Cvičení 6

Příklad 1: Mějme následující jazyky:

$$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| < 5\}$$
$$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ve } w \text{ je každá 0 (přímo) následována 1}\}$$
$$L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ je binárním zápisem prvočísla}\}$$
$$L_4 = \{w \in \{0,1\} \mid w = w^R\}$$

a) Vyjmenujte prvních 10 slov z každého z jazyků L_1, L_2, L_3, L_4 (nejmenších vzhledem k uspořádání $<_L$).

b) Vyjmenujte prvních 10 slov z každého z jazyků $\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$, $\overline{L_3}$, $\overline{L_4}$.

c) Vyjmenujte prvních 10 slov z každého z jazyků $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cap L_3$, $L_2 \cap L_4$.

d) Vyjmenujte prvních 10 slov z každého z jazyků $L_1 \cup L_4$, $L_2 \cup L_3$.

Příklad 2: Uvažujme jazyky nad abecedou $\{a, b\}$. Vypište všechna slova ve zřetězení jazyků $L_1 = \{\varepsilon, abb, bba\}$ a $L_2 = \{a, b, abba\}$.

Příklad 3: Uvažujme jazyky nad abecedou $\{0, 1\}$. Vypište všechna slova ve zřetězení

$$\{0, 001, 111\} \cdot \{\varepsilon, 01, 0101\}$$

Příklad 4: Uvažujme jazyky nad abecedou $\{0, 1\}$. Popište (slovně) jazyk vzniklý iterací $\{00, 111\}^*$ a vyjmenujte prvních 10 slov z tohoto jazyka.

Příklad 5: Uvažujme jazyky nad abecedou $\{0, 1\}$. Nechť L_1 je jazykem všech těch slov obsahujících nejvýše jeden znak '1' a L_2 je jazykem všech těch slov, která se čtou stejně zepředu jako zezadu (tzv. palindromů). Která všechna slova jsou v průniku $L_1 \cap L_2$?
Poznámka: Pozor, průnik obou jazyků je nekonečný.

Příklad 6: Zjistěte, které z následujících dvou vztahů jsou platné pro všechny jazyky L_1, L_2:

a) $(L_1 \cup L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$?

b) $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$?

Příklad 7: Proč obecně neplatí $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cap (L_2 \cdot L_3)$?

Příklad 8: Předpokládejme, že $|\Sigma| = k$ $(k \geq 1)$ a $n \in \mathbb{N}$.

a) Kolik existuje slov ze Σ^* délky n?

b) Kolik existuje slov ze Σ^* délky nejvýše n?

Příklad 9: Předpokládejme, že $\Sigma = \{a, b\}$ a $n, k \in \mathbb{N}$. Kolik existuje slov $w \in \Sigma^*$ takových, že $|w| = n$ a $|w|_a = k$?

Příklad 10: Předpokládejme, že $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $n \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ a

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n\,.$$

Kolik existuje slov $w \in \Sigma^*$ takových, že $|w| = n$ a $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\} : |w|_{a_i} = k_i$?

Příklad 11: Popište alespoň 5 různých uspořádání na množině všech slov nad abecedou $\{0, 1\}$. U každého z nich ukažte, že jde skutečně o uspořádání, tj. reflexivní, tranzitivní a antisymetrickou relaci v případě neostrého uspořádání nebo tranzitivní a asymetrickou relaci v případě ostrého uspořádání, a dále pak detailně popište vlastnosti daného uspořádání (např. zda jde o úplné nebo částečné uspořádání, zda existuje nejmenší nebo největší prvek, jaké prvky jsou minimální nebo maximální, zda v daném uspořádání existují nekonečné klesající nebo nekonečné rostoucí posloupnosti apod.)

Příklad 12: Uvažujme jazyky nad abecedou $\{0, 1\}$. Nechť L_1 je jazykem všech těch slov obsahujících nejvýše pět znaků '1' a L_2 je jazykem všech těch slov, která obsahují stejně '0' jako '1'. Kolik je slov v průniku $L_1 \cap L_2$?

***Příklad 13:** Uvažujme jazyky nad abecedou $\{c, d\}$. Nechť L_0 je jazyk všech těch slov, která obsahují různé počty výskytů symbolu c a výskytů symbolu d. Popište slovně zřetězení $L_0 \cdot L_0$.

***Příklad 14:** Uvažujme jazyky nad abecedou $\{a, b\}$. Nechť L_a je jazyk všech těch slov, která obsahují více a než b, a L_b je jazyk všech těch slov, která obsahují více b než a. Jaký jazyk vznikne zřetězením $L_a \cdot L_b$?

***Příklad 15:** Jazyk L_1 obsahuje 6 slov a jazyk L_2 obsahuje 7 slov. Kolik nejméně slov musí obsahovat zřetězení $L_1 \cdot L_2$?

Bonusový příklad 3 (4 body):

Uvažujme uzavřené formule predikátové logiky 1. řádu bez rovnosti, ve kterých se nevyskytují žádné funkční symboly (tím pádem ani konstanty), a kde predikátové symboly mohou být pouze unární.

Ukažte, jak vytvořit (nekonečnou) posloupnost takovýchto formulí $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ a polynom $p(n)$ takový, že pro každé $n \geq 1$ platí:

- $|\varphi_n| \leq p(n)$ (kde $|\varphi_n|$ značí velikost formule φ_n, tj. počet symbolů ve φ_n)
- Existuje interpretace, která je modelem formule φ_n.
- Pro každou interpretaci, která je modelem formule φ_n, platí, že její universum má alespoň 2^n prvků.

Poznámka: V řešení není třeba uvádět přesnou hodnotu polynomu $p(n)$, stačí zdůvodnit, že nějaký takový polynom existuje.