Cvičení 9

Příklad 1: Uvažujme následující bezkontextovou gramatiku:

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & aBb \mid AB \\ A & \longrightarrow & bAb \mid a \\ B & \longrightarrow & \varepsilon \mid aABb \end{array}$$

a) Uveďte (nějakou) derivaci slova $babaab$ v této gramatice.

b) Nakreslete příslušný derivační strom.

c) Uveďte příslušnou levou a pravou derivaci odpovídající derivačnímu stromu nakreslenému v předchozím bodě.

Příklad 2: Vytvořte bezkontextovou gramatiku pro každý z následujících jazyků:

- $L_1 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } babb\}$
- $L_2 = \{0^n 1^m \mid 1 \leq n < m\}$
- $L_3 = \{a^n b^m a^{n+2} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
- $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$
- $L_5 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 > 1,\ |w|_1 \leq 2\}$
- $L_6 = \{0^n w w^R 1^n \mid w \in \{0,1\}^*,\ n \in \mathbb{N}\}$
- $L_7 = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ ve w je každé a bezprostředně následováno b nebo $w = b^n a^m$, kde $0 \leq m \leq n\}$
- $L_8 = \{uv^R v \mid u, v \in \{0,1\}^*,\ |u|_0 \bmod 4 = 2,$ u končí sufixem 101 a v obsahuje podslovo $10\}$
- $L_9 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R,\ |w| \bmod 4 = 0\}$
- $L_{10} = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R,\ |w| \bmod 3 = 0\}$
- $L_{11} = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid$ za každým úsekem znaků a bezprostředně následuje dvakrát delší úsek znaků $b\}$
- $L_{12} = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$

Příklad 3: Generují obě následující gramatiky tentýž jazyk?

$$S \longrightarrow aaSbb \mid ab \mid aabb$$

$$S \longrightarrow aSb \mid ab$$

Příklad 4: Generují obě následující gramatiky tentýž jazyk?

$$S \longrightarrow aaSbb \mid ab \mid \varepsilon$$
$$S \longrightarrow aSb \mid ab$$

Příklad 5: Generují obě následující gramatiky tentýž jazyk?

$$S \longrightarrow aaSb \mid ab \mid \varepsilon$$
$$S \longrightarrow aSb \mid aab \mid \varepsilon$$

Příklad 6: Napište bezkontextovou gramatiku generující množinu všech dobře vytvořených formulí výrokové logiky. Jako množinu všech výrokových proměnných uvažujte množinu $Var = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, kde jednotlivé proměnné můžete zapisovat jako $\mathtt{x0}, \mathtt{x1}, \mathtt{x2}, \ldots$

a) Zjistěte, zda je vámi vytvořená gramatika jednoznačná.

b) Pokud gramatika jednoznačná není, upravte ji tak, aby jednoznačná byla.

c) Upravte gramatiku tak, aby byla jednoznačná a aby struktura vytvořeného derivačního stromu pro libovolnou derivaci slova v této gramatice odpovídala skutečné prioritě operátorů, tj. $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$ (od největší po nejmenší).

Příklad 7: Navrhněte bezkontextovou gramatiku pro jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{\mathtt{(}, \mathtt{)}, \mathtt{[}, \mathtt{]}\}$ tvořený všemi „dobře uzávorkovanými“ výrazy. Dobře uzávorkovaným výrazem se myslí taková sekvence znaků, kde každé levé závorce odpovídá právě jedna příslušná pravá závorka stejného typu, a kde se závorky „nekříží“ (tj. odpovídající si páry závorek jsou do sebe správně zanořeny).

Bonusový příklad 6 (3 body):

Uvažujeme libovolnou abecedu Σ.

Hammingova vzdálenost $h(u,v)$ libovolných dvou slov $u, v \in \Sigma^*$ takových, že $|u| = |v|$, je počet pozic ve slovech u, v, na kterých se tato dvě slova liší. Formálně můžeme $h(u,v)$ definovat následovně: $h(\varepsilon,\varepsilon) = 0$, a pro libovolné symboly $a, b \in \Sigma$ a slova $u, v \in \Sigma^*$ taková, že $|u| = |v|$, platí

$$h(au, bv) = \begin{cases} h(u,v) & \text{pokud } a = b \\ 1 + h(u,v) & \text{pokud } a \neq b \end{cases}$$

Pro libovolný jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ a libovolné $k \geq 0$ definujme jazyk $H_k(L)$ jako

$$H_k(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists w' \in L : |w| = |w'| \wedge h(w,w') \leq k\}.$$

Ukažte, že pro každé $k \geq 0$ platí, že pokud jazyk L je regulární, pak i jazyk $H_k(L)$ je regulární.