

## Cvičení 6

**Příklad 1:** Mějme následující jazyky:

$$L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w| < 5\}$$

$$L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{ve } w \text{ je každá } 0 \text{ (přimo) následována } 1\}$$

$$L_3 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ je binárním zápisem prvočísla}\}$$

$$L_4 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$$

- Vyjmenujte prvních 10 slov z každého z jazyků  $L_1, L_2, L_3, L_4$  (nejmenších vzhledem k uspořádání  $<_L$ ).
- Vyjmenujte prvních 10 slov z každého z jazyků  $\overline{L_1}, \overline{L_2}, \overline{L_3}, \overline{L_4}$ .
- Vyjmenujte prvních 10 slov z každého z jazyků  $L_1 \cap L_2, L_1 \cap L_3, L_2 \cap L_4$ .
- Vyjmenujte prvních 10 slov z každého z jazyků  $L_1 \cup L_4, L_2 \cup L_3$ .

**Příklad 2:** Uvažujme jazyky nad abecedou  $\{a, b\}$ . Vypište všechna slova ve zřetězení jazyků  $L_1 = \{\varepsilon, abb, bba\}$  a  $L_2 = \{a, b, abba\}$ .

**Příklad 3:** Uvažujme jazyky nad abecedou  $\{0, 1\}$ . Vypište všechna slova ve zřetězení

$$\{0, 001, 111\} \cdot \{\varepsilon, 01, 0101\}$$

**Příklad 4:** Uvažujme jazyky nad abecedou  $\{0, 1\}$ . Popište (slovně) jazyk vzniklý iterací  $\{00, 111\}^*$  a vyjmenujte prvních 10 slov z tohoto jazyka.

**Příklad 5:** Uvažujme jazyky nad abecedou  $\{0, 1\}$ . Nechť  $L_1$  je jazykem všech těch slov obsahujících nejvýše jeden znak '1' a  $L_2$  je jazykem všech těch slov, která se čtou stejně zepředu jako zezadu (tzv. palindromů). Která všechna slova jsou v průniku  $L_1 \cap L_2$ ?

*Poznámka:* Pozor, průnik obou jazyků je nekonečný.

**Příklad 6:** Zjistěte, které z následujících dvou vztahů jsou platné pro všechny jazyky  $L_1, L_2, L_3$ :

a)  $(L_1 \cup L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$  ?

b)  $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$  ?

**Příklad 7:** Proč obecně neplatí  $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cap (L_2 \cdot L_3)$  ?

**Příklad 8:** Předpokládejme, že  $|\Sigma| = k$  ( $k \geq 1$ ) a  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Kolik existuje slov ze  $\Sigma^*$  délky  $n$ ?

b) Kolik existuje slov ze  $\Sigma^*$  délky nejvýše  $n$ ?

**Příklad 9:** Předpokládejme, že  $\Sigma = \{a, b\}$  a  $n, k \in \mathbb{N}$ . Kolik existuje slov  $w \in \Sigma^*$  takových, že  $|w| = n$  a  $|w|_a = k$ ?

**Příklad 10:** Předpokládejme, že  $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$  a

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

Kolik existuje slov  $w \in \Sigma^*$  takových, že  $|w| = n$  a  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\} : |w|_{a_i} = k_i$ ?

**Příklad 11:** Popište alespoň 5 různých uspořádání na množině všech slov nad abecedou  $\{0, 1\}$ . U každého z nich ukažte, že jde skutečně o uspořádání, tj. reflexivní, tranzitivní a antisymetrickou relaci v případě neostrého uspořádání nebo tranzitivní a asymetrickou relaci v případě ostrého uspořádání, a dále pak detailně popište vlastnosti daného uspořádání (např. zda jde o úplné nebo částečné uspořádání, zda existuje nejmenší nebo největší prvek, jaké prvky jsou minimální nebo maximální, zda v daném uspořádání existují nekonečně klesající nebo nekonečně rostoucí posloupnosti apod.)

**Příklad 12:** Uvažujme jazyky nad abecedou  $\{0, 1\}$ . Nechť  $L_1$  je jazykem všech těch slov obsahujících nejvýše pět znaků '1' a  $L_2$  je jazykem všech těch slov, která obsahují stejně '0' jako '1'. Kolik je slov v průniku  $L_1 \cap L_2$ ?

**\*Příklad 13:** Uvažujme jazyky nad abecedou  $\{c, d\}$ . Nechť  $L_0$  je jazyk všech těch slov, která obsahují různé počty výskytů symbolu  $c$  a výskytů symbolu  $d$ . Popište slovně zřetězení  $L_0 \cdot L_0$ .

**\*Příklad 14:** Uvažujme jazyky nad abecedou  $\{a, b\}$ . Nechť  $L_a$  je jazyk všech těch slov, která obsahují více  $a$  než  $b$ , a  $L_b$  je jazyk všech těch slov, která obsahují více  $b$  než  $a$ . Jaký jazyk vznikne zřetězením  $L_a \cdot L_b$ ?

**\*Příklad 15:** Jazyk  $L_1$  obsahuje 6 slov a jazyk  $L_2$  obsahuje 7 slov. Kolik nejméně slov musí obsahovat zřetězení  $L_1 \cdot L_2$ ?