Cvičení 4

Příklad 1: Ověřte platnost/neplatnost úsudku rezoluční metodou:

a) Nefunguje-li program, je chyba v programu nebo není v pořádku systém.
Je-li chyba v programu, musím se poradit se cvičícím.
Systém je v pořádku.
―――――――――――――――――――――――――――――――――
Nefunguje-li program, musím se poradit se cvičícím.

b) Má přednášku nebo se toulá po škole.
Jestliže má přednášku, pak se jedná o vzorného studenta.
―――――――――――――――――――――――――――――――――
Jestliže se nejedná o vzorného studenta, pak se toulá po škole.

c) Není pravda, že student umí Javu a C++.
Student neumí Javu.
―――――――――――――――――――――――――――――――――
Student neumí C++.

d) Jestliže se problému věnuji, tak ten problém vyřeším.
Jestliže se problému nevěnuji, pak mám na práci něco jiného.
―――――――――――――――――――――――――――――――――
Vyřeším ten problém nebo mám na práci něco jiného.

e) Jestliže pracuji, potom vydělávám peníze, ale jestliže jsem líný, pak si užívám.
Buď pracuji nebo jsem líný.
Nicméně, jestliže jsem líný, pak nevydělávám, zatímco jestliže pracují, pak si neužívám.
―――――――――――――――――――――――――――――――――
Proto si užívám.

Příklad 2: Rezoluční metodou odvoďte, co všechno vyplývá z následujících předpokladů:

a) p1: Karel pojede autobusem nebo vlakem.
p2: Jede-li Karel autobusem nebo svým vozem, pak přijede pozdě a zmešká schůzku.
p3: Karel nepřišel pozdě.

b) p1: Je-li úterý, je přednáška a není cvičení.
p2: Dnes je přednáška i cvičení.
p3: Je-li cvičení, pak nepotřebujeme projektor.

Příklad 3: Pro každou z následujících sekvencí symbolů rozhodněte, zda se jedná o a) term, b) formuli predikátové logiky 1. řádu. Pokud se jedná o formuli predikátové logiky 1. řádu, určete, zda je tato formule i) atomická, ii) uzavřená; pokud není formule uzavřená určete množinu volných proměnných, které se v ní vyskytují.

Při posuzování berte jako dané, že f je funkční symbol s aritou 1, g je funkční symbol s aritou 2, c a d jsou konstanty, P je predikátový symbol s aritou 1 a Q a R jsou predikátové symboly s aritou 2.

1. $(\neg((\neg p) \supset (\neg(\neg r))))$
2. $\forall x \in A : P$
3. $f(c)$
4. $R(c, d)$
5. $\forall x \exists y P(c)$
6. $\forall x \exists x P(x)$
7. $\forall x \exists y P(R(x, y))$
8. $\forall x \exists y f(R(x, y))$
9. $\forall x \exists y P(g(x, y))$
10. $\forall x \exists y f(g(x, y))$
11. $\forall x \exists y P(g(f(f(x)), c))$
12. $\forall x (P(d) \wedge \exists y Q(y, c))$
13. $P(d) \wedge \exists y Q(y, c)$
14. $P(x) \wedge \exists y Q(d, c)$
15. $\forall x \exists y (R(x, f(y)) \equiv \exists z Q(z, c))$
16. $\forall x P(g(x))$
17. $\forall x R(f(x))$
18. $\forall x R(f(x), f(x), f(x))$
19. $\forall x P(f(x, x))$
20. $\forall x P(g(x, x))$
21. $f(f(g(c, d)))$
22. $P(f(g(c, d)))$
23. $P(f(d)) \supset \forall x P(x)$
24. $P(f(g(f, f)))$
25. $P(f(g(c, x)))$
26. $\forall x (f(x) \supset g(c, x))$
27. $\forall x P(f(x) \supset g(c, x))$
28. $\forall x P(\neg f(x))$
29. $\forall x \neg P(f(x))$
30. $\neg(P(f(x)) \vee Q(y, z))$

Příklad 4: Předpokládejme, že f je funkční symbol s aritou 2, g je funkční symbol s aritou 1, c, d jsou konstanty, P a Q jsou predikátové symboly s aritou 1 a R je predikátový symbol s aritou 2.

