow \neg\neg p$
5. $p \wedge p \Leftrightarrow p$
6. $p \vee p \Leftrightarrow p$
7. $p \supset p \Leftrightarrow p$
8. $p \equiv p \Leftrightarrow p$
9. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
10. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
11. $p \supset q \Leftrightarrow q \supset p$
12. $p \equiv q \Leftrightarrow q \equiv p$
13. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
14. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
15. $(p \supset q) \supset r \Leftrightarrow p \supset (q \supset r)$
16. $(p \equiv q) \equiv r \Leftrightarrow p \equiv (q \equiv r)$
17. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$
18. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge r$
19. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
20. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$
21. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
22. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
23. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge q$
24. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
25. $\neg(p \supset q) \Leftrightarrow \neg p \supset \neg q$
26. $(p \supset q) \Leftrightarrow \neg p \wedge q$
27. $(p \supset q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$
28. $(p \supset q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$
29. $(p \supset q) \Leftrightarrow p \vee \neg q$
30. $(p \equiv q) \Leftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$
31. $(p \equiv q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
32. $(p \supset q) \Leftrightarrow (p \equiv q) \vee (q \equiv p)$
33. $(p \equiv q) \Leftrightarrow (p \supset q) \vee (q \supset p)$
34. $(p \equiv q) \Leftrightarrow (p \supset q) \wedge (q \supset p)$