Cvičení 1

Příklad 1: Pro každý z následujících formálních zápisů množin uveďte (svými slovy), jaké prvky daná množina obsahuje:

a) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

b) $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$

c) $\{n \mid n = 2m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}\}$

d) $\{n \mid n = 2m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ a $n = 3k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}\}$

e) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = n + 1\}$

Příklad 2: Popište vhodným formálním zápisem následující množiny:

a) Množina obsahující čísla 1, 10 a 100.

b) Množina obsahující všechna celá čísla větší než 5.

c) Množina obsahující všechna přirozená čísla menší než 5.

d) Množina neobsahující žádné prvky.

e) Množina všech podmnožin dané množiny X.

Příklad 3: Uvažujme množiny $A = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$ a $B = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$.

a) Je $A \subseteq B$?

b) Je $A \supseteq B$?

c) Co je $A \cup B$?

d) Co je $A \cap B$?

e) Co je $A \times B$?

f) Co je $\mathcal{P}(B)$?

Příklad 4: Jestliže množina A má a prvků a množina B má b prvků, kolik prvků má množina $A \times B$? Vaši odpověď vysvětlete.

Příklad 5: Jestliže množina C má c prvků, kolik prvků má množina $\mathcal{P}(C)$? Vaši odpověď vysvětlete.

Příklad 6: Připomeňte si, co je to relace, a jaké znáte typy relací (homogenní vs. nehomogenní, unární, binární, atd.).

a) Přesně definujte, co to znamená, že relace je reflexivní, ireflexivní, symetrická, asymetrická, antisymetrická, tranzitivní, funkční.

b) Uvědomte si souvislost mezi binárními relacemi a orientovanými grafy (které mohou být i nekonečné) a popište, co jednotlivé vlastnosti uvedené v předchozím bodě znamenají z hlediska grafu reprezentujícího příslušnou relaci.

c) Připomeňte si, co to znamená, že relace je ekvivalence. Jak pojem ekvivalence souvisí s pojmem rozkladu?

d) Připomeňte si, co to znamená, že relace je uspořádání. Jaké znáte typy uspořádání?

Příklad 7: Uveďte příklad binární relace, která je:

a) Reflexivní a symetrická, ale není tranzitivní.

b) Reflexivní a tranzitivní, ale není symetrická.

c) Symetrická a tranzitivní, ale není reflexivní.

Příklad 8: Ukažte, že binární relace

$$\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \equiv b \pmod{n}\}$$

na $\mathbb{N}$ (kde $n \geq 1$ je nějaké přirozené číslo) je ekvivalence.
Poznámka: Zápis $a \equiv b \pmod{n}$ znamená, že a i b dávají po dělení n stejný zbytek, tj. $(a \bmod n) = (b \bmod n)$.

Příklad 9: Nechť S je konečná množina a $R \subseteq S \times S$ ekvivalence. Ukažte, že pokud relace R je současně také antisymetrická, pak její třídy ekvivalence jsou jednoprvkové množiny.

Příklad 10: Uveďte příklad uspořádání na množině přirozených čísel, které není úplným uspořádáním.

Příklad 11: Je následující tvrzení pravdivé? Vyskytuje se v jeho důkaze nějaká chyba?

TVRZENÍ: Jestliže je relace R symetrická a tranzitivní, pak je i reflexivní.

Důkaz: Díky symetrii platí pro libovolné dva prvky a a b, že z aRb plyne bRa. Díky tranzitivitě z toho plyne aRa, čímž je důkaz hotov.

Příklad 12: Dokažte, že relace je tranzitivní a ireflexivní právě tehdy, když je tranzitivní a asymetrická.

Příklad 13: Nechť $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $Y = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Unární funkce $f : X \to Y$ a binární funkce $g : X \times Y \to Y$ jsou popsány následujícími tabulkami:

n	$f(n)$
1	6
2	7
3	6
4	7
5	6

g	6	7	8	9	10
1	10	10	10	10	10
2	7	8	9	10	6
3	7	7	8	8	9
4	9	8	7	6	10
5	6	6	6	6	6

a) Jaká je hodnota $f(2)$?

b) Co definičním oborem a oborem hodnot funkce f?

c) Jaká je hodnota $g(2, 10)$?

d) Co definičním oborem a oborem hodnot funkce g?

e) Jaká je hodnota $g(4, f(4))$?

Příklad 14: Připomeňte si, co to znamená, že funkce je injektivní (prostá), surjektivní (na) a bijektivní. Připomeňte si také operaci skládání funkcí.

a) Dokažte, že složení dvou injektivních funkcí je injektivní funkce.

b) Dokažte, že složení dvou surjektivních funkcí je surjektivní funkce.

c) Dokažte, že složení dvou bijektivních funkcí je bijektivní funkce.

Příklad 15: Předpokládejme, že A a B jsou konečné množiny a $f : A \to B$ je funkce. Jaký je vztah mezi $|A|$ a $|B|$, jestliže je funkce f:

a) injektivní

b) surjektivní

c) bijektivní

Příklad 16: Je funkce $f(x) = x + 1$ bijekcí na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$? A na množině celých čísel $\mathbb{Z}$?

Příklad 17: Připomeňte si pojem binární operace na množině a co to znamená, že daná operace je asociativní, a co to znamená, že je komutativní. Uveďte příklad operace, která:

a) je asociativní, ale není komutativní,

b) je komutativní, ale není asociativní.

c) není asociativní ani komutativní.

Příklad 18: Uvažujme asociativní operaci $\circ$ na množině S. Ukažte, že hodnota výrazu $x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n$, kde $x_i \in S$, je dobře definovaná, neboť tato hodnota nezávisí na konkrétním uzávorkování.

Příklad 19: Uvažujme množinu S, na které jsou definovány dvě asociativní a komutativní operace $\sqcap$ a $\sqcup$.

a) Platí obecně, že $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup z$?

b) Platí obecně, že $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$?

Příklad 20: Uvažujme nějaký binární strom T, kde každý vrchol, který není listem, má dva potomky. Jakou minimální a maximální výšku může mít strom T, jestliže má celkem n vrcholů? (Výškou stromu myslíme vzdálenost od kořene k nejvzdálenějšímu vrcholu.)

Příklad 21: Ukažte, že binární strom, který má n listů, má právě $n-1$ vrcholů, které mají 2 potomky.