Pro každou z následujících formulí a každou z následujícících interpretací s valuací, určete, zda je daná formule pravdivá v dané interpretaci a valuaci.
Formule:

1. $R(c, d)$
2. $R(c, d) \supset R(c, x)$
3. $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \supset R(x, z))$
4. $\exists x (Q(x) \wedge \forall y R(y, g(x)))$
5. $\exists x \neg P(f(x, y))$
6. $\forall x \exists y \neg R(x, g(g(y)))$

Interpretace:

a) Univerzem je množina $A = \{a, b, c\}$. Funkce $\bar{f}$ a $\bar{g}$ přiřazené funkčním symbolům f a g jsou dány následujícími tabulkami:

$\bar{f}$	a	b	c
a	b	a	c
b	b	b	b
c	a	c	b

x	$\bar{g}(x)$
a	b
b	c
c	c

Konstantám c a d jsou přiřazeny prvky a a b. Predikátu P je přiřazena relace $\{a, c\}$, predikátu Q relace $\emptyset$ a predikátu R relace $\{(a, b),\ (b, c),\ (a, c)\}$.

Předpokládejme valuaci e, kde $e(x) = c$, $e(y) = a$ a $e(z) = a$.

b) Univerzem je množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

- Funkčnímu symbolu f je přiřazena funkce $\bar{f} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $\bar{f}(x, y) = x + y$.
- Funkčnímu symbolu g je přiřazena funkce $\bar{g} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $\bar{g}(x) = x + 1$.
- Konstantám c a d jsou přiřazeny prvky 0 a 2.
- Predikátovému symbolu P je přiřazena relace $\{x \in \mathbb{N} \mid x \bmod 2 = 0\}$.
- Predikátovému symbolu Q je přiřazena relace $\{x \in \mathbb{N} \mid x = y^2 \text{ pro nějaké } y \in \mathbb{N}\}$.
- Predikátovému symbolu R je přiřazena relace $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\}$.

Předpokládejme valuaci e, kde $e(x) = 7$, $e(y) = 2$, $e(z) = 9$.

c) Univerzem je množina všech podmnožin Eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^2$, tj. množina $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Označme množinu $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ symbolem U.

- Funkčnímu symbolu f je přiřazena funkce $\bar{f} : U \times U \to U$, kde $\bar{f}(X, Y) = X \cup Y$.
- Funkčnímu symbolu g je přiřazena funkce $\bar{g} : U \to U$, kde $\bar{g}(X) = \mathbb{R}^2 - X$.
- Konstantě c je přiřazena množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- Konstantě d je přiřazena množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 1\}$.
- Predikátovému symbolu P je přiřazena relace

$$\{X \in U \mid \text{pro každé } (x, y) \in X \text{ platí } x > 0 \text{ a } y > 0\}.$$

- Predikátovému symbolu Q je přiřazena relace $\{X \in U \mid (0, 0) \in X\}$.
- Predikátovému symbolu R je přiřazena relace $\{(X, Y) \in U \times U \mid X \cap Y \neq \emptyset\}$.

Předpokládejme valuaci e, kde:

- $e(x) = \{(1, 3),\ (-2, 3.5)\}$
- $e(y) = \emptyset$
- $e(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$

Příklad 5: Převeďte následující věty do formulí PL1 a ověřte jejich ekvivalenci pomocí ekvivalentních úprav:

a) Všechna prvočísla větší než 2 jsou lichá.
Je-li prvočíslo větší než 2, pak je liché.
Neexistuje prvočíslo větší než 2, které by nebylo liché.
Není-li číslo liché, pak to není prvočíslo větší než 2.

b) Marie má ráda pouze vítěze.
Pokud má Marie někoho ráda, pak je to vítěz.
Neexistuje nikdo takový, že by ho Marie měla ráda a nebyl to vítěz.
Kdo není vítěz, toho Mary nemá ráda.

c) Některá prvočísla nejsou lichá.
Není pravda, že všechna prvočísla jsou lichá.

d) Někteří studenti nejsou líní.
Ne všichni studenti jsou líní.

e) Žádné prvočíslo není sudé.
Je-li číslo sudé, pak to není prvočíslo.
Neexistuje sudé prvočíslo.

f) Žádný učený z nebe nespadl.
Kdo spadl z nebe, není učený.
Neexistuje učený spadlý z nebe.

g) Existuje sudé prvočíslo.
Někteří učení spadli z nebe.

h) Některá čísla jsou menší než jejich druhá mocnina.
Není pravda, že žádné číslo není menší než jeho druhá mocnina.

i) Někteří mají rádi svou matku.
Není pravda, že nikdo nemá rád svou matku.

j) Neexistuje největší přirozené číslo.
Neexistuje přirozené x takové, že je větší nebo rovno než všechna y.
Ke každému číslu x existuje číslo y takové, že je-li x přirozené, pak není větší nebo rovno y.

Příklad 6: Pro každou z formulí, kterou jste dostali analýzou výroků z příkladu 5, najděte interpretaci, která je jejím modelem, a interpretaci, která jejím modelem není.